

Содержание

Введение	3
1 Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory	5
1.1 Informal introduction	5
1.2 Formal statements of main results	7
1.3 Linking and intersection in the plane	9
1.4 Linking and intersection in three-dimensional space	12
1.5 (m, n) -realizations in three-dimensional space	13
1.6 Linking and intersection in four-dimensional space	16
1.7 (m, n) -realizations in four-dimensional space	17
1.8 Embedded sets of segments and realizability of graphs	18
1.9 Linear realizability of hypergraphs	20
1.10 Piecewise-linear realizability of hypergraphs	22
1.11 Теоремы Радона и Тверберга	24
Указания и решения к некоторым задачам	25
2 Вложения графов в плоскость и в пространство	28
2.1 Отображения графов в плоскость	28
2.2 Linking modulo 2	30
2.3 Linking number	31
2.4 Кольца Борромео и коммутаторы	33
2.5 Massey-Milnor number modulo 2	34
2.6 Massey-Milnor and Sato-Levine numbers	35
2.7 Зацепленность в многомерном пространстве	36
2.8 Инвариант Ван Кампена заузленных графов	38
Указания и решения к некоторым задачам	40
3 Устойчивость самопересечений графов на плоскости	42
3.1 Аппроксимируемость путей вложениями	42
3.2 Идея построения препятствия Ван Кампена	44
3.3 Препятствие Ван Кампена	46
3.4 Другое построение препятствия Ван Кампена	48
3.5 Препятствие Ван Кампена к распроектируемости	50
3.6 Approximability by embeddings	52
Указания и решения к некоторым задачам	53

¹Книга написана по материалам проведенных в 2011 и 2013 гг. миникурсов в летней школе «Современная математика», спецкурсов и докладов на мехмате МГУ, ФИВТ МФТИ и в МЦНМО. Обновляемая версия поддерживается на www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf. Благодарю С. Аввакумова, Д. Богданова, Ю. Матушека, М. Танцера, У. Вагнера, А. Рябичева, М. Скопенкова и П. Солоневич за полезные обсуждения. Благодарю Ю. Матушека, М. Танцера, У. Вагнера и М. Скопенкова за разрешение использовать материалы из их статей. Компьютерные версии многих рисунков подготовлены издательством МЦНМО. Благодарю И. Богданова и М. Скопенкова за подготовку компьютерных версий некоторых других рисунков.

²www.mccme.ru/~skopenko. Московский Физико-Технический Институт, Независимый Московский Университет. Частично поддержан Российской Фондом Фундаментальных Исследований, Гранты номер 07-01-00648а и 15-01-06302, грантами фонда Саймонса и грантом фонда Д. Зимина ‘Династия’.

4 Реализуемость двумерных комплексов	54
4.1 Наглядные задачи о склейках в пространстве	54
4.2 Определение двумерного симплициального комплекса	54
4.3 Другие конструкции 2-комплексов	56
4.4 Линейная вложимость 2-комплексов	57
4.5 Кусочно-линейные вложения комплексов	59
4.6 Задачи для исследования: вложения косых произведений	60
4.7 Алгоритм ван Кампена распознавания вложимости графов	60
4.8 Алгоритм Ван Кампена распознавания вложимости	63
4.9 Неполнота препятствия ван Кампена для 2-комплексов в \mathbb{R}^4	65
4.10 Идея доказательства теоремы 1.42.с об NP-трудности	66
Указания и решения к некоторым задачам	68
5 Конфигурационные пространства и планарность	71
5.1 Препятствие взрезанного квадрата к планарности графов	71
5.2 Приложение: теорема Мура о триодах и непланарное бесконечное дерево	72
5.3 Приложение: препятствие взрезанного квадрата к планарности компактов	74
6 Утолщения графов	77
6.1 Реализуемость иероглифов на плоскости	77
6.2 Реализуемость иероглифов на двумерных многообразиях	78
6.3 Определение и примеры утолщений	81
6.4 Реализуемость ориентированных утолщений	83
6.5 Реализуемость утолщений	85
6.6 Ориентируемость и классификация утолщений	87
Указания и решения к некоторым задачам	89
7 Трехмерные утолщения двумерных комплексов	92
7.1 Утолщаемость 2-комплексов до 3-многообразий	92
7.2 Ложные поверхности и их утолщаемость	93
7.3 Доказательство теоремы ориентируемой утолщаемости	94
7.4 Размышления об утолщаемости ложных поверхностей	95
7.5 Классификация трехмерных утолщений ложных поверхностей	96
7.6 3-утолщения произвольных 2-полиэдров	97
Указания и решения к некоторым задачам	99
8 Гомотопическая классификация отображений	100
8.1 Отображения графа в окружность	100
8.2 Отображения графа в проективную плоскость	101
8.3 Эквивариантные отображения графа	103
8.4 Отображения полиэдра в окружность	104
8.5 Отображения полиэдра в сферу той же размерности	105
8.6 Отображения полиэдра в сферу меньшей размерности	106
8.7 Отображения в пространства Эйленберга-Маклейна	107

Введение

Хорошо известно, что существует быстрый (точнее — линейный) алгоритм, определяющий, вложим ли данный граф в плоскость, т.е., можно ли граф расположить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались и не самопересекались (Хопкрофт-Тарджан, 1974). Мы рассмотрим аналогичную задачу для гиперграфов в пространствах произвольной размерности: как распознать вложимость n -мерного гиперграфа в m -мерное пространство? Теория гиперграфов (точнее, симплициальных комплексов) — бурно развивающийся раздел математики, возникший на стыке комбинаторики, топологии и программирования.

Некоторые результаты о реализуемости гиперграфов приведены в §1 на языке систем точек. Изучаются реализация графов на плоскости (§2) и *графов с вращениями* на поверхностях (§6). В §3 приводится элементарное изложение проблемы устойчивости самопересечений пути на плоскости (Секлюцкий 1969, Реповш-А. Скопенков 1998, Минц 1997, М. Скопенков 2003). На этом маломерном примере мы показываем основную идею построения препятствия ван Кампена к вложимости n -мерных гиперграфов в $2n$ -мерное пространство (§4.8). Определения и примеры гиперграфов и симплициальных комплексов приведены в §4. Основные определения и результаты о реализуемости гиперграфов приведены в §4. В §4.10 и §4.8 намечено доказательство того, что

- существует полиномиальный алгоритм распознавания вложимости n -мерных гиперграфов в $2n$ -мерное пространство при $n > 2$,
- указанная проблема распознавания вложимости является NP-трудной при $n = 2$ (и даже при $6 < 2m < 3n+3$); это означает, что, по-видимому, полиномиального алгоритма не существует.

(Ван Кампен 1932, Шапиро 1957, By 1957, Matoušek-Tancer-Wagner, 2008.)

Для доказательства NP-трудности (§4.10) некоторая заведомо NP-трудная проблема о булевых функциях будет сведена к проблеме распознавания вложимости.

Методы разработки быстрого алгоритма распознавания вложимости n -мерных гиперграфов в m -мерное пространство при $2m \geq 3n + 3$, проиллюстрированы в §§4.7, 4.8, 5, 8.

В §7 написано, как при изучении вложимости гиперграфов в трехмерные многообразия возникают группы когомологий, и как они помогают доказывать красивые математические и алгоритмические результаты.

Приводимые результаты и методы, как и в других разделах теории графов и гиперграфов, могут найти практические применения (при проектировании электрических, транспортных и других схем). С точки зрения теории они интересны в качестве изучения общих проблем вложимости и заузливания. Согласно Зиману [Z], классическими проблемами топологии являются следующие.

(1) *Проблема гомеоморфизма.* Когда данные два пространства N и M гомеоморфны? Как описать множество гомеоморфических классов многообразий из заданного класса, например, заданной размерности n ?

(2) *Проблема вложимости.* Какие пространства N вложимы в \mathbb{R}^m для данного m ?

(3) *Проблема заузливания.* Какие вложения $f, g : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ изотопны? Как описать множество изотопических классов вложений $N \rightarrow \mathbb{R}^m$?

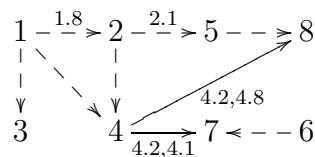
Идеи и методы, применяемые для изучения проблем вложимости и заузливания, применяются и для проблемы гомеоморфизма (и для других проблем топологии и ее приложений).

Все необходимые определения (гиперграф, вложимость, NP-трудность, группы гомологий, препятствие Ван Кампена и т.д.) приводятся в книге.

Как устроена эта книга

Основные идеи представлены на ‘олимпиадных’ примерах: размерности не выше 3, на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка.

Основная часть материала излагается виде задач, к которым на лекциях приведены указания и решения. (Это характерно не только для дзенских монастырей, но и для серьезного изучения математики.) *Общее замечание к формулировкам задач:* если условие задачи является утверждением, то в задаче требуется это утверждение доказать. Если некоторая задача не получается, то читайте дальше — соседние задачи могут оказаться подсказками. (На занятии задача-подсказка выдается только тогда, когда студент подумал над самой задачей.) Имеются красивые задачи для исследования, полное решение которых мне неизвестно; они отмечены звездочкой.



Выше приведена схема существенной зависимости параграфов. Пунктири в схеме означает, что один параграф нужен для мотивировки другого, но формально не используется в другом. Номера пунктов у стрелки означают, что используются только эти пункты. Начинать изучение книги можно с любого параграфа, кроме §7 (поскольку даже пп. 4.1 и 8.1-8.3 интересны, но не используют предварительных знаний).

1 Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory

‘It’s too difficult.’
‘Write simply.’
‘That’s hardest of all.’
I. Murdoch, *The Message to the Planet*.

1.1 Informal introduction

‘Impossible constructions’ like the impossible cube, the Penrose staircase, the ambiguous trident etc are well-known, mainly due to pictures by M.C. Escher. In geometry, topology, and graph theory there are also famous basic examples of ‘impossible constructions’. The pictures do not allow the global spatial interpretation because of collision of local spatial interpretations to each other. In the same way, in many mathematical ‘impossible constructions’ small parts are possible.

E.g., one cannot construct 3 houses and 3 wells in the plane and join each house to each well by a path so that paths intersect only at their starting points or endpoints.³ In this note we present a natural interesting generalization: examples of *two-dimensional* analogues of graphs nonrealizable in four-dimensional space.⁴

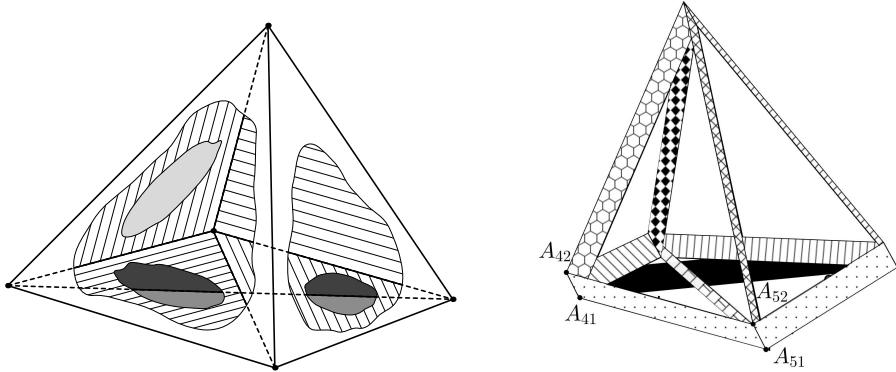


Рис. 1: Left: Realization in \mathbb{R}^3 of the complete two-homogeneous hypergraph on 5 vertices. Right: Realization in \mathbb{R}^3 of the *product* of the complete graphs on 5 and on 2 vertices.

Such analogues are (*two-homogeneous*) *hypergraphs* or (*dimensionally homogeneous two-dimensional*) *simplicial complexes*, i.e., collections of three-element subsets of a finite set. For instance, a *complete two-homogeneous hypergraph* on k vertices is the collection of all three-element subsets of a k -element set. *Realizability* of a hypergraph in n -dimensional Euclidean space \mathbb{R}^n is defined similarly to the realizability of a graph in the plane (one ‘draws’ a triangle for each three-element subset; see Figures 1 and 2). Rigorous definition of the realizability is given in §1.9, §1.10. Hypergraphs and simplicial complexes play an important role in mathematics. One cannot imagine topology and combinatorics without them. They are also used in computer science and bioinformatics [PS11].

³In graph-theoretic terms this means that the complete bipartite graph $K_{3,3}$ is not planar.

⁴This text is based on the author’s 2013-2015 lectures at Moscow Institute of Physics and Technology, the Independent University of Moscow, summer school ‘Modern Mathematics’, Summer Conference of Tournament of Towns, Kirov region summer school, Moscow ‘olympic’ school, circle ‘Olympiades and Mathematics’ (MCCME). I am grateful to M. Skopenkov for joint writing an earlier version of this text, to A. Zimin for his notes on Example 1.9.ab, to O. Viro for critical but encouraging remarks, and to G. Chelnokov, A. Matushkin, A. Rukhovich, A. Shapovalov, M. Skopenkov, A. Sossinsky, A. Zimin, J. Zung for useful discussions.

We state beautiful and nontrivial examples of the nonrealizability of hypergraphs in terms of certain systems of points, see §1.2. So we do not use the notion of hypergraph and its realizability neither for the statements nor for the proofs. However, these notions help to understand the motivation of the results. So we mention hypergraphs in this section and give precise statements involving hypergraphs in §1.9, §1.10.

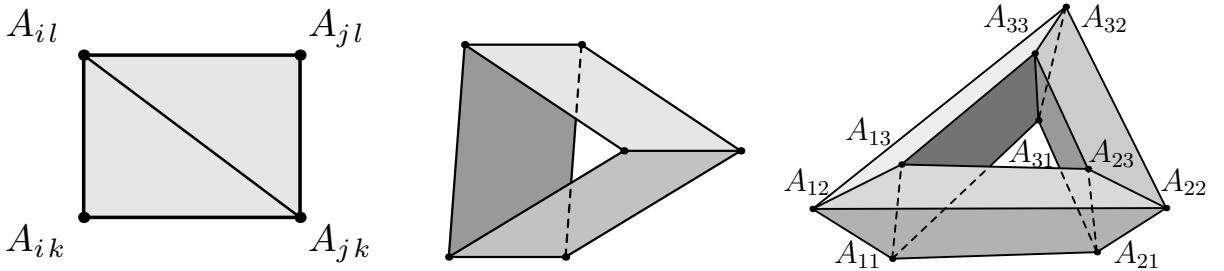


Рис. 2: Left: Realization in \mathbb{R}^2 of the *square* of the complete graph on 2 vertices.
Middle: Realization in \mathbb{R}^3 of the *product* of the complete graphs on 2 and on 3 vertices.
Right: Realization in \mathbb{R}^3 of the *square* of the complete graph on 3 vertices.

It is easy to construct a hypergraph nonrealizable in \mathbb{R}^3 (see Problem 1.17). Already in the early history of topology (1920s) mathematicians tried to find hypergraphs nonrealizable in \mathbb{R}^4 . E.g. the complete two-homogeneous hypergraph on 7 vertices is not realizable in \mathbb{R}^4 , cf. Theorem 1.4 below. This celebrated result was proved by van Kampen and Flores in 1932-34 [vK32, Fl34], cf. [Fo04]. It is both an early application of *combinatorial topology* (nowadays called algebraic topology) and one of the first results of *topological combinatorics* (also an area of ongoing active research).

For each two figures F, G in the plane their (*Cartesian*) *product* $F \times G$ is the set of points $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ such that $(x, y) \in F$ and $(z, t) \in G$. A combinatorial version of this notion is *product* of two graphs (no necessarily planar) which is a hypergraph; see Figure 2 (a formal definition is given in §1.9). Karl Menger conjectured in 1929 that the square of a nonplanar graph is nonrealizable in \mathbb{R}^4 [Me29]. This conjecture was proved only in 1978 by Brian Ummel [Um78], cf. Theorem 1.8 below.⁵

A ‘small shift’ (or ‘general position’) argument shows that each graph is realizable in \mathbb{R}^3 . A straightforward generalization shows that each hypergraph is realizable in \mathbb{R}^5 .

A striking idea is that the nonrealizability of hypergraphs in \mathbb{R}^4 can be reduced to three-dimensional results due to John Conway, Cameron Gordon and Horst Sachs. A simplified version of one of them states that *for any 6 general position points in 3-space there are two linked triangles with the vertices at these points*. See Theorems 1.3 and 1.21 below. Before reducing the 4-dimensional results to the 3-dimensional results, we reduce the 3-dimensional results to certain 2-dimensional results, and the 2-dimensional results to certain 1-dimensional result. Because of such ‘lowering of dimension’ a reader not familiar with 4-dimensional space needs not be scared. For such reductions we prove Parity Lemmas, which allow to exhibit some basic ideas of homology theory in a very simple situation.

This sequence of reductions allows us to discover that the nonrealizability results and the linking results turn out to be links of a chain, see Theorem 1.5 below. So the nonrealizability

⁵There is a short formula for the minimal number d such that given product of several graphs embeds into \mathbb{R}^d , see end of §1.9 and [Sk03]. This formula (generalizing the Menger Conjecture) was announced in a 1992 preprint of Marek Galecki. However, after an extensive search Robert J. Daverman kindly informed Peter Akhmetiev, Dušan Repovš and the author that there is no longer any copy of Galecki’s dissertation (presumably containing a proof) available at the University of Tennessee. A proof was published in 2003 by Mikhail Skopenkov [Sk03]; it used ‘lowering of the dimension’ approach, see below, which is much simpler than Ummel’s argument.

results may be called ‘Ramsey intersection theory’, just as the Conway–Gordon–Sachs Theorem is departure point of *Ramsey linking theory*, cf. [Sa81, CG83, PS05].

Of course this ‘lowering of dimension’ idea is well-known for specialists. However, such proofs seems not to be published before [Sk03] for the Menger Conjecture and [R13, Z13], [S?] for the van Kampen–Flores and the Conway–Gordon–Sachs Theorems.

We present elementary proofs of the *linear* versions of the above classical results, cf. [BM]. These proofs are easily generalized to *piecewise-linear* (PL) versions. PL versions imply the original *topological* versions (because actually stronger PL results are proved). The PL van Kampen–Flores Theorem has an alternative elementary proof using *the van Kampen invariant*, see §2.1, [Z13, Proof of Lemma 2] and [SZ]; that proof illustrates the idea of *the van Kampen embedding obstruction*. The topological van Kampen–Flores theorem has an alternative simple proof using the Borsuk–Ulam Theorem [Pr04, §10.3]. However, analogous proofs of the Menger conjecture are not known, so the proof we present is the simplest known proof. Linear, piecewise-linear and topological realizations are defined and discussed in §1.9, §1.10.

1.2 Formal statements of main results

Of the results stated here the Intersection Property 1.1, the Linking Property 1.3, the Intersection Property 1.4, the Product Theorem 1.6, Proposition 1.7 and the Square Theorem 1.8 are proved in sections 1.2, 1.4, 1.6, 1.5, 1.5 and 1.7, respectively. In those sections we present interesting related results not directly required for proofs of main results. Results that are numbered but not named could be considered as remarks or exercises; hints are collected at the end.

