ЛЕММА ЦОРНА

Аксиома 1. (Аксиома выбора) Для любого множества непересекающихся множеств существует множество, пересекающееся с каждым из них ровно по одному элементу.

999d.1. Пусть дано множество M, отношение эквивалентности на нём $\sim$ и функция $f : M \times M \to M$, такая что $a \sim b, c \sim d \Rightarrow f(a, c) \sim f(b, d)$. Докажите, что существует функция $g : M \times M \to M$, такая что $\forall x, y \in M\, g(x, y) \sim f(x, y)$ и при этом:
а)$a \sim b, c \sim d \Rightarrow g(a, c) = g(b, d)$;
б)g не принимает двух различных эквивалентных значений.

Определение 1. *Частичный порядок* $\leqslant$ на множестве M — это отношение, для которого выполнены три свойства:
1) $\forall x \in M\, x \leqslant x$ (рефлексивность)
2) $\forall x, y \in M\, x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (антисимметричность)
3) $\forall x, y, z \in M\, x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (транзитивность)
При этом множество M называется частично упорядоченным.

Замечание 1. Некоторые элементы могут быть несравнимы, то есть не выполнено ни $x \leqslant y$, ни $y \leqslant x$.

999d.2. Докажите, что равенство является частичным порядком.

Определение 2. *Цепью* в множестве M с частичным порядком $\leqslant$ называется множество $N \subset M$, такое что $\forall x, y \in N\, x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. Цепь N называется ограниченной сверху, если $\exists l \in M : \forall x \in N x \leqslant l$.

999d.3. Опишите все цепи
а) во множестве $\mathbb{N}$ с частичным порядком $=$.
б) во множестве $\mathbb{N}$ с частичным порядком $\leqslant$.

999d.4. Докажите, что подмножество цепи является цепью.

Аксиома 2. (Лемма Цорна) Пусть в непустом частично упорядоченном множестве M каждая цепь ограничена сверху. Тогда во множестве M есть максимальный элемент, то есть $\exists x \in M : \forall y \in M\, x \leqslant y \Rightarrow x = y$.

999d.5. Докажите, что в каждом линейном пространстве существует базис.

Замечание 2. Рассмотрите подпространства, имеющие базис.

999d.6. Докажите, что каждое поле вложено в алгебраически замкнутое.

999d.7. Докажите, что из Аксиомы 2 следует Аксиома 1.

Определение 3. Частичный порядок называется линейным, если всё множество является цепью.

999d.8. Приведите пример частичного порядка на натуральных числах, не являющегося линейным.

999d.9. Выведите из Аксиомы 2, что всякое множество можно линейно упорядочить.

Замечание 3. В дальнейшем пользоваться Аксиомой 2 не будем.

Определение 4. Линейный порядок называется полным, если каждое непустое множество имеет наименьший элемент. Множество при этом является вполне упорядоченным.

999d.10. Докажите, что стандартный порядок на натуральных числах полон. Полон ли лексикографический порядок на множестве конечных последовательностей натуральных чисел?

999d.11. Приведите пример линейного порядка на натуральных числах, не являющегося полным.

999d.12. Докажите, что порядок является полным тогда и только тогда, когда во множестве нет бесконечной убывающей последовательности.

Определение 5. Начальным отрезком вполне упорядоченного множества называется его подмножество, состоящее из всех элементов, меньших данного.

999d.13. (Трансфинитная индукция) Пусть во вполне упорядоченном множестве некоторое утверждение верно для минимального элемента, а также для каждого элемента, для соответствующего которому начальному отрезку утверждение верно. Тогда это утверждение выполнено для всех элементов множества.

999d.14. Докажите, что из двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку второго.

999d.15. Докажите, что для любого множества существует функция из множества его подмножеств, кроме него самого, в него, такая что образ любого подмножества не лежит в этом подмножестве.

999d.16. Пусть на множестве задана функция f из предыдущей задачи. Пусть есть два его подмножества, S и T с полными порядками на них $\leqslant_S$ и $\leqslant_T$. Пусть при этом $\forall x \in S\, x = f(\{y \in S | y <_S x\})$, $\forall x \in T\, x = f(\{y \in T | y <_T x\})$. Докажите, что одно из этих множеств — начальный отрезок другого.

999d.17. (Теорема Цермело) Докажите, что на всяком множестве можно задать полный линейный порядок.

999d.18. Выведите из Аксиомы 1 Аксиому 2.

Замечание 4. В противном случае можно было бы вложить в частично упорядоченное множество вполне упорядоченное множество большей мощности.