Задачи по курсу «Мы не можем ждать милостей от природы»

Значок перед задачей означает оценку уровня сложности.

≈ Как можно закодировать отображение в виде множества?

≈ Докажите, что декартово произведение двух множеств всегда существует (является множеством).

≈ Доказать из аксиом ZFC, что не существует отображения f из натуральных чисел во множества, такого что выполнено утверждение $\forall n : f(n+1) \in f(n)$. Нужна ли для этого аксиома выбора?

↓ Что будет, если заменить условие на $f(n) \in f(n+1)$?

≈ Докажите, что для любых двух множеств A и B существует множество всех отображений из множества A в множество B.

↓ Докажите, что каждое множество равномощно некоторому ординалу.

↓ Приведите пример нетранзитивного множества.

≈ Верно ли, что любое транзитивное множество, содержащее только натуральные числа, является ординалом?

≈ Докажите, что существует множество, задающее отображение $x \mapsto 2x$. Докажите, что существует множество, задающее отображение $x \mapsto 2^x$.

↑ Пусть множество конечно и его транзитивное замыкание содержит только конечные множества. Верно ли, что его транзитивное замыкание конечно? (Множество называется конечным, если не существует вложения в него из натуральных чисел)

≈ Докажите, что для каждого ординала есть максимальный предельный ординал, не превосходящий его.

↓ Определите с помощью рекурсии какую-нибудь функцию на ординалах, индукционные переходы при построении которой (для непредельных ординалов) устроены так же, как у функции $x \mapsto 2x$ на натуральных числах. Чему равна эта функция от множества всех натуральных чисел? Тот же вопрос для функции $x \mapsto 2^x$.

↑ Для всякого ли предельного ординала α существует такая последовательность меньших ординалов (то есть отображение $f : \mathbb{N} \to \alpha$), что объединение всех элементов этой последовательности (то есть $\Cup f(\mathbb{N})$) равно самому ординалу α.

↓ Каков ранг множества всех натуральных чисел?

↓ Сколько есть фильтров общего положения для ЧУМ, являющегося линейно упорядоченным?

↓ Сколько есть фильтров общего положения для ЧУМ, в котором есть максимальный элемент?

≈ Какие есть фильтры общего положения для ЧУМ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. (Пара считается больше или равна другой паре, если нестрогое неравенство выполняется для обеих компонент)

≈ Приведите пример ЧУМ, для которого существует лишь счётное количество плотных множеств.

↑ Приведите пример ЧУМ, для которого существует бесконечно много разных фильтров общего положения, являющихся внутренними множествами, и бесконечно много фильтров общего положения, не являющихся внутренними множествами.

↑ Существует ли ЧУМ, такое что существует бесконечно много разных фильтров общего положения, причём каждый фильтр задаёт непрерывную функцию из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не задаваемую никаким внутренним множеством.

↑ Существует ли непустое множество X бесконечных ординалов, которое содержит для каждого ординала $\alpha \in X$ некоторый ординал, равномощный множеству всех подмножеств α?

↑ Если отказаться от аксиомы бесконечности, может ли существовать множество, не имеющее транзитивного замыкания?

≈ Существуют ли счётная модель ZF и частично упорядоченное счётное множество в ней, такие, что любое внешнее плотное множество для этого ЧУМ тоже лежит в модели?

↑ Существуют ли модель M теории ZFC и ЧУМ P в модели M, такие что существует фильтр общего положения на P, не лежащий в M, но не существует фильтра общего положения на P, пересекающегося со всеми ''внешними'' плотными множествами на P?

↑ Пусть есть модель M теории ZFC и ЧУМ P в ней. Пусть есть два множества, заданных в расширениипо фильтру общего положения, $X(G)$ и $Y(G)$. Верно ли, что элемент $p \in P$ вынуждает $(X \subset Y) \vee (Y \subset X)$ тогда и только тогда, когда он вынуждает $X \subset Y$ или вынуждает $Y \subset X$?