We use the following conventions. We abbreviate ‘ n -dimensional space \mathbb{R}^n ’ to ‘ n -space’. We mostly work with $n \leq 3$, and a reader can ignore the case $n > 4$. By k *points* in \mathbb{R}^n we mean a k -element subset of \mathbb{R}^n ; so these k points are assumed to be pairwise distinct.

A subset of the plane is *in general position*, if no 3 points of the subset belong to a line.⁶

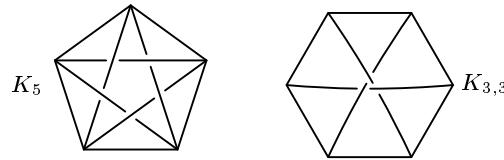


Рис. 3: Nonplanar graphs K_5 and $K_{3,3}$

Утверждение 1.1 (Intersection Property). *From any 5 points in the plane one can choose two disjoint pairs such that the segments with the vertices at these pairs intersect.*⁷

*Moreover, if the 5 points are in general position, then the number of intersection points of interiors of segments joining the points is odd.*⁸

This property is easily proved by analyzing the convex hull of the 5 points.⁹ We present in §1.3 another proof based on reduction to the following obvious 1-dimensional result:

⁶Our definitions of general position are different from what is usually accepted in geometric problems, but are sufficient for our purposes.

⁷Of course this is a ‘linear’ version of the nonplanarity of the complete graph K_5 on 5 vertices, see Fig. 3, left, and §1.8.

⁸The first sentence is implied by the ‘moreover’ part because by a small shift one can put the points in general position without adding intersection points of segments with disjoint vertices.

⁹A subset of the plane or of \mathbb{R}^n is called *convex*, if for any two points from this subset the segment joining these two points is in this subset. The *convex hull* of a subset X of the plane or \mathbb{R}^n is the minimal convex set that contains X .

each 4 points in a line can be colored in red and blue so that their colors alternate along the line: red-blue-red-blue or vice versa.

A subset of 3-space is *in general position*, if no 4 points of the subset belong to one plane.

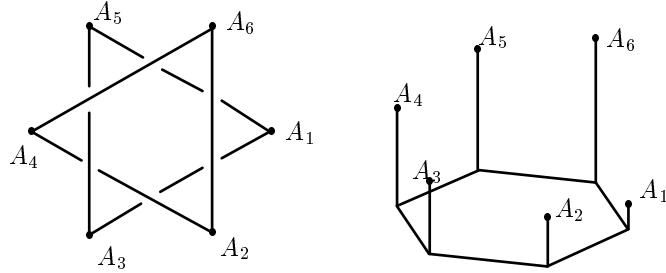


Рис. 4: A set of points in general position

E.g. in general position are

- the set of points in Figure 4. (Consider a regular hexagon in a horizontal plane. Points $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ lie exactly above the vertices of the hexagon at the heights 1, 2, 3, 4, 5, 6, respectively.)
- the set of points with *Cartesian coordinates* $(t; t^2; t^3)$, where $t \in (0, 1)$.

By a *triangle* we mean the convex hull of three points. So triangles are usually 2-dimensional (not always because we allow triangles to degenerate).

Two triangles in 3-space whose six vertices are in general position are called *linked*, if the outline of the first triangle intersects the second triangle exactly at one point.

E.g. the triangles $A_1A_3A_5$ and $A_2A_4A_6$ in Figure 4 are linked.

The property of being linked is not symmetric a priori.

Лемма 1.2 (Symmetry). *Triangles Δ and Δ' in 3-space are linked if and only if Δ' and Δ are linked.*

The proof is easy. (Hint: analogously to the Parity Lemma 1.11.a below consider $\Delta \cap \Delta'$.)

Теорема 1.3 (The Linear Conway–Gordon–Sachs Theorem; Linking Property). *For any 6 general position points in 3-space there are two linked triangles with the vertices at these points.*

Moreover, the number of linked unordered pairs of triangles with vertices at these points is odd.

A set of points in 4-space is in *general position*, if no 5 points from the set are in one 3-dimensional hyperplane. E.g., points (t, t^2, t^3, t^4) , $t \in (0, 1)$, are in general position.

Теорема 1.4 (The Linear Van Kampen–Flores Theorem; Intersection Property). *From any 7 points in 4-space one can choose two disjoint triples such that the triangles with the vertices at the triples intersect each other.*

*Moreover, if the 7 points are in general position, then the number of intersection points of interiors of triangles with the vertices at these points is odd.*¹⁰

An analogue of Theorem 1.4

- is true for 5 points in the plane or 6 points in 3-space (see Intersection Properties 1.1 and 1.18.a below);

¹⁰The first sentence is implied by the ‘moreover’ part because by a small shift one can put the points in general position without adding intersection points of triangles with disjoint vertices.

- is false for 4 points in the plane, 5 points in 3-space or 6 points in 4-space (in \mathbb{R}^n take the $n+1$ vertices and an interior point of an n -simplex, see Figure 1, left).

The ‘lowering of dimension’ proofs of the above results suggest that they could be generalized to arbitrary dimensions. We present the generalization without defining higher-dimensional general position and linking.

Теорема 1.5 (Intersection and Linking). *Take any $n+3$ general position points in \mathbb{R}^n .*

If n is even, then the number of intersection points of interiors of $n/2$ -simplexes with the vertices at these points is odd.

If n is odd, then the number of linked unordered pairs of $(n+1)/2$ -simplexes with the vertices at these points is odd.

This is proved by the induction on n . The base case $n = 1$ is trivial. The inductive step is proved below for $n = 2, 3, 4$, and the proof for the general case is analogous.

There are also intersection property for n even and linking property for n odd, and other interesting (although less striking) related results, see §§1.3, 1.4, 1.6.

Realizability of products

An (m, n) -product is a collection of mn points $A_{j,p}$, where $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, in 3- or 4-space, together with the collection of triangles

$$A_{jp}A_{kq}A_{jq} \quad \text{and} \quad A_{jp}A_{kq}A_{kp}, \quad \text{where} \quad 1 \leq j < k \leq m, \quad 1 \leq p < q \leq n.$$

The union of triangles of (m, n) -product is a singular polyhedral

- disk, if $m = n = 2$ (Fig. 2, left);
- lateral surface of a cylinder, if $m = 3$ and $n = 2$ (Fig. 2, middle);
- torus, if $m = n = 3$ (Fig. 2, right).

A typical example is the Cartesian product of m points in the plane and n points in the line (or in the plane).

Теорема 1.6 (Product Theorem). *Any $(5, 3)$ -product in 3-space has two triangles which have disjoint vertices but intersect.*

Утверждение 1.7. *Any $(4, 4)$ -product in 3-space has two triangles which have disjoint vertices but intersect.*

Теорема 1.8 (Square Theorem). *Any $(5, 5)$ -product in 4-space has two triangles which have disjoint vertices but intersect.*

Пример 1.9. *The analogues of Theorems 1.6 and 1.8 are false for*

(a) $(2, n)$ -products in 3-space for each n (for $n \leq 4$ this is obvious; for $n = 5$ see Figure 1, right: the vertices of the parallelograms are the required 10 points; for $n \geq 6$ the construction is analogous, see §1.5; cf. [RSS95, Theorem 1.5]);

(b) $(3, n)$ -products in 3-space for each $n \leq 4$ (for $n \leq 3$ this is obvious, see Figure 2, right; for $n = 4$ the construction is analogous, see §1.5);

(c) $(4, n)$ -products in 4-space for each n (see §1.7).

1.3 Linking and intersection in the plane

Proof of the Intersection Property 1.1. For non-general-position points the property is obvious. Indeed, if points A, B, C among given 5 points belong to one line, B between A and C , and D is any other given point, then segments AC and BD intersect.

So assume that the given 5 points are in general position. We may assume that O is the unique point among given ones whose first coordinate a is maximal. Consider a line $x = b$,

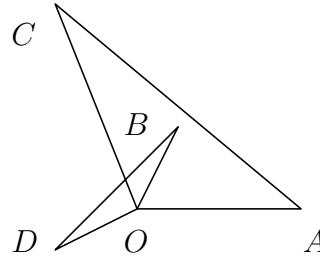


Рис. 5: To the proof of the Intersection Property 1.1; move D above.

where b is slightly smaller than a . Denote A, B, C, D the other given 5 points so that they are in the order A, B, C, D , if we look at them from the point O (see Figure 5). By the following Parity Lemma 1.10 some two sides of the triangles OAC and OBD have disjoint vertices but intersect.

The ‘moreover’ part follows by a simple additional counting. QED

Лемма 1.10 (Parity Lemma). *Assume that the outlines of two triangles in the plane intersect at a unique point, and a line sufficiently close to this point intersects the outlines by four distinct points. Then the points X, Y corresponding to one triangle are unlinked with the points Z, T corresponding to the other triangle, i.e. the segment XY contains either both or none of the points Z, T .*

This lemma is obvious. However, for the sake of non-obvious higher-dimensional generalizations we deduce it accurately from the following result. Cf. [BE82, §1]. Two broken lines in the plane are *in general position*, if

- each side of one of them and each side of the other either are disjoint or intersect at their common interior point;
- each two sides of one of them and each side of the other have no common point.

Denote by ∂T the outline of a triangle T .

Лемма 1.11 (Parity Lemma). (a) *If the outlines of two triangles in the plane are in general position, then the outlines intersect each other at an even number of points.*

(b) *If the outline of a triangle and a closed broken line in the plane are in general position, then they intersect each other at an even number of points.*

(c) *Any two general position closed broken lines in the plane intersect each other at an even number of points. (This is already non-trivial because broken lines may have self-intersections.)*¹¹

Proof. Part (a) follows because the intersection of the first triangle and the outline of the second triangle is a finite union of broken lines (non-degenerate to points). The outlines of the triangles intersect at the endpoints of the broken lines. The number of endpoints is even.

Part (b) can be proved analogously to (a). We present a different proof which generalizes to a proof of (c). The proof is by reduction to (a), using *singular cone* idea which formalizes in a short way the *motion-to-infinity* idea. Denote by b the outline of the triangle. Take a point A *in general position* to b and the broken line a , i.e. such that $A \notin b$ and no segment joining A to a vertex of a contains a vertex of the triangle. Then

$$|a \cap b| = \sum_{MN} |MN \cap b| \equiv \sum_{MN} |\partial(AMN) \cap b| \equiv 0.$$

¹¹Выводить эти леммы из теоремы Жордана или формулы Эйлера неразумно, ибо доказательство формулы Эйлера использует теорему Жордана, а теоремы Жордана — аналогичную лемму о четности.

Here the summation is over edges MN of a , and the last congruence follows by (a).

Part (c) is reduced to (b) analogously, just replace b by the second broken line. QED

Proof of the Parity Lemma 1.10. Denote the point by O and the triangles by $OX'Y'$ and $OZ'T'$ (so that X, Y, Z, T are the intersection points of the line and OX', OY', OZ', OT' , respectively). Let $a := \partial(OX'Y')$ and $b := \partial(OZ'T')$. The Lemma follows because

$$|XY \cap \{Z, T\}| = |XY \cap b| = |\partial(OXY) \cap b| - 1 \equiv |a \cap b| + |\partial(XYY'X') \cap b| - 1 \equiv 0.$$

Here the last congruence holds because $|a \cap b| = 1$ and by the Parity Lemma 1.11.b. QED

Утверждение 1.12 (Unlinking Property). (a) *There are 5 general position points in the plane such that each segment joining two of these points intersects the outline of the triangle formed by the remaining points at an even number of points.*

(b) *For each 5 general position points in the plane the number of those segments joining 2 of these points that intersect the outline of the triangle formed by the remaining 3 points is even.*

The proof is easy and is left to a reader.

The following results are proved analogously to the Intersection Property 1.1 and Parity Lemma 1.11.

1.13. (Cf. figure 3, right.)

(a) Two triples of points are given in the plane. Then there exist two intersecting segments without common vertices and such that each segment joins the points from distinct triples.

(b) Assume that there are six points in general position in the plane. Split them into two triples $f_1 = \{1, 2, 3\}$ and $f_2 = \{4, 5, 6\}$. Clearly, for each two points $i, j \in f_1$ and two points $i', j' \in f_2$, the segments ii' and jj' either do not intersect or have only one intersection point. Prove that the number of intersection points (in the plane) of such segments is odd.

Утверждение 1.14. *Suppose that there are 4 red and 2 blue points in general position in the plane. Suppose further that any two segments joining points of different colors can only intersect at their common vertex. Then there are two red points R_1, R_2 such that the segment joining the remaining two red points intersects broken line $R_1B_1R_2B_2$, where B_1 and B_2 are blue points, at an odd number of points. (If the broken line does not have self-intersections, this is equivalent to the remaining 2 red points lying on different sides of the broken line.)*

1.15. На плоскости имеется 14 точек: 7 красных и 7 желтых. Точки общего положения, т.е. никакие три не лежат на прямой и никакие три отрезка, их соединяющие, не имеют общей внутренней точки.

(a) Может ли количество точек пересечения красных отрезков (т.е. отрезков, соединяющих красные точки) и желтых отрезков быть равным 7?

(b) По красным отрезкам течет ток. Сумма токов, входящих в любую красную точку, равна сумме токов, из нее выходящих. По желтым отрезкам течет ток с выполнением того же правила Кирхгофа. В каждой точке пересечения ориентированных (направлением токов) красного и желтого отрезков поставим произведение ‘красного’ и ‘желтого’ токов, если желтый ориентированный отрезок получается из красного вращением против часовой стрелки, и минус это произведение в противном случае. Могли ли так располагаться точки и течь токи, что сумма поставленных чисел (т.е. *поток красного тока через желтый*) равна $42A^2$?

1.16. (a) A 2-cycle is defined in §1.5. Does the plane have a 2-cycle and a point not belonging to any edge of the triangle from the 2-cycle but belonging to exactly 7 triangles of the 2-cycle?

(b) Same question for the plane replaced by the sphere.

1.4 Linking and intersection in three-dimensional space

1.17. From any 6 points in 3-space one can choose 5 points O, A, B, C, D such that the triangles OAB and OCD have a common point other than O .

Sketch of a proof. Without loss of generality we may assume that there is a unique ‘highest’ point O among the given ones. Consider a ‘horizontal’ plane slightly below the point O . Consider the intersection of this plane with the union of triangles OAB for all pairs A, B of given points. Now the assertion follows by the Intersection Property 1.1. QED

Figure 4, right, shows that for 5 points an analogous assertion is not true.

The following improvement of Problem 1.17 is a spatial analogue of the Intersection Property 1.1 (without the ‘moreover’ part).

Утверждение 1.18 (Intersection Property). *From any 6 points in 3-space one can choose disjoint pair and triple such that the segment joining points of the pair intersects the triangle spanned by the triple.*

This result easily follows from Problem 1.17 (and from Theorem 1.3).

The spatial analogue of the ‘moreover’ part of the Intersection Property 1.1 fails (by the Unlinking Property 1.19.b below). So under the transition from dimension 2 to dimension 3 the existence of the intersection is preserved, while the parity of the number of intersections change.

In 3-space instead of the Unlinking Property 1.12.b there are the Linking Property (Theorem 1.3) and the following Unlinking Property.

Утверждение 1.19 (Unlinking Property). (a) *There are 6 general position points in 3-space such that each segment joining 2 of these points intersects the surface of the tetrahedron formed by the 4 remaining points.*

(b) *For each 6 general position points in 3-space the number of those segments joining 2 of these points that intersect the surface of the tetrahedron formed by the remaining 4 points is even.*

Cf. the Unlinking Property 1.12 and Theorem 1.3.

The proof is easy and is left to a reader (use the Symmetry Lemma 1.2).

Theorem 1.3 is reduced to the Intersection Property 1.1 using the following Projection Lemma 1.20. In 3-space a segment a is *higher* than a segment b looking from point O , if there exists a half-line OX with the endpoint O that intersects the segment a at a point $A := a \cap OX$, the segment b at a point $B := b \cap OX$, $A \neq B$, so that A is in the segment OB . Cf. Fig. 4, left.

Лемма 1.20 (The Projection Lemma). *Assume that A_1, A_2, \dots, A_6 are general position points in 3-space. The triangles $A_1A_2A_3$ and $A_4A_5A_6$ are linked if and only A_2A_3 passes below (looking from A_1) exactly one side of the ‘complementary’ triangle $A_4A_5A_6$.*

Proof. Since the points A_1, \dots, A_6 are in general position, the number of those sides of the triangle $A_4A_5A_6$ that are higher than A_2A_3 equals to the number of intersection points of the outline of the triangle $A_4A_5A_6$ with the triangle $A_1A_2A_3$. This implies the lemma. QED

Proof of the Linear Conway–Gordon–Sachs Theorem 1.3. We may assume that O is the unique point among given ones whose first coordinate a is maximal. Consider a plane $x = b$, where b is slightly smaller than a . Denote by A'_1, \dots, A'_5 the intersection points of this plane and segments joining O to other given points. Since a segment cannot intersect a triangle by

more than 2 points, in the Projection Lemma 1.20 ‘exactly one side’ can be replaced by ‘an odd number of sides’. Hence the following numbers are equal:

- the number of linked unordered pairs of triangles formed by given points;
- the number of segments that pass below an odd number of sides of the ‘complementary’ triangles;
- the number of ordered pairs of segments of which the first passes below the second;
- the number of intersection points of segments whose vertices are A'_1, \dots, A'_5 .

By the Intersection Property 1.1 the latter number is odd. QED

The following version of Theorem 1.3 is reduced to Proposition 1.14.

Two closed quadrangular broken lines $ABCD$ and $A'B'C'D'$ in 3-space such that their 8 vertices are in general position are called *linked*, if the number of intersection points of the broken line $ABCD$ with the union of the triangles $A'B'C'$ and $A'D'C'$ is odd.

Teopema 1.21 (The Linear Sachs Theorem). *[Sa81] Suppose that there are 4 red points and 4 blue points in 3-space such that any two line segments with the endpoints of different colors have no common interior points. Then there are two linked closed quadrangular broken lines with the vertices at these points consisting of edges with the endpoints of different colors.*

The following problems 1.22 and 1.23 clarify the notion of linking.

1.22. (a) Two points and a triangle in the plane are *linked* if one of the points lies in the interior of the triangle, and the other — in the exterior.

Two triangles in 3-space are linked if and only if the plane of the second triangle intersects the outline of the first triangle by two points linked with the second triangle.

(b) Two red points and two blue points are marked on a line, the 4 points being pairwise distinct. The two pairs of points are *linked* if they alternate: red-blue-red-blue or vice versa.

Two triangles in 3-space are linked if and only if the common line of the planes of the triangles intersects outline of each of them at two points and these pairs of points are linked.

1.23. (a) Let A, B, C, X, Y, Z, Z' be 7 general position points in 3-space. If the outline of the triangle ABC intersects the union of triangles XZZ' and YZZ' at an even number of points, then the pairs ABC, XYZ and $ABC, X'YZ$ are either both linked or both unlinked. If the outline of the triangle ABC intersects the union of triangles XZZ' and YZZ' at an odd number of points, then exactly one of the pairs ABC, XYZ and $ABC, X'YZ$ is linked.

(b) If the vertices of two triangles in 3-space move continuously remaining in general position, then the triangles remain linked or unlinked. I.e. for each two triangles whose vertices are in general position there is $\delta > 0$ such that if we shift the vertices by δ , then the new vertices will be in general position and the new triangles are linked if and only if the old triangles are linked.

(c) For what positions of the point A_1 on the vertical line are the triangles $A_1A_3A_5$ and $A_2A_4A_6$ from Figure 4 are linked?

For Problem 1.23.a we need the Parity Lemma 1.25.a of the following subsection.

1.5 (m, n) -realizations in three-dimensional space

Given points A_{jp} , denote by $jk \times pq$ the quadrilateral $A_{jp}A_{kp}A_{kq}A_{jq}$.

Proof of Example 1.9.a. Let $(0, 0, 0), V, A_{11}, \dots, A_{1n}$ be general position points in \mathbb{R}^3 . For each $p \in \{1, \dots, n\}$ denote $A_{2p} := V + A_{1p}$. If V is close enough to $(0, 0, 0)$, then points A_{jp} , $j \in \{1, 2\}$, $p \in \{1, \dots, n\}$, are as required.

Indeed, $12 \times pq$ is a parallelogram for each $p \neq q$. By general position, for any distinct p, q, r, s the segments $A_{1p}A_{1q}$ and $A_{1r}A_{1s}$ are disjoint. Since V is close enough to $(0, 0, 0)$, the

same holds for 1 replaced by 2. Then any two parallelograms $12 \times pq$ and $12 \times rs$ without common sides are disjoint. Therefore points A_{jp} are as required. QED

Proof of Example 1.9.b. Let $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be the rotation through $\frac{2\pi}{3}$ w.r.t. x -axis. Let

$$(A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}) = ((1, 0, 1), (-1, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 0, 3)).$$

Let $A_{2p} = f(A_{1p})$ and $A_{3p} = f(f(A_{1p}))$ for each $p \in \{1, 2, 3, 4\}$. Cf. Figure 2, right. Then points A_{jp} , $j \in \{1, 2, 3\}$, $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, are as required.

Indeed, $jk \times pq$ is a rectangle for each $j \neq k, p \neq q$. Since every two segments joining points A_{1p} either are disjoint or intersect at a common vertex, such rectangles without common side are disjoint. Therefore points A_{jp} are as required. QED

Proof of Proposition 1.7. The proof is analogous to Problem 1.17 and Proposition 1.18. Assume to the contrary that no two triangles with disjoint vertices intersect. By a small shift one can put the points in general position without adding intersection points of such triangles. Take a small sphere centered at the point A_{14} . The intersection of the sphere with the union of the triangles of the $(4, 4)$ -realization is the graph $K_{3,3}$. Then by Problem 1.13.a there are $2 \leq j < k \leq 4$ and $1 \leq p < q \leq 3$ such that the triangles $A_{14}A_{1p}A_{j4}$ and $A_{14}A_{1q}A_{k4}$ have a common point other than A_{14} . Hence by general position, without loss of generality, segment $A_{1p}A_{j4}$ intersect triangle $A_{14}A_{1q}A_{k4}$. So the triangles $A_{jp}A_{1p}A_{j4}$ and $A_{14}A_{1q}A_{k4}$ have disjoint vertices but intersect. A contradiction. QED

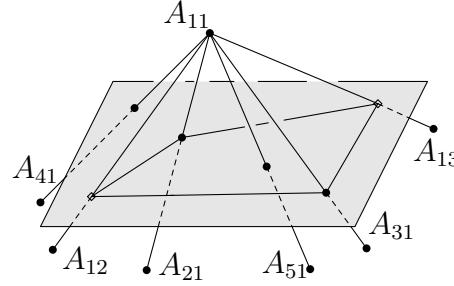


Рис. 6: To the proof of the Product Theorem 1.6

Proof of the Product Theorem 1.6. Assume to the contrary that no two triangles with disjoint vertices intersect. By a small shift one can put the points in general position without adding intersection points of such triangles. So assume that the given 15 points A_{jk} are in general position. We may also assume that A_{11} is the unique point among them whose first coordinate a is maximal. Consider a plane $x = b$, where b is slightly smaller than a . For each $j = 2, 3, 4, 5$ color in red the intersection point of the hyperplane with the segment $A_{11}A_{j1}$ (see Figure 6). For each $k = 2, 3$ color in blue the intersection point of the hyperplane with the segment $A_{11}A_{1k}$. Clearly, the 6 colored points in the plane are in general position. Since the set of triangles is embedded, any two segments joining points of different colors can only intersect at their common vertex. Hence by Proposition 1.14 there are 2 red points R_1, R_2 such that the segment joining the remaining two red points R_3, R_4 intersects broken line $R_1B_1R_2B_2$, where B_1 and B_2 are blue points, at an odd number of points. Without loss of generality, R_1, B_1, R_2, B_2 belong to the segments joining A_{11} to $A_{21}, A_{12}, A_{31}, A_{13}$, respectively, and R_3, R_4 belong to the segments joining A_{11} to A_{41}, A_{51} , respectively.

Then the points R_3 and R_4 are intersection points of the plane and the triangle $A_{11}A_{41}A_{51}$. The broken line $R_1B_1R_2B_2$ is the intersection of the plane and the torus ‘formed’ by A_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$. Since the points are in general position, A_{11} is the unique intersection point of the triangle and the torus. This contradicts the following Parity Lemma 1.24. QED

A *2-cycle* is a collection of (different) triangles such that each segment is the side of an even number (possibly, zero) of triangles from the collection. *The vertices* of a 2-cycle are the vertices of its triangles. *The body* of a 2-cycle is the union of its triangles.

An example of a 2-cycle is the surface of a tetrahedron (possibly, degenerate).

A broken line and a 2-cycle in 3-space are in *general position*, if

- each side of the broken line and each triangle of the 2-cycle either are disjoint or intersect at their common interior point;
- each two triangles (or sides) of one of them and each side (or triangle) of the other have no common point.

Лемма 1.24 (Parity Lemma). *Assume that a broken line and the body of a 2-cycle in 3-space intersect at a unique point, which is their common vertex, and a plane sufficiently close to this point intersects the broken line and the 2-cycle by two points and by a broken line, respectively. Then the two points intersect the broken line by an even number of points.*

This is deduced from the Parity Lemma 1.25.c analogously to the Parity Lemma 1.10.

Лемма 1.25 (Parity Lemma). (a) *If the outline of a triangle and the surface of a tetrahedron in 3-space are in general position, then they intersect at an even number of points.*

(b) *If a broken line and the surface of a tetrahedron in 3-space are in general position, then they intersect at an even number of points.*

(c) *If a broken line and a 2-cycle in 3-space are in general position, then the broken line intersects the body of the 2-cycle at an even number of points.*

Proof. The proof is analogous to the Parity Lemma 1.11.

Part (a) follows because the intersection of the triangle and the surface of the tetrahedron is a finite union of broken lines. It has an even number of endpoints corresponding to the required intersection points.

(Alternatively, observe that the plane of the triangle intersects the surface of the tetrahedron by a union of closed broken lines, and use the Parity Lemma 1.11.b.)

Part (b) is reduced to (a) as in the Parity Lemma 1.11, where b is the surface of the tetrahedron and point A is *in general position* to b and the broken line a (define!).

Part (c) is reduced to (b) analogously, just replace b by the 2-cycle and modify definition of a general position. QED

1.26. Эта задача предлагалась 1.04.2015 на ФОПФ МФТИ в курсе ‘Современные топологические методы в физике’.

В трехмерном пространстве имеется 17 точек: 7 красных и 10 желтых. Точки общего положения, т.е. никакие четыре не лежат в одной плоскости и никакой красный отрезок (т.е. отрезок, соединяющий красные точки) не пересекает прямой пересечения плоскостей желтых треугольников (т.е. треугольников, натянутых на желтые точки).

(a) Может ли количество точек пересечения красных отрезков и желтых треугольников быть равным 7?

(b) После решения пункта (a) Илья Муромец подошел к точкам поближе.

Он увидел, что по красным отрезкам течет ток. Чу! Сколько в красную точку миллиампер входит, столько из нее и выходит.

А по ориентированным желтым треугольникам свистит *свист*. Т.е. на каждом ориентированном желтом треугольнике стоит соловьёметр, измеряющий свист в Соловьях ($1C=1A^2$). Чу! Сколько в ориентированный желтый отрезок микросоловьев входит, столько из него и выходит. (Ориентированный треугольник ABC *входит* в ориентированный отрезок AB и *выходит* из ориентированного отрезка BA .)

В каждой точке пересечения красного отрезка и желтого треугольника стоит гривнometр. По закону Владимира-Красное-Солнышко показание гривнometра равно произведению показаний соответствующих амперметра и соловьёметра, если направление красного тока и ориентация желтого треугольника согласованы по правилу *левой руки (буравчика)*, и минус этому произведению, если не согласованы. (Таким образом, $1 \text{ Грн} = 1 \text{ С} \times 1 \text{ А} = 1 \text{ А}^3$.)

За понимание условия пункта (b) князь одарил Илью величиной *потока тока через свист*, т.е., суммой показаний гривнometров. Могли ли так расположаться точки, течь ток по красным отрезкам и свистеть свист по желтым треугольникам, что Илье хватило на новую стрелу?

Примечание. Стрела стоит Илье 42 наногривны, если летит от него, и -42 наногривны, если летит в него.

1.6 Linking and intersection in four-dimensional space

Утверждение 1.27 (Unlinking Property). (a) *There are 7 general position points in 4-space such that each triangle formed by three of these points intersects the surface of the tetrahedron formed by the remaining points at an even number of points.*

(b) *Assume that 7 general position points in 4-space are given. For each triangle formed by three of these points count the number of intersection points of this triangle and the surface of the tetrahedron formed by the remaining points. Then the sum of these numbers is even.*

Cf. the Unlinking Properties 1.12, 1.19, and Theorem 1.3.

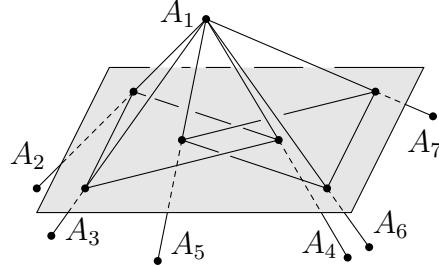


Рис. 7: To the proof of Theorem 1.4. A hyperplane in \mathbb{R}^4 (shown as a plane in \mathbb{R}^3) intersects the segments $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_7$ by 6 points which are vertices of two linked triangles.

The following informal comment to the proof of Theorem 1.4 was suggested by O. Viro. The reason why certain 2-dimensional polyhedra are not embeddable to the 4-space is that they contain many 2-cycles organized in such a way that one can find a pair of disjoint 2-cycles which must have odd intersection under the embedding. This is impossible, because in the 4-space the homology group (and hence the intersection form) is trivial.

Proof of Theorem 1.4. Assume to the contrary that no two triangles with disjoint vertices intersect. As in the proof of the Product Theorem 1.6, we may assume that the given 7 points A_1, A_2, \dots, A_7 are in general position and that A_1 is the unique point among them whose first coordinate a is maximal. Consider a 3-dimensional hyperplane $x = b$, where b is slightly smaller than a . Take the 6 intersection points of the hyperplane with the segments $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_7$; see Figure 7. Clearly, the obtained 6 points are in general position in the hyperplane. Hence by the Linear Conway–Gordon–Sachs Theorem 1.3 there are two linked outlines of triangles with the vertices at these points. Without loss of generality, the vertices of the first triangle belong to the segments joining A_1 to A_2, A_3, A_4 , and the vertices of the second triangle belong to the segments joining A_1 to A_5, A_6, A_7 .

The above outlines of triangles are the intersections of surfaces of tetrahedra $A_1A_2A_3A_4$ and $A_1A_5A_6A_7$ with the hyperplane. Since the given 7 points are in general position, any two triangles having one common vertex intersect only at the vertex. Since no two triangles with disjoint vertices intersect, this implies that A_1 is the unique intersection point of the surfaces of the tetrahedra $A_1A_2A_3A_4$ and $A_1A_5A_6A_7$. This contradicts the following Parity Lemma 1.28.

The ‘moreover’ part follows by a simple additional counting using the ‘moreover’ part of Theorem 1.3. QED

Лемма 1.28 (Parity Lemma). *Assume that the surfaces of two tetrahedra in \mathbb{R}^4 intersect at a unique point, and a hyperplane sufficiently close to this point intersects the surfaces by outlines of two triangles whose vertices are in general position. Then the triangles are not linked in the hyperplane.*

This lemma (and the Parity Lemma 1.29 below) is not as obvious as its low-dimensional analogues because *the surface of a tetrahedron does not split \mathbb{R}^4* . However, this lemma is deduced from the following Parity Lemma 1.29.b analogously to the Parity Lemmas 1.10 and 1.24 (more formal exposition is given in [Z]).

Two 2-cycles in \mathbb{R}^4 are in *general position*, if

- each triangle of the one of them and each triangle of the other either are disjoint or intersect at their common interior point;
- each two triangles of one of them and each triangle of the other have no common point.

Лемма 1.29 (Parity Lemma). (a) *If the surfaces of two tetrahedra in \mathbb{R}^4 are in general position, then they intersect at an even number of points.*

(b) *If the surface of a tetrahedron and a 2-cycle in \mathbb{R}^4 are in general position, then the surface intersects the body of a 2-cycle at an even number of points.*

(c) *If two 2-cycles in \mathbb{R}^4 are in general position, then their bodies intersect at an even number of points.*

The proof is analogous to the Parity Lemmas 1.11 and 1.25.

Утверждение 1.30. *Three triples of points in four-dimensional space are given. Then there exist two intersecting triangles without common vertices such that the vertices of each triangle belong to distinct triples.*

1.7 (m, n) -realizations in four-dimensional space

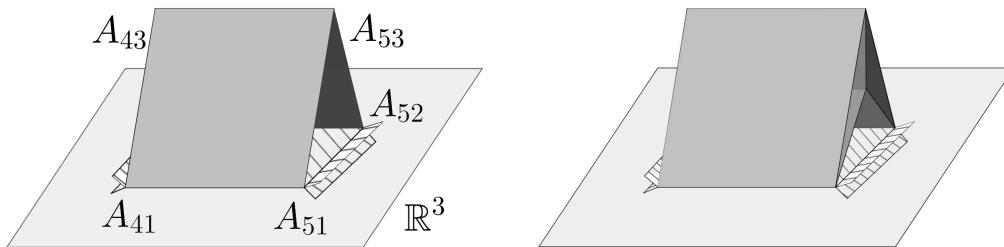


Рис. 8: Left: to realization in \mathbb{R}^4 of the product of the complete graphs on 5 and on 3 vertices. Take a (three-dimensional) hyperplane in \mathbb{R}^4 (shown as a plane in three-dimensional space). In this hyperplane take 10 vertices A_{jp} , where $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $p \in \{1, 2\}$, shown in Figure 1, right. Take a vector v not parallel to the hyperplane. Set $A_{j3} := A_{j1} + v$. In the picture we see the lateral surface of the prismoid $A_{41}A_{42}A_{43}A_{51}A_{52}A_{53}$.

Right: to realization in \mathbb{R}^4 of the product of the complete graphs on 5 and on 4 vertices.

Sketch of the proof of Example 1.9.c. Take points $A_{jp} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, $j \in \{1, 2\}$, $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ from the proof of Example 1.9.a. Then $\vec{A_{1p}A_{1q}} = \vec{A_{2p}A_{2q}}$ for each $p \neq q$. For vectors $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ denote $A_{jp} := A_{1p} + v_j$, $j \in \{3, 4\}$. One can check that the points A_{jp} , $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, are as required, if vectors v_3, v_4 are not parallel to the hyperplane $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ and such that A_{14} is the interior point of the triangle $A_{11}A_{12}A_{13}$. QED

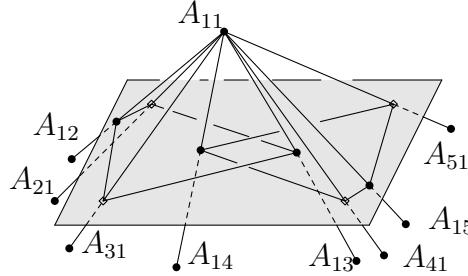


Рис. 9: To the proof of the Square Theorem 1.8.

Proof of the Square Theorem 1.8. Assume to the contrary that no two triangles with disjoint vertices intersect. As in the proof of the Product Theorem 1.6, we may assume that the given 25 points are in general position and that A_{11} is the unique point among them whose first coordinate a is maximal. Consider a 3-dimensional hyperplane $x = b$, where b is slightly smaller than a . For each $i = 2, 3, 4, 5$ color in red the intersection point of the hyperplane with the segment $A_{11}A_{1i}$; see Figure 9. For each $j = 2, 3, 4, 5$ color in blue the intersection point of the hyperplane with the segment $A_{11}A_{j1}$. Clearly, the 8 colored points in the hyperplane are in general position. Hence by the Linear Sachs Theorem 1.21 there are two linked closed quadrangular broken lines whose vertices are the colored points and whose edges have endpoints of different colors. Without loss of generality, the vertices of the first broken line belong to the segments joining A_{11} to $A_{12}, A_{21}, A_{13}, A_{31}$, and the vertices of the second broken line belong to the segments joining A_{11} to $A_{14}, A_{41}, A_{15}, A_{51}$.

Denote by T_{pqr} the union of triangles

$$A_{ik}A_{il}A_{jk} \quad \text{and} \quad A_{jl}A_{jk}A_{il}, \quad \text{where} \quad i \in \{p, q, r\}, \quad j \in \{p, q, r\}.$$

Clearly, this is the body of a 2-cycle. (This is actually a singular polyhedral torus.) The broken lines are the intersections of T_{123} and T_{145} with the hyperplane. Since the given 25 points are in general position and no two triangles with disjoint vertices intersect, analogously to the proof of Theorem 1.4, A_{11} is the unique intersection point of T_{123} and T_{145} . This contradicts the following Parity Lemma 1.31. QED

Лемма 1.31 (Parity Lemma). *Assume that the bodies of two 2-cycles in \mathbb{R}^4 intersect at a unique point, and a hyperplane sufficiently close to the point intersects the bodies by a pair of quadrangular broken lines whose vertices are in general position. Then the broken lines are not linked in the hyperplane.*

This lemma is deduced from Parity Lemma 1.29.c analogously to the Parity Lemmas 1.10, 1.24 and 1.28, see details in [Z].

1.8 Embedded sets of segments and realizability of graphs

Embedded sets and linear realization of graphs

A set of segments in \mathbb{R}^d (e.g. in the plane or in 3-space) is called *embedded*, if each two of them either are disjoint or intersect only at a common vertex.

E.g., vertices of a triangle and a point inside it are 4 points in the plane such that the set of all the segments joining them is embedded. The Intersection Property 1.1 shows that no 5 points with this property exist.

1.32 (General Position Theorem). For each n there exist n points in 3-space such that the set of all the segments joining the points is embedded.

Recall that a *graph* (V, E) is a collection E of two-element subsets of a finite set V .¹² Элементы данного конечного множества называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *ребрами*. Общепринятый термин для понятия графа, данного здесь — *граф без петель и кратных ребер* или *простой граф*.

Граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается K_n . Через $K_{m,n}$ обозначается *полный двудольный граф* с долями из m и из n вершин: в нем имеются все ребра между вершинами разных долей. См. рис. 3.

A *linear realization* of graph (V, E) in \mathbb{R}^d is an embedded set of segments in \mathbb{R}^d whose vertices correspond to V and whose segments correspond to E . E.g.

- neither K_5 nor $K_{3,3}$ is linearly realizable in the plane (by the Intersection Property 1.1 and Problem 1.13);

- each graph is linearly realizable in 3-space (by Theorem 1.32).

1.33. There is an algorithm for recognition of linear realizability of graphs in the plane.

A criterion for linear realizability of graphs in the plane follows from the Kuratowski and the Fary Theorems 1.34 and 1.35 below.

Определения тела и гомеоморфности для графов

Неформально, *тело* $|G|$ графа G — фигура, полученная из конечного числа отрезков отождествлением некоторых их концов в соответствии с графом. Формально, *телом* графа называется объединение отрезков любого вложенного семейства отрезков, соответствующих ребрам графа, концы которых соответствуют вершинам графа. Один граф имеет много разных тел. Например, параллельный перенос тела дает другое тело. Обратно, одна фигура может быть телом нескольких графов. Все такие графы гомеоморфны, см. далее.

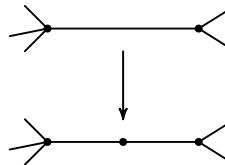


Рис. 10: Подразделение ребра

Операция *подразделения ребра* графа показана на рис. 10. Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним. Это эквивалентно существованию графа, который можно получить из каждого из данных графов операциями подразделения ребра.

Пусть $N \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$.¹³ Отображение $f : N \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если для любых $x \in N$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $y \in N$ с условием $|x - y| < \delta$ выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Если N замкнуто и ограничено, то это

¹²Графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f множества V_1 вершин графа G_1 на множество V_2 вершин графа G_2 , удовлетворяющее следующему условию: *вершины* $A, B \in V_1$ *соединены ребром в том и только в том случае, если* *вершины* $f(A), f(B) \in V_2$ *соединены ребром*.

¹³Читатель может пропустить этот абзац и нижеследующие теоремы 1.41, 1.44 без ущерба для понимания остального материала.

условие равносильно следующему условию *равномерной непрерывности*: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $x, y \in N$ с условием $|x - y| < \delta$ выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Два подмножества евклидова пространства \mathbb{R}^d называются *гомеоморфными*, если существуют взаимно-обратные непрерывные отображения между ними. Нетрудно сообразить, что *любые два тела одного графа гомеоморфны*. Оказывается, что *графы гомеоморфны тогда и только тогда, когда их тела гомеоморфны*. Этот критерий является *мотивировкой* для определения гомеоморфности графов, которое позволяет перевести изучение некоторых фигур на чисто комбинаторный язык.

Одномерным полиэдром называется класс гомеоморфности графов. Топологу интересны именно полиэдры (часто тополог называет их *графами*). Но графы и тела — удобные средства изучения полиэдров и хранения их в компьютере. А комбинаторщику и дискретному геометру интересны графы и тела. Но и полиэдры оказываются для них полезными.

Планарность графов

Граф называется *планарным* (или *кусочно-линейно вложимым в плоскость*), если его можно без самопересечений нарисовать на плоскости так, чтобы ребра изображались ломаными. Или, формально, если некоторый граф, гомеоморфный данному, линейно вложим в плоскость.

Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$ доказывается аналогично утверждениям 1.1 и 1.13.а. (Для K_5 см. детали в §2.1.) Для такого доказательства нужны леммы о четности 1.11 и обобщение 2.2 леммы о четности 1.10, которое доказывается аналогично.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф G называется *подграфом* графа H , если каждая вершина графа G является вершиной графа H , и каждое ребро графа G является ребром графа H . (При этом две вершины графа G , соединенные ребром в графе H , не обязательно соединены ребром в графе G .)

Теорема 1.34 (Куратовского). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 3).*

Теорема 1.35 (Фари). *Если граф планарен (т.е., кусочно-линейно вложим в плоскость), то он линейно вложим в плоскость.*

Из теорем Куратовского или Фари вытекает существование алгоритма распознавания планарности графов. А вот следующий результат уже не вытекает из них.

Теорема 1.36 (Хопкрофта-Тарджана). *Существует линейный по количеству вершин алгоритм распознавания планарности графов.*

1.9 Linear realizability of hypergraphs

A set of non-degenerate triangles in d -space \mathbb{R}^d is *embedded*, if each two of them either are disjoint, or intersect only at a common vertex, or intersect only by a common side.

E.g., in Figure 1, left, one can see 5 points in 3-space such that the set of all triangles with the vertices at these points is embedded. By Theorem 1.3 or Problem 1.17 or the Intersection Property 1.18, no 6 points with this property exist.

E.g., 5 vertices of 4-dimensional simplex and a point inside it are 6 points in 4-space such that the set of all triangles with vertices at these points is embedded. Theorem 1.4 shows that no 7 points with this property exist.

1.37. (a) There are 7 points in 4-space such that the set of all but one triangles spanned by these points is embedded.

(b) For each n there exist $n+1$ points $0, 1, \dots, n \in \mathbb{R}^4$ such that the set of all the triangles $0jk$, $1 \leq j < k \leq n$, is embedded. (Hint: Figure 11.)

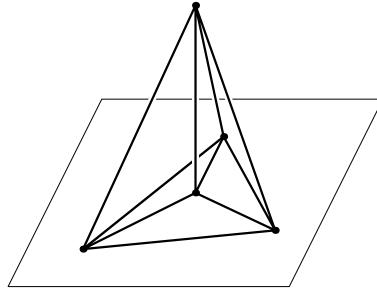


Рис. 11: \mathbb{R}^4 is shown as \mathbb{R}^3 and a (3-dimensional) hyperplane in \mathbb{R}^4 is shown as a 2-dimensional plane in \mathbb{R}^3

1.38 (General Position Theorem). For each n there exist n points in \mathbb{R}^5 such that the set of all the triangles spanned by the points is embedded.

Recall that a *two-homogeneous hypergraph* (shortly: *2-hypergraph*) (V, F) is a collection F of three-element subsets of a finite set V . (Определение изоморфизма 2-гиперграфов аналогично случаю графов.)

A *linear realization* of 2-hypergraph (V, F) in \mathbb{R}^d is an embedded set of triangles in \mathbb{R}^d whose vertices correspond to V and whose triangles correspond to F . At the beginning of this section we have shown that

- the complete 2-hypergraph on 5 vertices is linear realizable in \mathbb{R}^3 ;
- the complete 2-hypergraph on 6 vertices is not linear realizable in \mathbb{R}^3 and is linear realizable in \mathbb{R}^4 ;
- the complete 2-hypergraph on 7 vertices is not linear realizable in \mathbb{R}^4 ;
- each 2-hypergraph is linear realizable in \mathbb{R}^5 (by Theorem 1.38).

Утверждения 1.32, 1.9.ab и 4.1.а показывают, что в \mathbb{R}^3 линейно вложимы произвольный граф и декартовы произведения $K_3 \times K_3$ (топ), $K_4 \times K_3$.

1.39. There is an algorithm for recognition of linear realizability of 2-hypergraphs in \mathbb{R}^d for each $d = 2, 3, 4$.

The *product* $K_m \times K_n$ is the 2-hypergraph on mn vertices A_{jp} , where $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, consisting of all three-element sets of the form

$$\{A_{jp}, A_{kq}, A_{jq}\} \quad \text{and} \quad \{A_{jp}, A_{kq}, A_{kp}\}, \quad \text{where} \quad 1 \leq j < k \leq m, \quad 1 \leq p < q \leq n.$$

For instance, the products

$$K_2 \times K_2, \quad K_2 \times K_3, \quad K_3 \times K_3, \quad K_2 \times K_5, \quad K_5 \times K_3, \quad \text{and} \quad K_5 \times K_4$$

are shown in Figures 2, left (a *square*), 2, right (a *torus*), 2, middle (a *cylinder*) 1, right (a *cylinder over K_5*), 8, left and 8, right, respectively.

A linear realization of $K_m \times K_n$ in \mathbb{R}^d is an (m, n) -realization in \mathbb{R}^d (defined before Theorem 1.6). Hence Theorems 1.6, 1.8 and Proposition 1.7 imply that the products $K_5 \times K_3$, $K_4 \times K_4$ and $K_5 \times K_5$ are not linearly realizable in \mathbb{R}^3 , in \mathbb{R}^3 and in \mathbb{R}^4 , respectively. Presumably an (m, n) -realization need not be a linear realization of $K_m \times K_n$. However, Example 1.9 generalize to show that

- (a) the product $K_2 \times K_n$ is linearly realizable in \mathbb{R}^3 for each n ;
- (b) the product $K_3 \times K_n$ is linearly realizable in \mathbb{R}^3 for each $n \leq 4$;
- (c) the product $K_4 \times K_n$ is linearly realizable in \mathbb{R}^4 for each n .¹⁴

¹⁴Sketch of a proof. For (a) this follows because in the construction in §1.5

• for any $1 \leq p < q \leq n$ the triangles $A_{1p}A_{2q}A_{2p}$ and $A_{1p}A_{2q}A_{1q}$ intersect exactly by the common side and

All this implies that

the product $K_m \times K_n$ is linearly realizable in \mathbb{R}^3 if and only if either $\min\{m, n\} = 2$ or $m = n = 3$ or $\{m, n\} = \{3, 4\}$.

the product $K_m \times K_n$ is linearly realizable in \mathbb{R}^4 if and only if $\min\{m, n\} \leq 4$.

1.10 Piecewise-linear realizability of hypergraphs

Определения тела и гомеоморфности для гиперграфов

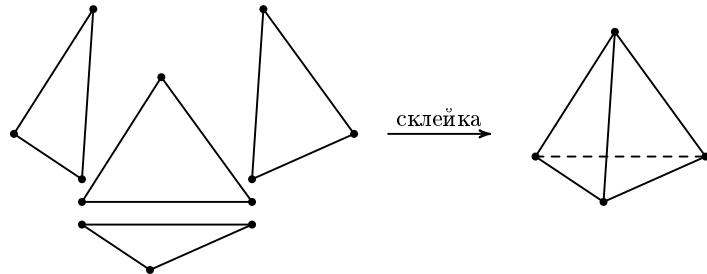


Рис. 12: Построение тела 2-комплекса

Как и по графу, по 2-гиперграфу естественно строится геометрическая фигура, называемая его *телом*. Неформально говоря, она получена склейкой треугольников, соответствующих граням 2-гиперграфа. Склейка осуществляется не обязательно в трехмерном пространстве: либо в многомерном пространстве, либо даже абстрактно, независимо от объемлющего пространства. Например, на рис. 12 изображено построение тела полного 2-гиперграфа с 4 вершинами.

Формально, *телом* 2-гиперграфа называется объединение треугольников любого вложенного семейства треугольников, соответствующих граням 2-гиперграфа, вершины которых соответствуют вершинам 2-гиперграфа.

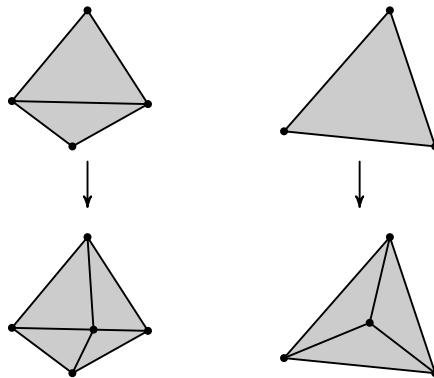


Рис. 13: Подразделения ребра и грани

Операция *подразделения ребра* изображена на рис. 13 слева.

1.40. Операция *подразделения грани* на рис. 13 справа выражается через операцию подразделения ребра.

Два 2-гиперграфа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним.

lie in the parallelogram $12 \times pq$.

• since points $(0, 0, 0), V, A_{11}, \dots, A_{1n}$ are in general position, if parallelograms $12 \times pq$ and $12 \times rs$ have a common point, then they intersect by a common side.

For (b) and (c) the realizability improvement is checked analogously. QED

Теорема 1.41. 2-гиперграфы гомеоморфны тогда и только тогда, когда их тела гомеоморфны.

Definition of an n -homogeneous hypergraph (shortly: n -hypergraph) is analogous to the cases $n = 1, 2$. Заметим, что аналог части ‘только тогда’ теоремы 1.41 верен и для n -гиперграфов, а аналог части ‘тогда’ неверен для n -гиперграфов при $n \geq 5$. A counterexample is the 5-sphere and the double suspension of the Poincaré homology 3-sphere.

Двумерным полиэдром называется класс гомеоморфности 2-гиперграфа.

Для гиперграфов справедливы замечания, аналогичные сделанным в п. 1.8 по поводу тела графа и гомеоморфности графов.

Piecewise-linear realizability of hypergraphs

2-гиперграф называется *PL* (кусочно-линейно) вложимым в \mathbb{R}^d , если некоторый гомеоморфный ему 2-гиперграф линейно вложим в \mathbb{R}^d .

Ясно, что из линейной вложимости 2-гиперграфа в \mathbb{R}^d вытекает его *PL* вложимость в \mathbb{R}^d . Обратное верно для $d = 2$ и неверно для $d \in \{3, 4\}$. Для $d = 3$ это доказано в [Ka41] (см. также [MTW08, §2], [PW]), а для $d = 4$ это вытекает из нижеследующей теоремы 1.42.с (см. также [MTW08, §2]). Тем не менее, результаты из п. 1.9 о линейной невложимости верны и для *PL* невложимости; доказательства аналогичны и используют *PL* аналоги лемм о четности.

Существование алгоритма распознавания планарности 2-гиперграфов вытекает из аналога теоремы Фари и задачи 1.39.2, а также из критерия типа Куратовского планарности 2-гиперграфов (т.е. из теоремы Халина-Юнга 4.19.б, но не из 4.19.б!). Этот критерий удобнее формулировать на языке 2-комплексов.

Теорема 1.42. (a) Существует линейный по количеству вершин алгоритм распознавания *PL* вложимости 2-гиперграфов в плоскость. [MTW08, Appendix A]

(b) Существует алгоритм распознавания *PL* вложимости 2-гиперграфов в \mathbb{R}^3 . [MSTW14], ср. с теоремой 4.20.

(c) Алгоритмическая проблема распознавания *PL* вложимости 2-гиперграфов в \mathbb{R}^4 является *NP*-трудной. [MTW08]

Общепринятое формальное определение *NP*-трудности непросто. Мы будем использовать следующее эквивалентное определение. Алгоритмическая проблема, зависящая от целочисленного параметра n , называется *NP*-трудной, если, имея автомат для ее решения за 1 шаг, можно построить полиномиальный по n алгоритм распознавания тождественности нулю булевой формулы от n переменных, являющейся дизъюнкцией конъюнкций переменных и их отрицаний (например, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4$). В §4.10 идея доказательства теоремы 1.42.с проиллюстрирована на трехмерных примерах.

Гипотеза 1.43. (a) Алгоритмическая проблема распознавания *PL* вложимости 2-гиперграфов в \mathbb{R}^3 является *NP*-трудной.

(b) Существует алгоритм распознавания *PL* вложимости 2-гиперграфов в \mathbb{R}^4 .

Topological realizability of hypergraphs

2-гиперграф называется топологически вложимым в \mathbb{R}^d , если существует непрерывное инъективное отображение в \mathbb{R}^d некоторого его тела.

Теорема 1.44. There exists a 2-hypergraph that does not topologically embed into \mathbb{R}^4 .

Proof. We present a simplified (possibly the simplest known) proof invented by E. Schepin, D. Repovs and the author (and, possibly, others) [RS01] [Sk08, §5].

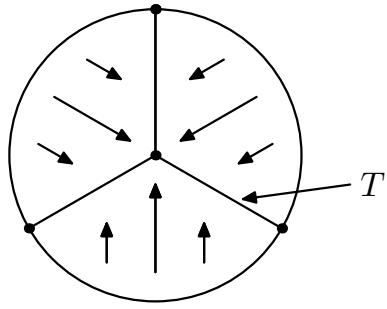


Рис. 14: A contraction

Let T be a *triod*, i.e., the graph with four vertices O, A, B, C and three edges OA, OB and OC . The product T^3 is a cone over some 2-polyhedron N . In other words, N is the join of 3 copies of a three-point set, cf. Theorem 1.30.

In order to prove that N does not embed into \mathbb{R}^4 it suffices to prove that T^3 does not embed into \mathbb{R}^5 . Suppose to the contrary that there is an embedding $f : T^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$. Let $p : D^2 \rightarrow T$ be a map which does not identify any antipodes of $S^1 = \partial D^2$ (e.g. the map from Figure 14). It is easy to check that the map $p^3|_{\partial D^6} : \partial D^6 \rightarrow T^3$ also does not identify any antipodes. Then the composition of p^3 and f again does not identify antipodes. This contradicts the Borsuk-Ulam Theorem. QED

Further generalizations can be found, e.g., in §4.5, [Sk03, ARS01].

1.11 Теоремы Радона и Тверберга

Следующие задачи предлагались на выездной школе команды Москвы и имели там номера 1.10–1.15.

1.45. (a) Для любого d существуют такие $d + 1$ точки в \mathbb{R}^d , при любом разбиении которых на два множества выпуклые оболочки множеств не пересекаются.

(b2) Любые 4 точки на плоскости можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

(b3) Любые 5 точек в пространстве можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

(b) **Теорема Радона.** Для любого d любые $d + 2$ точки в \mathbb{R}^d можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

1.46. (a) Даны 4 точки общего положения на плоскости. Для каждого (неупорядоченного) разбиения этих точек на два множества посчитаем количество точек в пересечении выпуклой оболочки множеств. Всегда ли сумма полученных чисел нечетна?

(b) Верен ли аналог п. (a) для 5 точек общего положения в пространстве?

(c) Даны 9 точек общего положения в пространстве. Для каждого (неупорядоченного) разбиения 9 точек на три множества посчитаем количество точек в пересечении трех выпуклых оболочек множеств. Всегда ли сумма полученных чисел нечетна?

1.47. Любые ли 9^{9^9} точек на плоскости, являющихся вершинами выпуклого многоугольника, можно так раскрасить в 9 цветов, что 9 (двумерных) выпуклых многоугольников с одноцветными вершинами будут иметь общую точку?

1.48. (a2) Существуют 6 точек на плоскости, при любом разбиении которых на три множества выпуклые оболочки множеств не имеют общей точки.

(b2) Любые 7 точек на плоскости можно разбить на три множества так, что выпуклые оболочки множеств имеют общую точку.

(a3) Существуют 8 точек в пространстве, при любом разбиении которых на три множества выпуклые оболочки множеств не имеют общей точки.

(b3) Любые 9 точек в пространстве можно разбить на три множества так, что выпуклые оболочки множеств имеют общую точку.

(a) Для любого d существуют $2d + 2$ точки в \mathbb{R}^d , при любом разбиении которых на три множества выпуклые оболочки множеств не имеют общей точки.

(b) Для любого d любые $2d + 3$ точки в \mathbb{R}^d можно разбить на три множества, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

1.49. (a2) Существуют 10 точек на плоскости, при любом разбиении которых на четыре множества выпуклые оболочки множеств не имеют общей точки.

(b2) Любые 11 точек на плоскости можно разбить на четыре множества так, что выпуклые оболочки множеств имеют общую точку.

(a3) Существуют 12 точек в пространстве, при любом разбиении которых на четыре множества выпуклые оболочки множеств не имеют общей точки.

(b3) Любые 13 точек в пространстве можно разбить на четыре множества так, что выпуклые оболочки множеств имеют общую точку.

(a) Для любых d, r существуют $(d + 1)(r - 1)$ точки в \mathbb{R}^d , при любом разбиении которых на r множеств выпуклые оболочки множеств не имеют общей точки.

(b)* **Теорема Тверберга.** Для любых d, r любые $(d+1)(r-1)+1$ точки в \mathbb{R}^d можно разбить на r множества, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

1.50. * (a) Для любых d и непрерывного отображения $(d + 1)$ -мерного симплекса в \mathbb{R}^d существуют две непересекающиеся грани симплекса, образы которых пересекаются.

(b) Для любых d и непрерывного отображения $(2d + 2)$ -мерного симплекса в \mathbb{R}^d существуют три непересекающиеся грани симплекса, образы которых имеют общую точку.

Теорема. Если $d > 0$ целое и r — степень простого, то для любого непрерывного отображения $(d + 1)$ -мерного симплекса в \mathbb{R}^d существуют r попарно непересекающиеся грани симплекса, образы которых имеют общую точку.

Доказательство для общего случая не опубликовано [Oz87]. По поводу истории доказательства см., например, [MW15].

Топологической гипотезой Тверберга называется аналог этого утверждения для произвольного r . Она была опровергнута в 2015 г. с использованием другого неопубликованного результата (см. §4.8).

Теорема. [Fr15], [MW14], [MW15] Если r — не степень простого и $d \geq 3r + 1$, то существует непрерывное (даже кусочно-линейное) отображение $(d+1)(r-1)$ -мерного симплекса в \mathbb{R}^d , при котором образы любых r попарно непересекающихся граней не имеют общей точки.

Заключительный шаг доказательства приводится в §4.8.

Указания и решения к некоторым задачам

1.22. (b) Let triangle Δ be linked with triangle Δ' . By the Symmetry Lemma 1.2 Δ intersects plane containing Δ' , so $\Delta \cap l \neq \emptyset$. By general position, the intersection $\Delta \cap l$ is exactly two points. Now let us prove that the pairs of points are proved. Denote by A, B the intersection points $\Delta \cap l$ and by A', B' the intersection points $\Delta' \cap l$. The intersection of Δ and two-dimensional triangle Δ' is a subset of segment $A'B'$. So exactly one of points A and B is in the segment $A'B'$. So pairs A, B and A', B' are linked in l .

Let us prove the converse. Let the pairs A, B and A', B' be linked in l . Then according to the previous assertion, Δ intersects the two-dimensional triangle Δ' by exactly one point, i.e. Δ is linked with Δ' .

1.23. (b) An intuitive argument. Since the vertices move continuously so that they remain in general position, the number of points at which the outline of the first triangle intersects the second triangle, is preserved. Thus the triangles remain linked or unlinked.

Another intuitive argument. Let us use the Symmetry Lemma 1.2. When points move so that they remain in general position and the planes containing triangles are not parallel, the four points in the line l move continuously, so they are either always linked or always unlinked. If there is a moment when the planes containing the triangles are parallel, then at this moment and during some time before and after this moment the triangles are unlinked.

Hint to a rigorous solution. The number of intersections of a segment and a triangle (whose 5 vertices are in general position) is preserved under small enough change of the 5 vertices.

(c) Denote by t the height of point A_1 above the horizontal plane. By (a) the triangles are linked if $t \in (-\infty; 2) \cup (3, 5; 4, 5) \cup (6; +\infty)$ and are unlinked if $t \in (2; 3, 5) \cup (4, 5; 6)$.

1.32. Choose three points in 3-space that do not belong to one line. Suppose that we have $n \geq 3$ points in general position. Then there is a finite number of planes containing triples of these n points. Hence there is a point that does not lie on any of these planes. Add this point to our set of n points. Since the ‘new’ point is not in one plane with any three of the ‘old’ n points, the obtained set of $n + 1$ points is in general position. Thus *for each n there exist n points in 3-space that are in general position*.

Take such n points. Denote by A the set of all segments joining pairs of these points. If some two segments from A with different endpoints intersect, then four endpoints of these two segments are in one plane. If some two segments from A with common endpoint intersect not only at their common endpoint, then the three endpoints of these two segments are on one line. These contradictions show that A is embedded.

1.37. (b) See Figure 11. By General Position Theorem 1.32 there exist n points $1, \dots, n$ in a three-dimensional hyperplane in \mathbb{R}^4 so that the set of all the segments joining the points is embedded. Take a point $0 \in \mathbb{R}^4$ not belonging to the three-dimensional hyperplane. Then the points $0, 1, \dots, n$ are the required ones.

1.38. The proof is analogous to General Position Theorem 1.32. A set of points in \mathbb{R}^5 is *in general position*, if no six of these points are in one four-dimensional hyperplane.

1.45. (b2) Рассмотрим четверку точек A, B, C, D на плоскости.

Если какие-то 3 из них лежат на одной прямой, то некоторая из них, скажем B , лежит на отрезке между двумя другими, например, между A и C . Обозначим через $[XY]$ отрезок с вершинами X, Y . Тогда $[AC] \cap [BD] \neq \emptyset$.

Значит, никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Если одна из этих точек лежит внутри треугольника, образованного остальными, то задача решена. Иначе каждая из этих точек лежит снаружи треугольника, образованного остальными. Поскольку точка D снаружи треугольника ABC , то она либо внутри одного из углов, вертикальных углам треугольника ABC , либо внутри одного из углов треугольника ABC .

Случай 1. Точка D внутри одного из углов, вертикальных углам треугольника ABC . Без ограничения общности, D внутри угла, вертикального углу $\angle ACB$. Тогда точка C внутри ABD , противоречие.

Случай 2. Точка D внутри одного из углов треугольника ABC , скажем $\angle BAC$. Поскольку точка D вне треугольника ABC и внутри угла BAC , то точки D и A лежат по разные стороны от прямой BC . Следовательно, отрезки $[AD]$ и $[BC]$ пересекаются.

(bd) $n := d$. Сначала докажем, что найдутся такие $c_1, \dots, c_{n+2} \in \mathbb{R}$, не все из которых равны нулю, что

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_{n+2}X_{n+2} = 0 \quad \text{и} \quad c_1 + \dots + c_{n+2} = 0.$$

В самом деле, рассмотрим набор векторов $X_1 - X_{n+2}, X_2 - X_{n+2}, \dots, X_{n+1} - X_{n+2}$. Поскольку это $n+1$ вектор в \mathbb{R}^n , то для этих векторов найдется нетривиальная линейная зависимость с коэффициентами c_1, \dots, c_{n+1} . Тогда набор $c_1, \dots, c_{n+1}, -c_1 - \dots - c_{n+1}$ — требуемый.

Теперь перенумеруем точки так, чтобы сначала шли положительные значения c_i . Перенесем слагаемые с отрицательными коэффициентами в правую часть. Получим: $c_1X_1 + \dots + c_kX_k = -c_kX_k - \dots - c_{n+2}X_{n+2}$. Домножим это равенство на такой коэффициент, чтобы сумма коэффициентов справа и слева стала равна 1. После этого равенство будет утверждать, что выпуклые оболочки множеств $\{X_1, \dots, X_k\}$ и $\{X_{k+1}, \dots, X_{n+2}\}$ пересекаются. \square

Имеется также доказательство при помощи индукции по размерности, как и для теорем

1.50. (a) Используйте теорему Борсука-Улама (§5.1).

2 Вложения графов в плоскость и в пространство

2.1 Отображения графов в плоскость

Embedded set of segments is defined in §1.8. E.g. there are 5 points in the plane such that the set of all but one segments joining the points is embedded. The following corollary of the Intersection Property 1.1 illustrate some ideas of the proof of Theorem 1.42.c.

2.1. Для любых пяти точек 1, 2, 3, 4, 5 на плоскости если набор отрезков

(a) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $k \neq 2$, вложенный, то точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345;

(b) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$, вложенный то

ЛИБО точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345,

ЛИБО точки 1 и 3 находятся по разные стороны от треугольника 245.

(c) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$, вложенный, то

ЛИБО точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345,

ЛИБО точки 1 и 3 находятся по разные стороны от треугольника 245,

ЛИБО точки 1 и 4 находятся по разные стороны от треугольника 235.

(d) Ой... Вы уже догадались, как формулируется эта задача и вообще как при изучении вложимости возникают булевые функции.

Точка x пересечения двух несамопересекающихся ломаных на плоскости называется *трансверсальной*, если любая достаточно малая окружность S_x с центром в x пересекает ломаные по парам точек, *чертежающимся* вдоль окружности (т.е. если обозначить через A_1, B_1 точки пересечения первой ломаной с S_x и через A_2, B_2 точки пересечения второй ломаной с S_x , то эти точки пересечения расположены на окружности в порядке $A_1 A_2 B_1 B_2$). Иными словами, если два звена одной ломаной, выходящие из точки пересечения, находятся ‘по разные стороны’ от другой ломаной в малой окрестности точки пересечения.

Лемма 2.2 (о четности). *Две замкнутые несамопересекающиеся ломаные на плоскости, пересекающиеся в конечном числе точек трансверсально, пересекаются в четном числе точек.*

Доказательство непланарности графа K_5 . В доказательстве утверждения 1.1 нужно заменить ‘треугольники’ на ‘ломаные’. Пересечение ломаных OAC и OB трансверсально. Значит, по лемме о четности 2.2 ломаные AC и BD пересекаются. QED

Линейное отображение графа $G = (V, E)$ в плоскость — отображение $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$. Образом $f(ab)$ ребра ab графа G назовем отрезок $f(a)f(b)$.

Кусочно-линейное отображение графа G в плоскость — линейное отображение f в плоскость некоторого графа H , гомеоморфного графу G . Образом $f(ab)$ ребра ab графа G назовем ломаную, составленную из f -образов ребер графа H , ‘содержащихся’ в ab .

Например, (кусочно-)линейное вложение графа определяет (кусочно-)линейное отображение графа.

При доказательстве непланарности графа K_5 доказано, что *для любого кусочно-линейного отображения графа K_5 в плоскость найдутся два несмежных ребра графа K_5 , образы которых пересекаются*. (Еще одно доказательство непланарности графа $K_{3,3}$ получается из этого факта и рис. 15 [Sk03].) Сформулируем обобщение этого факта, аналогичное утверждению 1.1.

Кусочно-линейное отображение f графа G в плоскость называется отображением *общего положения*, если

- для любых двух несмежных ребер e, e' графа G ломаные $f(e)$ и $f(e')$ пересекаются в конечном числе точек.

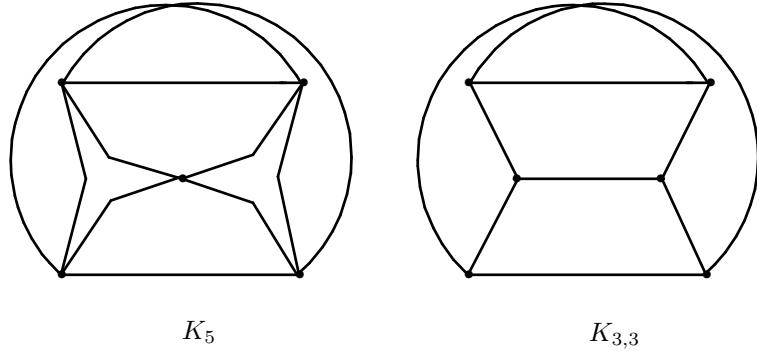


Рис. 15: ‘Почти-вложение’ $K_5 \rightarrow K_{3,3}$

- для любых двух пар (e, e') и (e, e'') несмежных ребер графа G выполнено $f(e) \cap f(e') \cap f(e'') = \emptyset$.

Лемма 2.3. Для любого кусочно-линейного отображения общего положения графа K_5 в плоскость число точек пересечения образов несмежных ребер нечетно.

2.4. Для кусочно-линейного отображения f общего положения графа G в плоскость назовем *числом ван Кампена* $v(f)$ четность числа точек пересечения образов несмежных ребер.

- (a) Для $G = K_5$ и отображения f_0 , изображенного на рис. 3 слева, $v(f_0) = 1$.
- (a') Для $G = K_{3,3}$ и отображения f_0 , изображенного на рис. 3 справа, $v(f_0) = 1$.
- (b) Приведите пример графа G и двух отображений f, f' , для которых $v(f) \neq v(f')$.
- (c) Если G планарен, то $v(f) = 0$ для некоторого отображения f .
- (c') Обратное к (c) неверно.
- (d) Если G — несвязное объединение двух циклов, то $v(f) = 0$ для любого отображения f .
- (e) Сформулируйте и докажите аналог леммы 2.3 для $G = K_{3,3}$.

Доказательство линейного аналога леммы 2.3. Для набора f пяти точек общего положения на плоскости обозначим через $v(f)$ нужную четность числа точек пересечений. By Problem 2.4.a it suffices to prove that if we change one point keeping the remaining 4 fixed, so that new 5 points are in general position, then $v(f)$ is not changed. Assume that $K \in f$, $K' \notin f$, $a := f - \{K\}$ and $f' := (f - \{K\}) \cup \{K'\}$ is a general position set.

Proof that $v(f) = v(f')$ when $f \cup \{K'\}$ is a general position set. Для $A \in a$ обозначим через Δ_A треугольник с вершинами из $a - \{A\}$. Тогда

$$v(f') - v(f) = \sum_{A \in a} (|KA \cap \Delta_A| - |K'A \cap \Delta_A|) = \sum_{A \in a} |KK' \cap \Delta_A| = 0 \pmod{2}.$$

Второе равенство следует из того, что число $|KK' \cap \Delta_A|$ четно по лемме о четности 1.11. Последнее равенство следует из того, что для каждой неупорядоченной пары $\{P, Q\} \subset a$ существует ровно два треугольника с вершинами из a , которые содержат отрезок PQ . Значит, для каждой неупорядоченной пары $\{P, Q\} \subset a$ число $|KK' \cap PQ|$ ‘входит’ ровно в два слагаемых из суммы.

Proof that $v(f) = v(f')$ in general. There exists a point K'' such that both $f \cup \{K''\}$ and $f' \cup \{K''\}$ are general position sets. Then $v(f) = v((f - \{K\}) \cup \{K''\}) = v(f')$ by the previous case. \square

2.5. (a) При любом кусочно-линейном вложении в плоскость графа, получающегося из K_5 удалением ребра 12, образы точек 1 и 2 находятся по разные стороны от образа треугольника 345.

(b,c,d) Сформулируйте и докажите аналог задач 2.1.bcd для кусочно-линейных вложений.

Формулировка задачи 2.5 осмыслена по нижеследующей теореме.

Теорема Жордана. *Замкнутая несамопересекающаяся ломаная на плоскости делит плоскость ровно на две части. Две точки плоскости, не принадлежащие ломаной, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить некоторой ломаной, не пересекающей данной ломаной.*

2.2 Linking modulo 2

Понятие коэффициента зацепления является одним из важнейших в топологии. Здесь мы излагаем только базовую информацию, и рекомендуем читателю обратиться за обсуждениями и примерами к [BE82, §19]. First we formalize the intuitive notion of linking (fig. 16). Before reading this text it is recommended to read §1.2 and §1.4.

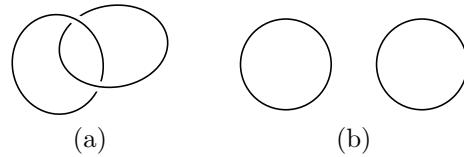


Рис. 16: Linked and unlinked curves

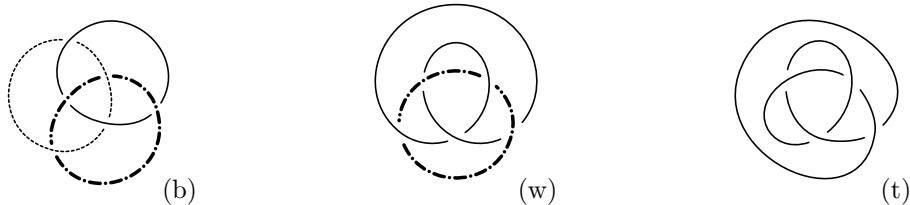


Рис. 17: The Borromean rings, the Whitehead link and the trefoil knot.

Which pairs of curves in (b), (w) are linked?

A *spatial piecewise-linear closed curve* is a non-self-intersecting closed broken line in 3-space. We abbreviate ‘spatial piecewise-linear closed curve’ to just ‘curve’. By PQ we denote the *segment* whose ends are P and Q , and by $\text{Int } PQ$ its interior.

Let a and b be disjoint curves in 3-space. A point A is *in general position* to pair (a, b) if for each edge MN of a the triangle AMN contains no vertices of b . E.g. any point of the cube is in general position to opposite squares of the cube.

2.6. (a) There are disjoint curves a and b such that no vertex of a is in general position to (a, b) .

(b) For each disjoint curves a and b there is a point A which is in general position to a and b .

(c) If a point A is in general position to disjoint curves a and b , then for each edge MN of a the intersection $AMN \cap b$ is a finite number of points.

Disjoint curves a and b are called *linked modulo 2* if there is a point A in general position to a and b such that $\sum_{MN} |AMN \cap b|$ is odd, where the summation is over edges MN of a .

Remark. For a point A in space let *the singular cone $A * a$ spanned by a* be the union $\bigcup_{X \in a} AX$ of segments. A point A is *in strong general position* to (a, b) if

- no vertex of b belongs to $A * a$ and

- if X is either a point of a such that $a \cap \text{Int } AX \neq \emptyset$ or a vertex of a , then $b \cap AX = \emptyset$.

Disjoint curves a and b are linked modulo 2 if $|(A * a) \cap b|$ is odd for some (or, equivalently, for any) point A in strong general position to a and b . This equivalent definition is less abstract but harder to work with (in particular, it requires stronger general position property). Cf. Problem 2.20.a.

2.7. (a) Curves a and b are linked modulo 2 if and only if $\sum_{MN} |AMN \cap b|$ is odd for each point A in general position to a and b .

(b) Curves a and b are linked modulo 2 if and only if b and a are linked modulo 2.

(c) Which pairs of curves in Figure 17.bw and in [Pr95, Fig. 3.16, 3.17] are linked modulo 2?

Proof of (a) requires the Parity Lemma 1.25.b, and proof of (b) uses an analogous idea.

A plane is *in general position* to a union of two curves, if for the two broken lines which are orthogonal projection of these curves onto this plane the following hold:

- no three sides of broken lines have a common interior point;
- no vertex of a broken line lies inside a side of a broken line;
- if two sides of broken lines have a common vertex, then they are adjacent sides of one broken line.

2.8 (Projection lemma). Assume that a plane is *in general position* to two curves (give definition!). On the projection of the curves onto the plane show which of the sides passes above the other at the intersection points. The curves are linked modulo 2 if and only if the number of intersection points at which the first curve passes above the second curve, is odd.

Informally, two collections of pairwise disjoint curves are *piecewise linearly isotopic* if one pair can be transformed to the other by a piecewise-linear deformation during which the curves remain pairwise disjoint. A formal definition generalizes the following one. Suppose that the sides AC and CB of the triangle ABC are edges of a curve a that does not intersect the triangle ABC at any other points. An *elementary move* is replacement of the two edges AC and CB by the edge AB [PS96, Fig. 1.4]. Two curves are called *piecewise linearly isotopic* if they can be joined by a sequence of curves in which each subsequent curve is obtained from the previous one by an elementary move (of the type described above) or its inverse.

2.9. (a) Define piecewise linearly isotopic *pairs* of disjoint curves.

(b) The property of being linked modulo 2 is preserved under piecewise linear isotopy.

2.10. (a) *Теорема Конвея–Гордона–Закса.* Пусть в пространстве даны 6 точек, любые две из которых соединены несамопересекающимися ломаными, причем пересекаются только ломаные, имеющие общий конец, и только в этом конце. Тогда найдутся два зацепленных цикла длины 3. (Иными словами, при любом кусочно-линейном вложении графа K_6 в пространство в этом графе найдется пара зацепленных циклов.)

(b) *Теорема Закса.* Пусть в пространстве даны 4 красные и 4 синие точки, любые две разноцветные из которых соединены несамопересекающимися ломаными, причем пересекаются только ломаные, имеющие общий конец, и только в этом конце. Тогда найдутся два зацепленных цикла длины 4. (Иными словами, при любом кусочно-линейном вложении графа $K_{4,4}$ в пространство в этом графе найдется пара зацепленных циклов.)

Эти теоремы доказываются аналогично их ‘линейным’ аналогам [Z13].

2.3 Linking number

Пример 2.11. *There are two curves which are linked (i.e. are not piecewise linearly isotopic to curves which are contained in disjoint cubes) but not linked modulo 2.*

The *linking number* $\text{lk}(a, b)$ of disjoint oriented curves a and b is the sum of *signs* of the intersection points of b and the singular cone over a with a vertex A in general position to a and b :

$$\text{lk}(a, b) := \sum_{MN} \sum_{X \in AMN \cap b} \text{sign } X, \quad \text{where}$$

- the first summation is over edges MN of a oriented from M to N ;
- for each point $X \in AMN \cap b$ the sign $\text{sign } X$ of X is ± 1 according to the Left hand rule applied from the oriented triangle APQ and a small oriented part of b near X .

2.12. (a) $\text{lk}(a, b)$ is well-defined, i.e. is independent of A . (Hint: state and prove suitable generalization of the Parity Lemma 1.25, cf. Problem 1.26.b.)

- (b) For each n there are oriented curves a and b such that $\text{lk}(a, b) = n$.
- (c) $\text{lk}(a, b) = \text{lk}(b, a)$.
- (d) Reversing the orientation of either of the curves negates the linking number.
- (e) Taking the mirror image negates the linking number.

2.13. (a) Find the linking numbers of pairs of curves from Figure 17.bw and in [Pr95, Fig. 3.16, 3.17] for some orientations on the curves.

(b) Assume that a plane is in general position to the union of two curves. On the projection of the curves onto the plane show which of the sides passes above the other at the intersection points. Then $\text{lk}(a, b)$ equals to the number of *signs* (give definition!) of all those intersection points at which a passes above b .

- (c) The linking number is preserved under piecewise linear isotopy.

Note that for two disjoint *smooth* closed curves $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ we have

$$\text{lk}(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{[0, 2\pi]^2} \frac{\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)}{|\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)|^3} \wedge \gamma'_1(t_1) \wedge \gamma'_2(t_2) dt_1 dt_2.$$

Пример 2.14. *There are two curves which are linked (i.e. not piecewise linearly isotopic to curves contained in disjoint cubes) but whose linking number is 0.*

The example is the Whitehead link (Fig. 17.w). The proof is sketched in §2.6.

2.15. Two links $f_0, f_1 : X \sqcup Y \rightarrow \mathbb{R}^3$ are *link homotopic* if there is a family $f_t : X \sqcup Y \rightarrow \mathbb{R}^3$ of links continuously depending on t and such that $f_t(X) \cap f_t(Y) = \emptyset$ for each t .

(a) Pairs of oriented spatial polygons a, b and a', b' are link homotopic if and only if $\text{lk}(a, b) = \text{lk}(a', b')$.

(b) Take the link whose first component is one of the *Borromean rings* (fig. 17.b) and whose second component is the union of two other rings. This link is link homotopic to the standard link.

(c) Pairs of embeddings of graphs in \mathbb{R}^3 are link homotopic if and only if collections of their linking coefficients are the same.

2.4 Кольца Борромео и коммутаторы

2.16. (a) Как на двух гвоздях, вбитых в плоскую стену, подвесить замкнутую веревку (с тяжелой медалью), чтобы веревка не падала, но после вынимания любого гвоздя падала?

(b) То же для трех гвоздей.

(c) Как зацепить три резиновых кольца в пространстве, чтобы их нельзя было расцепить, но после разрезания любого из них они расцеплялись?

(d) То же для четырех колец.

Рис. 18: Три лика колец Борромео, www.mccme.ru/circles/oim/algofig.pdf

Подсказка: $aba^{-1}b^{-1}$.

Rigorous formulation of Problem 2.16.c is as follows. Piecewise linearly isotopy of *triples* of pairwise disjoint curves is defined analogously to §2.2.

Пример 2.17. *There are three curves which are pairwise unlinked but linked together (i.e. each two are piecewise linearly isotopic to curves which are contained in disjoint cubes, but all the three of them are not). See Fig. 17.b and 18.*

Нестандартное построение. См. рис. 18 внизу. Рассмотрим стандартный тор в трехмерном пространстве. Первая кривая — окружность вне тора, близкая к меридиану тора. Вторая кривая — окружность вне тора, зацепленная со вторым меридианом тора, и пересекающая тор в двух точках. Третья кривая — кривая на торе, близкая к границе квадрата, полученного из тора разрезанием вдоль параллели и меридиана.

Ясно, что построенные кривые попарно не зацеплены.

Следующее доказательство основано на понятии *фундаментальной группы* (см., например, [Sk, п. 10.5]; другое доказательство приведено в п. 2.5).

Доказательство нерасцепляемости в примере 2.17. Обозначим через S и S' первую и вторую кривую. Группа $\pi_1(\mathbb{R}^3 - S - S')$ изоморфна свободной группе с двумя образующими. Параллель и меридиан тора (произвольно ориентированные) представляют первую и вторую образующие, соответственно. Третья кривая представляет их коммутатор. Так как он не равен единице, то ее невозможно стягнуть с $S \cup S'$. QED

Analogously, for each r one can construct r curves such that each subset of $r - 1$ curves is unlinked, while all the r curves together are linked.

2.18. В трехмерном пространстве существуют непересекающиеся кривые S, S' , не пересекающие стандартный тор, для которых

- S не зацеплена по модулю 2 с меридианом тора, а S' — с параллелью;
- S зацеплена по модулю 2 с параллелью тора, а S' — с меридианом.

(*Стандартным тором* называется фигура, образованная вращением окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ вокруг оси Oy .)

Следующие леммы 2.19 и 2.31 о кольцах Борромео используются только в п. 4.10. Определение *кусочно-линейного вложения* 2-комплекса в \mathbb{R}^m аналогично данному в п. 2.1 для графов.

Лемма 2.19 (о кольцах Борромео). (a) *В трехмерном пространстве даны кусочно-линейно вложенные тор и непересекающиеся диски D, D' , для которых*

- D' не пересекает параллели тора, а D — меридиана,
- ∂D зацеплено по модулю 2 с параллелью тора, а $\partial D'$ с меридианом.

Тогда либо ∂D , либо $\partial D'$ пересекают тор.

(b) В трехмерном пространстве даны кусочно-линейно вложенные тор и кривые S, S' , пересекающихся ровно в одной точке, для которых выполнены 4 свойства из задачи 2.18. Тогда тор пересекает обединение кривых.

Если бы в пункте (a) ни ∂D , ни $\partial D'$ не пересекали тор, то кривую X на торе, близкую к границе квадрата, полученного из тора разрезанием по параллели и меридиану, можно было стянуть с $\partial D \cup \partial D'$ по тору. Но это невозможно аналогично доказательству нерасцепляемости в примере 2.17. Итак, пункт (a) показывает, что пересечение тора с одним из колец Борромео в примере 2.17 не случайно.

Доказательство пункта (a) предлагаем читателю завершить самостоятельно. Доказательство пункта (b) аналогично, но использует теорему Столлингса о нижнем центральном ряде группы, см. [FKT94, Lemma 7].

2.5 Massey-Milnor number modulo 2

For proving that the curves in Examples 2.17 and 2.14 are linked we need the following notions which are interesting in themselves.

A *Seifert chain* of curve a is a finite collection S of triangles in space such that

- each side of a is the side of exactly one triangle from S ;
- each segment that is not a side of a is the side of an even number (possibly, zero) of triangles from S .

An example can be obtained from a singular cone $A * a$ for any A . Cf. [Pr95, §3].

The *support* $|S|$ of a Seifert chain S is the union of its triangles.

Let a and b be disjoint curves. A Seifert chain S of a is *in general position to b* if b intersects any triangle from S by a finite number of interior points. Below we tacitly assume that Seifert chains are general position Seifert chains. Define the intersection of S and b by

$$S \cap b := \sum_{\Delta \in S} |\Delta \cap b| \in \mathbb{Z}_2.$$

2.20. (a) The following conditions are equivalent:

- curves a and b are not linked modulo 2;
- there is a Seifert chain of a intersecting b by $0 \in \mathbb{Z}_2$
- each Seifert chain of a intersects b by $0 \in \mathbb{Z}_2$
- there is a Seifert chain of a whose support misses b .

(b) If curve a is not linked modulo 2 with each of curves b and c , then there is a Seifert chain of a whose support misses $b \cup c$.

Let a_1, a_2 and a_3 be curves in space pairwise not linked modulo 2. By Problem 2.20.b there are their Seifert chains S_1, S_2 and S_3 such that $|S_k| \cap (a_{k+1} \cup a_{k+2}) = \emptyset$ for each $k = 1, 2, 3$ (here and after Problem 2.23 numbering is modulo 3). Moreover, we may take Seifert chains *in general position*, i.e. so that $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3$ is either empty or a point for each triangles $\Delta_k \in S_k$, $k = 1, 2, 3$. The curves a_1, a_2, a_3 are *linked modulo 2* if the number of intersecting triples $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ is odd:

$$\sum_{\Delta_k \in S_k, k=1,2,3} |\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3| = 1 \in \mathbb{Z}_2.$$

2.21. (a) Assuming that being linked modulo 2 is well-defined, prove that the Borromean rings (Fig. 17) are linked modulo 2.

(b) Assuming that being linked modulo 2 is well-defined, find out if the curves in [Pr95, Figure 3.17] are linked modulo 2.

- (c) Being linked modulo 2 is well-defined, i.e. is independent of general position S_1, S_2 and S_3 .
- (d) How does being linked modulo 2 depends on permutations of three curves?
- (e) The property of being linked modulo 2 is preserved under piecewise linear isotopy.

2.22. Let S_1 and S_2 be Seifert chains of curves a_1 and a_2 such that $|S_1| \cap a_2 = |S_2| \cap a_1 = \emptyset$. Assume that S_1 and S_2 are in *general position*, i.e. that $\Delta_1 \cap \Delta_2$ is either empty or a non-degenerate segment each triangles $\Delta_1 \in S_1$ and $\Delta_2 \in S_2$. Define $S_1 \cap S_2 := \{\Delta_1 \cap \Delta_2 : \Delta_1 \in S_1, \Delta_2 \in S_2\}$ to be the collection of such intersections. A *1-cycle* is a collection of segments such that each point is the side of an even number (possibly, zero) of segments from the collection. The property of being linked modulo 2 for cycles is defined analogously to §2.2.

- (a) $S_1 \cap S_2$ is a 1-cycle.
- (b) Three curves a_1, a_2, a_3 in space pairwise not linked modulo 2 are linked modulo 2 if and only if a_3 is linked modulo 2 to the 1-cycle $S_1 \cap S_2$, for some (or, equivalently, for any) general position Seifert chains S_1 and S_2 as above.

Analogously one can define and use the property of being linked modulo 2 for r curves.

2.6 Massey-Milnor and Sato-Levine numbers

- 2.23.** Let a and b be disjoint oriented curves.
- (a) Define an *oriented* Seifert chain using Figure 19. Define the intersection of b and an oriented Seifert chain S_a of a .
 - (b) $\text{lk}(a, b) = S_a \cap b$.
 - (c) $\text{lk}(a, b) = 0$ if and only if there is an oriented Seifert chain S of a whose support misses b .
 - (d) If c is a curve disjoint with $a \cup b$ and $\text{lk}(a, b) = \text{lk}(a, c) = 0$, then there is an oriented Seifert chain of a whose support misses $b \cup c$.

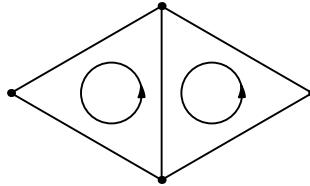


Рис. 19: Agreeing orientations

Let a_1, a_2, a_3 be oriented pairwise disjoint curves in space such that $\text{lk}(a_k, a_{k+1}) = 0$. By Problem 2.23.b there are their oriented Seifert chains S_1, S_2 and S_3 such that $|S_k| \cap (a_{k+1} \cup a_{k+2}) = \emptyset$ for each $k = 1, 2, 3$. Moreover, we may take Seifert chains in *general position*, i.e. so that $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3$ is either empty or a point for each triangles $\Delta_k \in S_k$, $k = 1, 2, 3$. The *Massey-Milnor number* $\mu(a_1, a_2, a_3)$ is the sum of *signs* of such oriented intersections:

$$\mu(a_1, a_2, a_3) := \sum_{\Delta_k \in S_k, k=1,2,3} \text{sign}(\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3) \in \mathbb{Z}.$$

- 2.24.** (a) Assuming that the Massey-Milnor number is well-defined, find it for certain orientation of the Borromean rings and for three curves from [Pr95, Figure 3.17].
- (b) $\mu(a_1, a_2, a_3)$ is well-defined, i.e. is independent of general position S_1, S_2 and S_3 .
 - (c) Give an example of three curves whose Massey-Milnor number is greater than 5.
 - (d) How does the Massey-Milnor number depend on the permutations of three curves?
 - (e) How reversing the orientation of either of the curves changes the Massey-Milnor number?

- (f) How taking the mirror image changes the Massey-Milnor number?
- (g) The Massey-Milnor number is preserved under piecewise-linear isotopy.

Let a and b be oriented curves in space such that $\text{lk}(a, b) = 0$. By Problem 2.23.b there are their oriented Seifert chains S_a and S_b such that $|S_a| \cap b = \emptyset = a \cap |S_b|$. We may assume that S_1 and S_2 are in general position. Then by Problem 2.22.a $S_a \cap S_b$ is a 1-cycle. Its segments have a *natural orientation* (define!). Let a' be the *shift of $S_a \cap S_b$ along S_a* (define!). The *Sato-Levine number* of a and b is

$$\text{sl}(a, b) := \text{lk}(S_a \cap S_b, a').$$

2.25. (You may start with mod 2 analogue.)

- (a) Assuming that the Sato-Levine number is well-defined, find it for the Whitehead link (Fig. 17.b) and for [Pr95, Figure 3.16].
- (b) $\text{sl}(a, b)$ is well-defined, i.e. is independent of general position S_a and S_b .
- (c) For each even n there are oriented curves a and b such that $\text{sl}(a, b) = n$.
- (d) Is $\text{sl}(a, b) = \text{sl}(b, a)$?
- (e) How reversing the orientation of either of the curves changes the Sato-Levine number?
- (f) How taking the mirror image changes the Sato-Levine number?
- (g) The Sato-Levine number is preserved under piecewise linear isotopy.
- (h) Prove or disprove: $\text{sl}(a, b \# c) = \pm 2\mu(a, b, c)$.

2.7 Зацепленность в многомерном пространстве

Определение (*кусочно-линейной*) изотопности в \mathbb{R}^m аналогично данному в 2.2. Непересекающиеся объекты в \mathbb{R}^m *зацеплены*, если они не изотопны таким, которые содержатся в непересекающихся шарах.

2.26. (a) Если 6 вершин двух треугольников в \mathbb{R}^4 находятся в общем положении, то контур первого не пересекает внутренности второго.

- (b) Любая кривая в \mathbb{R}^4 изотопна стандартной.
- (c) Любые две кривые в \mathbb{R}^4 не зацеплены.
- (d) Объединение любых двух кривых в \mathbb{R}^4 изотопно стандартному.

Треугольник и тетраэдр в \mathbb{R}^4 , 7 вершин находятся в общем положении, назовем *зацепленными по модулю 2*, если треугольник пересекает поверхность тетраэдра ровно в одной точке.

2.27. (a) Приведите пример треугольника и тетраэдра, зацепленных по модулю 2 .

(b) Могут ли треугольник и поверхность тетраэдра в \mathbb{R}^4 пересекаться ровно в 3 точках?

2.28. Обозначим через T и Δ выпуклые оболочки треугольника и тетраэдра в \mathbb{R}^4 , а через ∂T и $\partial \Delta$ — их контур и поверхность, соответственно. Следующие условия равносильны:

- (1) $|T \cap \partial \Delta| = 1$, т.е. треугольник и тетраэдр зацеплены.
- (1') $|\partial T \cap \Delta| = 1$.
- (2) $|T \cap \partial \Delta|$ нечетно
- (2') $|\partial T \cap \Delta|$ нечетно
- (3) плоскость треугольника либо не пересекает Δ , либо пересекает Δ по отрезку, один конец которого лежит в T , а другой — нет.
- (3') гиперплоскость тетраэдра либо не пересекает T , либо пересекает T по отрезку, один конец которого лежит в Δ , а другой — нет.
- (4) Прямая l пересечения плоскости треугольника и гиперплоскости тетраэдра пересекает каждый из них по паре точек и эти пары чередуются на прямой l .

Полиэдральной (или кусочно-линейно вложенной) сферой в \mathbb{R}^m называется конечное связное вложенное семейство треугольников в \mathbb{R}^m , для которого

- для каждой вершины v одного из треугольников множество всех треугольников семейства, ее содержащих, образует ‘цепочку’ $\{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\} \dots \{v, a_{n-1}, a_n\}, \{v, a_n, a_1\}$ для некоторых попарно различных вершин a_1, \dots, a_n треугольников семейства.

- $V - E + F = 2$ для количеств F треугольников, V их вершин и E их сторон.

2.29. (a) Определите зацепленность по модулю 2 для непересекающихся кривой и полиэдральной сферы в \mathbb{R}^4 .

(b) Существуют зацепленные кривая и полиэдральная сфера в \mathbb{R}^4 .

(c) Определите коэффициент зацепления для непересекающихся ориентированных кривой и полиэдральной сферы в \mathbb{R}^4 .

Пример 2.30. (a) В \mathbb{R}^4 существуют попарно непересекающиеся кривая, полиэдральная сфера и полиэдральная сфера, из которых любые два объекта без третьего можно растянуть в непересекающиеся шары, а все три вместе — нельзя.

(b) Существуют зацепленные кривая и полиэдральная сфера в \mathbb{R}^4 , коэффициент зацепления которых равен нулю (при любой ориентации).

(c) (Artin, 1925) Существует заузленная полиэдральная сфера в \mathbb{R}^4 .

(d) (Rolfsen, 1975) Существуют две зацепленные незаузленные полиэдральные сферы в \mathbb{R}^4 . (Их коэффициент зацепления равен нулю, ибо принимает значения в группе $H_2(\mathbb{R}^4 - f(S^2); \mathbb{Z}) = 0$.)

Лемма 2.31 (о кольцах Борромео). В четырехмерном пространстве даны кусочно-линейно вложенные тор и непересекающиеся полиэдральные сферы S, S' , для которых выполнены свойства из задачи 2.18. Тогда тор пересекает обединение сфер.

Эта лемма доказывается аналогично лемме 2.19.b.

2.32. Для любых ли 3 из 4 свойств задачи 2.18 в четырехмерном пространстве существуют попарно непересекающиеся кусочно-линейно вложенный тор и полиэдральные сферы S, S' , для которых выполнены эти 3 свойства?

2.33. (a) Определите зацепленность по модулю 2 для двух непересекающихся полиэдральных сфер в \mathbb{R}^5 .

(b) Существуют две зацепленные полиэдральные сферы в \mathbb{R}^5 .

(c) Определите коэффициент зацепления для двух непересекающихся ориентированных полиэдральных сфер в \mathbb{R}^5 .

(d)* Если коэффициент зацепления двух непересекающихся полиэдральных сфер в \mathbb{R}^5 равен нулю (при некоторой ориентации), то эти сферы не зацеплены.

(e)* Любая полиэдральная сфера в \mathbb{R}^5 изотопна стандартной.

2.34. (abcde) Сформулируйте и докажите аналог предыдущей задачи для n -мерных полиэдральных сфер в \mathbb{R}^{2n+1} .

Теорема. Для многообразия N обозначим через $E^m(N)$ множество вложений $N \rightarrow \mathbb{R}^m$ с точностью до изотопии.

(a) Отображение $\text{lk} : E^{2n+1}(S_1^n \sqcup S_2^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ является биекцией при $n \geq 2$.

(b) Набор попарных коэффициентов зацепления $E^{2n+1}(S_1^n \sqcup S_2^n \sqcup \dots \sqcup S_k^n) \rightarrow \mathbb{Z}^{\frac{k(k-1)}{2}}$ является биекцией при $n \geq 2$.

(c) Если N_1, \dots, N_s — n -мерные многообразия, среди которых k замкнутых, то при $n \geq 2$ существует биекция $E^{2n+1}(N_1 \sqcup N_2 \sqcup \dots \sqcup N_s) \rightarrow \mathbb{Z}^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

В высших размерностях существуют [Sk08, §3], [MA] и заузленные сферы $S^n \subset \mathbb{R}^m$, и аналогичные примерам 2.17 и 2.30.а ‘кольца Борромео’

$S^1 \sqcup S^3 \sqcup S^3 \subset \mathbb{R}^5$, $S^2 \sqcup S^2 \sqcup S^3 \subset \mathbb{R}^5$, $S^1 \sqcup S^4 \sqcup S^4 \subset \mathbb{R}^6$, $S^2 \sqcup S^3 \sqcup S^4 \subset \mathbb{R}^6$, $S^3 \sqcup S^3 \sqcup S^3 \subset \mathbb{R}^6$.

2.8 Инвариант Ван Кампена заузленных графов

Два вложения $f, g : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ называются (*кусочно-линейно оббемлемо*) изотопными, если существует такой кусочно-линейный гомеоморфизм $F : \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R}^m \times I$, что

- (i) $F(y, 0) = (y, 0)$ для любого $y \in \mathbb{R}^m$,
- (ii) $F(f(x), 1) = (g(x), 1)$ для любого $x \in N$, и
- (iii) $F(\mathbb{R}^m \times \{t\}) = \mathbb{R}^m \times \{t\}$ для любого $t \in I$.

Этот гомеоморфизм F называется (*объемлющей*) изотопией. (*Объемлющей*) изотопией также называют гомотопию $\mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ или семейство отображений $F_t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, очевидным образом порожденные отображением F .

Критерий изотопности. Вложения $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа в плоскость изотопны тогда и только тогда, когда их инварианты Ван Кампена совпадают.

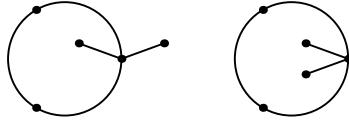


Рис. 20: Различные вложения графа в плоскость

Инвариант Ван Кампена определен далее в этом параграфе.

Существуют и более простые критерии изотопности [Sk05]. В отличие от них, приведенный критерий обобщается на старшие размерности (задача 2.39); этим он и интересен. См. также [Pe08].

Для вложения $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ определим группу $H_s^1(\widehat{G})$ (общепринятое обозначение: $H^1(G^*; \mathbb{Z}_T)$) и инвариант Ван Кампена $U_2(f) \in H_s^1(\widehat{G})$. Для этого зададим ориентацию на плоскости и направления на ребрах графа G .

Соединим образы вершин графа ломаной L .

Возьмем вершину a и ребро bc графа G , ориентированное от b к c , $a \notin \{b, c\}$.

Если ломаная L лежит на прямой, то определим полуцелое число $\omega(f, L)_{a \times bc}$ как количество оборотов вектора с началом в вершине $f(a)$ и концом, пробегающим ребро $f(bc)$ от $f(b)$ к $f(c)$. Это число не будет целым в точности тогда, когда $f(a)$ лежит между $f(b)$ и $f(c)$ на ломаной L .

Пусть теперь ломаная L произвольна. Построим ориентированный цикл, образованный ребром $f(bc)$ и участком ломаной L от $f(c)$ до $f(b)$. Если $f(a)$ лежит между $f(b)$ и $f(c)$ на ломаной L , то возьмем прямолинейные отрезки $a_+f(a)$ и $f(a)a_-$ ломаной L , не содержащие образов вершин графа G , отличных от a . Заменим в этом цикле путь $a_+f(a)a_-$ на отрезок a_+a_- . Определим $\omega(f, L)_{a \times bc}$ как количество оборотов вектора с началом в вершине $f(a)$ и концом, пробегающим замененный цикл.

Аналогично определим $\omega(f, L)_{bc \times a}$.

2.35. (a) Для любой вершины a и ребра bc графа G , $a \notin \{b, c\}$, имеем $\omega(f, L)_{a \times bc} = \omega(f, L)_{bc \times a}$.

(b) Для любых непересекающихся ребер ab и cd графа G имеем

$$\omega(f, L)_{a \times cd} + \omega(f, L)_{ab \times d} + \omega(f, L)_{b \times dc} + \omega(f, L)_{ba \times c} = 0,$$

где $\omega(f, L)_{x \times yz} := -\omega(f, L)_{x \times zy}$ и $\omega(f, L)_{yz \times x} := -\omega(f, L)_{zy \times x}$, если ребро zy ориентировано от z к y .

Построим новый граф \widehat{G} . Вершины графа \widehat{G} — пары $a \times b$, где a и b — различные вершины графа G . Вершина $a \times b$ соединена ребром с вершиной $a \times c$, если b и c соединены ребром в исходном графе G . Аналогично $b \times a$ и $c \times a$ соединены ребром, если b и c соединены ребром. Других ребер в графе \widehat{G} нет.

- 2.36.** (a) Если G — цикл с тремя вершинами, то \widehat{G} — цикл с шестью вершинами.
 (b) Если G — триод, т.е. граф с четырьмя вершинами $0, 1, 2, 3$ и ребрами $01, 02, 03$, то \widehat{G} — окружность с двенадцатью вершинами.
 (c) Если $a \times b$ и $b \times a$ соединены путем в графе \widehat{G} , то сумма поставленных полуцелых чисел на ребрах этого пути не является целой.

Возьмем на ребре $(a \times b, a \times c)$ направление, соответствующее направлению на ребре bc . Обозначим построенную расстановку чисел $\omega(f, L)_{a \times bc}$ и $\omega(f, L)_{bc \times a}$ на (ориентированных) ребрах графа \widehat{G} через $\omega(f, L)$.

Определим *элементарную кограницу* $\delta(a \times b)$ вершины $a \times b$ как расстановку чисел $+1/2$ на ребрах графа \widehat{G} , входящих в $a \times b$, чисел $-1/2$ на ребрах, выходящих из $a \times b$, и 0 на остальных. Определим *элементарную симметричную кограницу* вершины $a \times b$ как $\delta_s(a \times b) := \delta(a \times b) + \delta(b \times a)$.

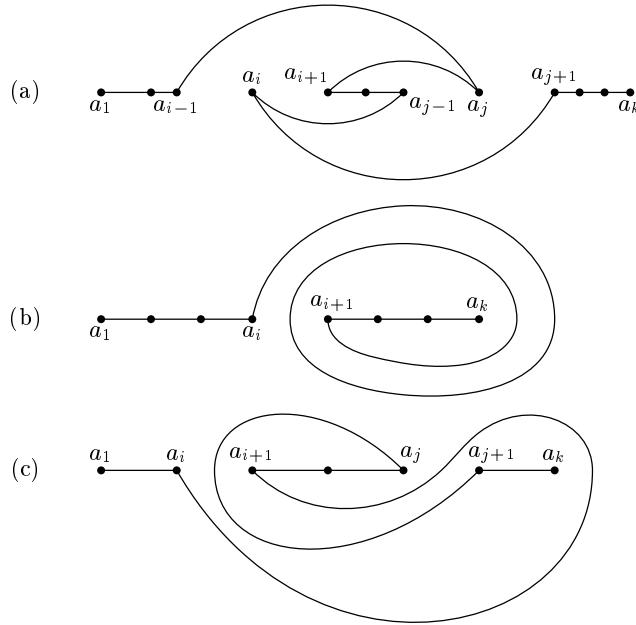


Рис. 21: Изменение препятствующей расстановки. Заменить a_x на x .

- 2.37.** (a) Пусть ломаные L и L' , соединяющие образы вершин графа G , отличаются тем, что вершины i и j , $i < j$, поменяли местами. См. рисунок 21(а), на котором изображена ломаная L' , а не ребра графа G ; ломаная L предполагается горизонтальной. На ломаной L вершины имели порядок $(1, \dots, n)$, а на ломаной L' порядок вершин $(1, \dots, i-1, j, i+1, \dots, j-1, i, j+1, \dots, k)$. Тогда $\omega(f, L') - \omega(f, L) = \sum_{i < q < j} (\pm \delta_s(q \times i) \pm \delta_s(q \times j))$, где знаки плюс и минус выбираются не обязательно согласованно.

(b) Пусть ребро $(i, i+1)$ ломаной L закрутили n -кратно вокруг пути $i+1, \dots, k$ и получили ломаную L' . См. рисунок 21(б). Тогда $\omega(f, L') - \omega(f, L) = \sum_{i < q} n \delta_s(i \times q)$.

(c) Найдите $\omega(L') - \omega(L)$ для изменения ломаной, изображенного на рисунке 21(с).

(d)* Пусть для одного вложения $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ построены две ломаные L и L' , соединяющие образы вершин графа G . Тогда разность $\omega(f, L') - \omega(f, L)$ является суммой элементарных симметричных кограниц с целыми коэффициентами. Указание. Аналогично случаю препятствия Ван Кампена.

Назовем расстановки ω_1 и ω_2 *когомологичными*, если $\omega_1 - \omega_2$ является суммой элементарных симметричных кограниц с целыми коэффициентами. Определим группу $H_s^1(\widehat{G})$

как группу расстановок, удовлетворяющих условиям из задач 2.35.ab и 2.36.c, с точностью до когомологичности. Определим инвариант Ван Кампена как

$$U_2(f) = [\omega(f')] \in H_s^1(\widehat{G}).$$

Корректность определения вытекает из задачи 2.37.d. Необходимость в критерии изотопности очевидна. Для доказательства достаточности по теореме Маклейна-Эдкиссона об изотопности вложений графа в плоскость [Sk05] остается решить следующую задачу.

2.38. Инвариант Ван Кампена различает вложения

- (a) окружности в плоскость, отличающиеся осевой симметрией.
- (b) триода в плоскость, отличающиеся перестановкой двух из трех его ребер.

2.39. (a) Для графа G определите инвариант Ван Кампена $U(f) \in H^2(K^*; \mathbb{Z})$ вложения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(b) Для n -мерного комплекса K определите инвариант Ван Кампена $U(f) \in H^{2n}(K^*; \mathbb{Z})$ вложения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.

(c)* Если $n \geq 2$ и $U(f) = U(g)$, то вложения f и g изотопны.

(d)* Для $n \geq 2$ существует алгоритм распознавания изотопности линейных вложений n -комплекса в \mathbb{R}^{2n+1} .

Указания и решения к некоторым задачам

2.1. (a) 5 точек можно привести в общее положение, не изменяя ни одного из рассматриваемых свойств. By hypothesis, the number of intersection points of segment 12 and the outline of triangle 345 equals to the number of intersection points of interiors of segments joining the points. This is odd by the Intersection Property 1.1.

2.4. (b) G — цикл длины 4.

2.6. (a) One triangle inside the other in the plane.

2.7. Recall that XYZ is the 2-dimensional (closed) triangle XYZ . Denote by $\partial(XYZ)$ the outline of a triangle XYZ and by $\partial(XYZT)$ the outline of a tetrahedron $XYZT$.

(a) Assume that a pair of points A, A' is in *general position* to (a, b) (define!). Then

$$\sum_{MN} (|AMN \cap b| + |A'MN \cap b|) \equiv_2 \sum_{MN} |\partial(AA'MN) \cap b| \equiv_2 0.$$

Here the summation is over edges MN of a . The third congruence follows by the Parity Lemma 1.25.b.

(b) Assume that a pair of points A, B is in *general position* to the pair of curves a and b (define!). Then

$$\begin{aligned} \sum_{MN} |AMN \cap b| &= \sum_{MN, PQ} |AMN \cap PQ| \equiv_2 \sum_{MN, PQ} |AMN \cap \partial(BPQ)| \equiv_2 \\ &\equiv_2 \sum_{MN, PQ} |\partial(AMN) \cap BPQ| \equiv_2 \sum_{PQ} |a \cap BPQ|. \end{aligned}$$

Here the summation is over pairs of edges MN of a and PQ of b . The second congruence follows because

- either $AMN \cap BPQ = \emptyset$, then $AMN \cap \partial(BPQ) = \partial(AMN) \cap BPQ = \emptyset$,
- or $AMN \cap BPQ$ is a non-degenerate segment, which has 2 endpoints, so $|\partial(AMN) \cap BPQ| \equiv_2 |\partial(AMN) \cap BPQ|$.

The last congruence follows analogously to the first equality and the first congruence.

(c) Use the Projection Lemma 2.8.

2.9. For *general position* piecewise linear isotopy (define!) the assertion follows by the Parity Lemma 1.25.a. Piecewise linear isotopy can be decomposed into general position piecewise linear isotopies.

2.19. (a) Так как диски D, D' кусочно-линейно вложены и не пересекаются, то зацепление $\partial D \sqcup \partial D'$ изотопно стандартному. Поэтому группа $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \partial D \sqcup \partial D')$ изоморфна свободной группе с двумя образующими. Так как параллель тора не пересекает D' и зацеплена по модулю 2 с ∂D , то параллель представляет нечетную степень одной из образующих. Аналогично меридиан тора представляет нечетную степень другой образующей. Обозначим через S кривую на торе, близкую к границе квадрата, полученного из тора разрезанием по параллели и меридиану. Окружность S представляет коммутатор этих образующих, который не равен единице. Но S гомотопна нулю в торе. Поэтому он пересекает либо ∂D , либо $\partial D'$.

2.12.ac, 2.13.abc. Analogously to the mod 2 case.

2.30. Рассмотрим (построенные ранее) кольца Борромео в \mathbb{R}^3 . Рассмотрим \mathbb{R}^3 как гиперплоскость в \mathbb{R}^4 . Построим две непересекающиеся сферы в \mathbb{R}^4 , которые пересекают гиперплоскость по первому и по второму из колец Борромео, соответственно. Эти две сферы вместе с третьим кольцом Борромео — искомые.

3 Устойчивость самопересечений графов на плоскости

3.1 Аппроксимируемость путей вложениями

Начнем с наглядных задач, поясняющих проблему аппроксимируемости вложениями. См. [Mi97], [RS96, §9], [CRS98, §4], [RS98, §1], [ARS02, §4].

3.1. (a) Охотник гуляет по лесной дорожке, имеющей форму прямолинейного отрезка (длины 1 км). При этом он может менять направление своего движения. Он ведет на поводке длиной 1 м собаку (т.е. расстояние между собакой и охотником не превосходит 1 м). Докажите, что независимо от движения охотника собака может двигаться так, чтобы не пересекать свой след.

(b) То же для дорожки в форме окружности (радиуса 1 км).

(c) Два охотника прошли (равномерно не меняя направления, в отличие от a и b) по прямолинейным дорожкам, пересекающимся под прямым углом в точке, отстоящей от каждого из их концов на 1 км (рис. 22, на котором $f(I_1)$ и $f(I_2)$ — пути охотников). Каждый из них вел на поводке длины 1 м собаку. Докажите, что одна собака пересекала следы другой.

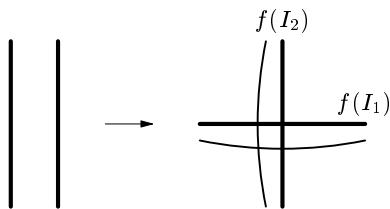


Рис. 22: Трансверсальное пересечение не аппроксимируемо вложениями

3.2. (a) Охотник (равномерно не меняя направления) двигался по лесной дорожке в форме окружности диаметром 1 км, сделав два оборота. Он вел на поводке длиной 1 м собаку, которая в конце движения вернулась в исходную точку. Докажите, что собака обязательно пересекала свой след (в некоторый момент времени, отличный от конечного).

(b) Верно ли (a) без предположения о том, что собака в конце движения вернулась в исходную точку?

(c) Докажите аналог (a) для случая, когда охотник сделал *три* оборота.

(d) Для какого числа оборотов в (a) собака обязательно пересекала свой след?

Приведем формальные определения. Обозначим через $I := [0, 1]$ отрезок и через $S^1 := \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ окружность. Все отображения считаются непрерывными, если не оговорено противное. Впрочем, реально сформулированные задачи будут изучаться для *кусочно-линейных* вложений. *Вложением* называется изображение без самопересечений (или, формально, непрерывное инъективное отображение, если мы работаем с *конечными* графами или 2-полиэдрами).

Путь $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ на плоскости называется *аппроксимируемым вложением*, если существует сколь угодно близкий к нему путь без самопересечений. Или, формально, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое вложение $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, что расстояние между точками $f(x)$ и $\varphi(x)$ меньше ε для любой точки $x \in I$. Аналогично определяется аппроксимируемость вложениями *цикла* $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и даже произвольного отображения $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа G .

Строгие формулировки задач 3.1 и 3.2.а таковы:

- если образом $\varphi(I)$ пути $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ является отрезок или окружность, то этот путь аппроксимируем вложениями;

- трансверсальное пересечение $\varphi : I_1 \sqcup I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (рис. 22) не аппроксимируется вложениями;
- композиция $\varphi : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ двукратной намотки и стандартного включения не аппроксимируется вложениями.

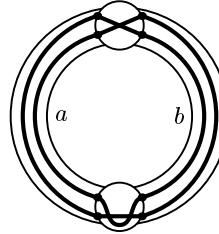


Рис. 23: Полянки и тропинки

Приведем эквивалентную комбинаторную формулировку задачи 3.2.а (эквивалентность доказана в [Mi97]). Рассмотрим две полянки (т.е. два круга), соединенных двумя тропинками (т.е. полосками) a и b , как на рис. 23. Собака бегала по полянкам и тропинкам и вернулась в исходную точку. Каждый раз, когда собака перебегала с полянки на тропинку, она записывала обозначение этой тропинки. В задаче 3.2.а утверждается, что если получилась запись $abab$, то собака обязательно пересекала свой след (в некоторый момент времени, отличный от конечного).

3.3. (а) Путь или цикл в графе называется *эйлеровым*, если он проходит по каждому ребру графа ровно один раз. Эйлеров путь или цикл в графе на плоскости аппроксимируем вложениями тогда и только тогда, когда он не имеет трансверсальных самопересечений (рис. 22).

(б) Существует путь, не содержащий трансверсальных пересечений и не аппроксимируемый вложениями.

(с) Композиция $\varphi : S^1 \rightarrow I \subset \mathbb{R}^2$ произвольного отображения и стандартного включения аппроксимируется вложениями.

(д) Пусть P — граф, гомеоморфный букве P . Композиция $\varphi : P \rightarrow I \subset \mathbb{R}^2$ произвольного отображения и стандартного включения аппроксимируется вложениями.

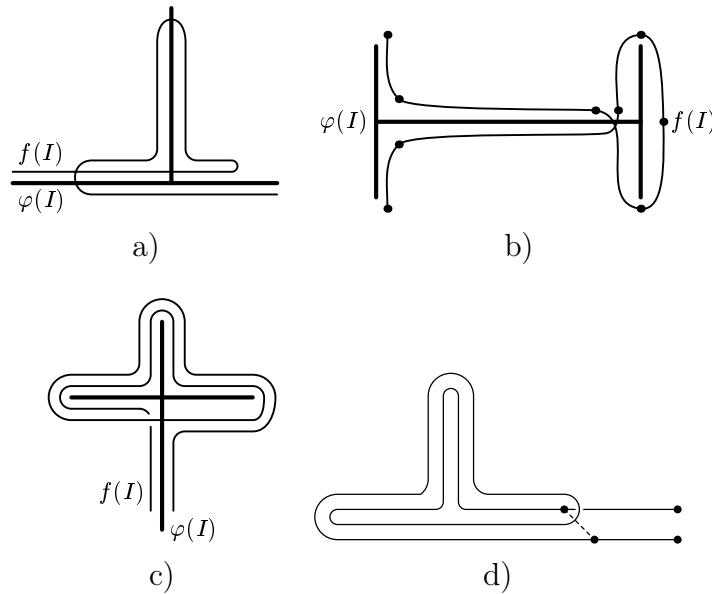


Рис. 24: Пути, не аппроксимируемые вложениями

Примеры к задаче 3.3.b приведены на рис. 24, где для наглядности нарисован не сам путь, а близкий к нему путь общего положения. См., впрочем, [Mi97], [Sk03'].

3.4. (abcd) Пути на рис. 24 не аппроксимируются вложениями.

Проблема аппроксимируемости пути вложениями похожа на классическую проблему планарности графов (§2) и даже сводится к распознаванию планарности графов. Впрочем, число графов, планарность которых надо выяснить для одного данного пути, велико. Проблема планарности графов решается, например, критерием Куратовского. Для проблемы аппроксимируемости вложениями аналогичного критерия не существует [Sk03'].

Проблема аппроксимируемости путей вложениями интересна не только с точки зрения теории графов, но и с точки зрения топологии: она является частным случаем проблемы реализации отображений графов в плоскости, см. §3.6, [Si69], [SS83], [RS98], [Ak00], [ARS02], [Sk03'].

Нетрудно также доказать, что *проблема аппроксимируемости вложениями алгоритмически разрешима* [Sk03']. Однако интересно получить более быстрый алгоритм распознавания аппроксимируемости вложениями. Возможно, критерий в терминах препятствия Ван Кампена (см. далее) даст такой более быстрый алгоритм.

Сформулируем близкую и, возможно, более простую, проблему. Пара путей $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ на плоскости называется *разводимой*, если существуют сколь угодно близкие к ним пути без пересечений. Или, формально, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие пути $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, что расстояние между точками $f(x)$ и $\varphi(x)$, а также между $g(x)$ и $\psi(x)$, меньше ε для любой точки $x \in [0, 1]$.

3.5. (a) Если образами путей $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ являются отрезок или окружность, то эти пути разводимы.

(b) Существует не разводимая пара путей, не содержащая трансверсальных пересечений.

(c)* Найдите быстрый алгоритм распознавания разводимости для кусочно-линейных путей на плоскости.

Для отображений *графов* в плоскость можно ввести аналогичное понятие разводимости и поставить аналогичные проблемы.

3.2 Идея построения препятствия Ван Кампена

Чтобы объяснить идею построения препятствия Ван Кампена, приведем наброски некоторых решений. Ср. с утверждениями 1.1, 2.3 и задачей 2.4.

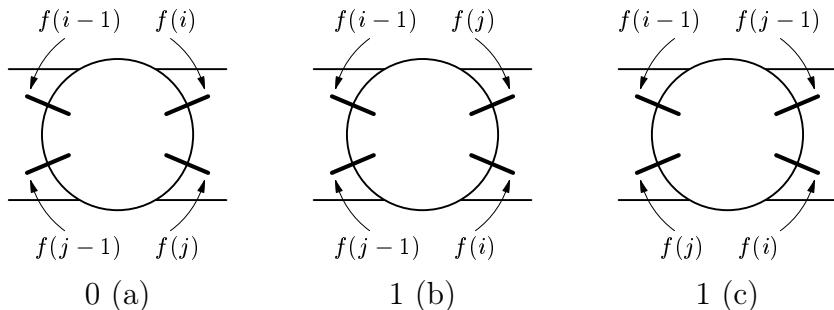


Рис. 25: Как ставятся числа на полянке

Набросок первого решения задачи 3.2.a. Возьмем полянки и тропинки для пути φ (рис. 27).

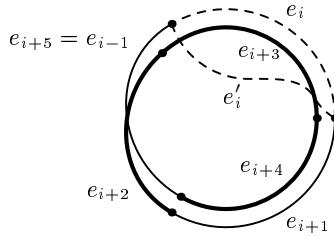


Рис. 26: Независимость $v(f)$ от f

Назовем путь собаки *незатейливым*, если во время движения по тропинкам она не пересекала свои следы. Достаточно доказать утверждение задачи для незатейливых путей.

Выберем произвольный незатейливый путь f . Поставим на каждой полянке ноль, если точки входа собаки на полянку и ее выхода с полянки располагаются, как на рис. 25.а, и единицу в противном случае, как на рис. 25.б,с. Обозначим через $v(f)$ сумму по модулю 2 этих двух чисел. Для пути f собаки на рис. 23 $v(f) = 1$. Ясно, что $v(f)$ зависит только от расположения отрезков пути собаки на тропинках. При изменении такого расположения на одной тропинке число на каждой полянке изменится, поэтому $v(f)$ не изменится. Так как от любого расположения отрезков пути на тропинках можно перейти к любому другому указанными операциями, то $v(f) = 1$ для *любого* незатейливого пути f . Поэтому собака обязательно пересекала свой след. QED

Набросок второго решения задачи 3.2.а. Разделим время равномерного движения охотника на шесть равных промежутков. Пусть e_1, \dots, e_6 — соответствующие отрезки пути f собаки. Положим $e_{i+6} := e_i$. Можно считать, что этот путь общего положения. Тогда любые два из отрезков e_i пересекаются в конечном числе точек. Положим

$$v(f) := \sum_{\{i,j\} : |i-j| > 1} |e_i \cap e_j| \pmod{2}.$$

Для пути f_0 собаки, показанного на рис. 23 $v(f_0) = 1$.

Аналогично лемме 2.3 $v(f)$ не зависит от f . Действительно, если отображения f и f' отличаются только внутренностью пути $e_i \neq e'_i$ (рис. 26), то

$$v(f) - v(f') = |(e_i \cup e'_i) \cap (e_{i+2} \cup e_{i+3} \cup e_{i+4})| \pmod{2} = 0.$$

Последнее равенство справедливо, поскольку путь $e_{i+2} \cup e_{i+3} \cup e_{i+4}$ можно замкнуть до цикла, не добавляя новых пересечений с циклом $e_i \cup e'_i$. Любой путь f общего положения (собаки) может быть заменен на f_0 последовательностью нескольких гомеоморфизмов плоскости \mathbb{R}^2 и нескольких изменений внутренности лишь одного ребра (мы не доказываем это интуитивно очевидное утверждение). Значит, $v(f) = 1$ для *любого* пути f собаки. Следовательно, любой путь собаки имеет самопересечения. QED

Путь $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *симплициальным*, если существует разбиение отрезка на такие отрезочки, что на каждом отрезочке путь линеен, и что образы любых двух отрезочков не пересекаются или совпадают. Или, формально, если для некоторого n существуют такие числа $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$, что

- (1) сужение $\varphi|_{[a_{i-1}, a_i]}$ линейно для любого $i = 1, \dots, n$ и
- (2) образы отрезков $[a_{i-1}, a_i]$ либо не пересекаются, либо совпадают.

Будем считать все встречающиеся пути симплициальными (с разными n).

Для симплициального пути φ существует окрестность $O\varphi(I)$ графа $\varphi(I)$, представленная естественным образом в виде объединения ‘полянок’ (т.е. дисков, окружающих

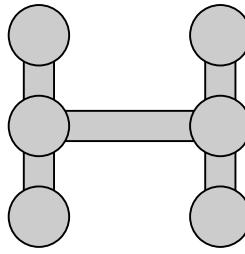


Рис. 27: Полянки и тропинки

точки $\varphi(a_i)$) и ‘тропинок’ (т.е. ‘ленточек’, соединяющих полянки вдоль ребер графа $\varphi(I)$). См. рис. 27 для пути на рис. 24.б. (Это *утолщение* графа $\varphi(I)$, определенное в §6.)

Переформулировка свойства аппроксимируемости вложениями на язык полянок и тропинок проводится аналогично переформулировке задачи 3.2.а.

Назовем путь $f : I \rightarrow O\varphi(G)$ *незатейливым*, если на тропинках нет его самопересечений.

Набросок решения задачи 3.4.б. Мы обобщаем первое решение задачи 3.2.а. Мы используем переформулировку свойства аппроксимируемости вложениями на языке полянок и тропинок (рис. 27). Выберем произвольный незатейливый путь f . Поставим на левой средней полянке ноль, если точки входа пути на полянку и его выхода с полянки располагаются как на рис. 25.а, и единицу в противном случае (рис. 25.б). По правой полянке путь проходит три раза. Рассмотрим только первое и последнее прохождение пути по правой полянке и поставим на ней ноль или единицу по тому же правилу. Обозначим через $v(f)$ сумму по модулю 2 этих двух чисел. Для пути f на рис. 24.б $v(f) = 1$. Далее доказательство дословно повторяет первое решение задачи 3.2.а.

3.6. Докажите аналогично, что пути на рис. 24.а,с не аппроксимируемые вложениями.

3.3 Препятствие Ван Кампена

Теорема аппроксимируемости. Симплициальный путь $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, не отображающий ни один отрезок в точку, аппроксимируем вложениями тогда и только тогда, когда препятствие Ван Кампена $v(\varphi) \in \mathbb{Z}_2^{c(\varphi)}$ нулевое.

В оставшейся части этого пункта мы приводим определение числа $c(\varphi)$, вектора $v(\varphi)$ и доказательство необходимости в теореме аппроксимируемости. Доказательство достаточности мы не приводим. Оно было получено слушателем лекций, по материалам которых написан этот параграф [Sk03'].

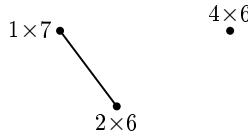


Рис. 28: Сингулярный граф Δ

Определение сингулярного графа Δ . Выберем точки $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ как в определении симплициальности (§3.2). Вершины графа Δ — такие пары

$$i \times j, \quad \text{что} \quad \varphi(a_i) = \varphi(a_j) \quad \text{и} \quad i < j.$$

Ребра графа Δ соединяют вершины $i \times j$ и $(i \pm 1) \times (j \pm 1)$ этого графа, если такие вершины есть. Здесь знаки \pm выбираются независимо.

Например, см. рис. 28 для пути на рис. 24.b: вершины графа — $1 \times 7, 2 \times 6, 2 \times 4$ и 4×6 ; ребром соединены только первые две.

3.7. Граф Δ зависит не только от φ , но и от выбора точек a_0, a_1, \dots, a_n .

Определение числа $c(\varphi)$. Обозначим через $c(\varphi)$ количество компонент связности графа Δ , не содержащих вершин $i \times (i-2), i \times 0$ и $n \times i$.

Например, для пути φ на рис. 24.b имеем $c(\varphi) = 1$.

3.8. Число $c(\varphi)$ зависит только от φ , но не от выбора точек a_0, a_1, \dots, a_n .

Определение расстановки $\nu(f)$. Выберем точки $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ как в определении симплициальности (§3.2). Мы используем переформулировку свойства аппроксимируемости вложениями на языке полянок и тропинок (рис. 27). Возьмем произвольный незатейливый путь f . Рассмотрим вершину $i \times j$ графа Δ и полянку, содержащую $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$. (Заметим, что к полянке может примыкать более двух тропинок.) Поставим в вершину $i \times j$ единицу, если точки пересечения образов $f[a_{i-1}a_{i+1}]$ и $f[a_{j-1}a_{j+1}]$ с границной окружностью этой полянки *чертежутся* на этой окружности (рис. 25.b,c) и ноль в противном случае (рис. 25.a). Полученную расстановку обозначим через $\nu(f)$.

Например, для путей φ и f на рис. 24.b имеем $\nu(f) = (0, 1)$.

3.9. (a) Если путь f несамопересекающийся, то расстановка $\nu(f)$ нулевая.

(b) Обратное неверно.

(c) Расстановка $\nu(f)$ нулевая тогда и только тогда, когда путь f можно так изменить на полянках, не меняя на тропинках, чтобы он стал несамопересекающимся.

(d) Расстановка $\nu(f)$ зависит не только от φ , но и от f и от выбора точек a_0, a_1, \dots, a_n .

Определение препятствия Ван Кампена $v(\varphi) \in \mathbb{Z}_2^{c(\varphi)}$. Для каждой из $c(\varphi)$ рассмотренных компонент связности графа Δ вычислим сумму $\pmod{2}$ чисел расстановки $\nu(f)$ в вершинах этой компоненты. Полученный набор $v(\varphi) = v(\varphi, f) \in \mathbb{Z}_2^{c(\varphi)}$ назовем *препятствием Ван Кампена* (с коэффициентами в \mathbb{Z}_2) к аппроксимируемости пути φ вложениями.

Например, для путей φ и f на рис. 24.b имеем $v(\varphi, f) = (1)$.

Доказательство независимости $v(\varphi, f)$ от f при фиксированных точек a_0, a_1, \dots, a_n . Ясно, что расстановка $\nu(f)$ зависит только от расположения отрезков пути f на тропинках. Рассмотрим преобразование такого расположения на произвольной одной тропинке для двух отрезков $[a_{i-1}a_i]$ и $[a_{j-1}a_j]$, образы которых пересекают эту тропинку. От любого f (т.е. расположения отрезков пути на тропинках) можно перейти к любому другому f' такими преобразованиями. Поэтому независимость $v(\varphi, f)$ от f вытекает из следующей задачи. QED

3.10. Вектор $v(\varphi, f)$ не изменяется при таких преобразованиях, если

(a) $i \neq j-1$ и $i \neq 1$ и $j \neq n$. (b) $i = j-1$ или $i = 0$ или $j = n$.

3.11. (a) $v(\varphi, f)$ не зависит от выбора точек a_0, a_1, \dots, a_n .

(b) Докажите необходимость в теореме аппроксимируемости.

(c) Если $v(\varphi) = 0$, то существует такое отображение $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения, близкое к φ , что $f[a_{i-1}, a_i] \cap f[a_{j-1}, a_j] = \emptyset$ для любой пары $i \times j$ ребер отрезка I , для которой вершина $i \times j$ графа Δ не содержится в компоненте связности с вершинами $i \times (i-2), i \times 0$ и $n \times i$ (такое отображение f не обязано быть вложением).

3.12. (a) Постройте аналогично препятствие Ван Кампена к аппроксимируемости вложениями симплициального цикла $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- (b) Докажите, что оно неполно.
 (c) Докажите, что оно неполно даже для отображения, образом которого являются триоды.
 (d) Постройте аналогично препятствие Ван Кампена к аппроксимируемости вложениями симплициального отображения $\varphi : I_1 \sqcup I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ср. с концом §3.1).
 (e) Полно ли оно?

Целочисленное препятствие Ван Кампена $V(\varphi) \in \mathbb{Z}^{c(\varphi)}$ строится аналогично. Необходимы лишь следующие изменения. Нужно выбрать ориентацию в \mathbb{R}^2 . При построении расстановки $\nu(\varphi)$ в вершину $i \times j$ ставится единица, если точки входа пути f на эту полянку и точки его выхода с этой полянки располагаются, как на рис. 25.б, и минус единица, если они располагаются как на рис. 25.с. Полученная расстановка обозначается $N(\varphi)$. Для каждой из $c(\varphi)$ рассмотренных компонент связности графа Δ вычислим сумму чисел в вершинах этой компоненты. Полученный набор $V(\varphi) = V(\varphi, f) \in \mathbb{Z}^{c(\varphi)}$ называется *препятствием Ван Кампена (с коэффициентами \mathbb{Z})* к аппроксимируемости пути φ вложениями.

3.13. (a,b,c,d) Решите аналоги задач 3.12 для целых коэффициентов.

3.4 Другое построение препятствия Ван Кампена

Это построение обобщает *второе* решение задачи 3.2.а. Оно сложнее предыдущего, но именно оно обобщено в §4.8 до препятствия Ван Кампена к вложимости графов в плоскость (и n -мерных полиэдров в $2n$ -мерное пространство). Впрочем, формально §4.8 независим от настоящего пункта.

Пусть $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — симплициальный путь общего положения. Выберем точки $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ как в определении симплициальности. Обозначим отрезок $[a_{i-1}, a_i]$ числом i .

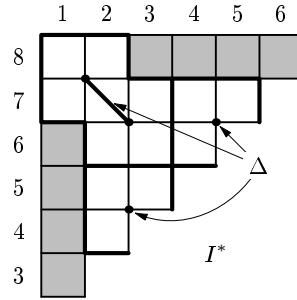


Рис. 29: Верхняя наддиагональ I^*

Обозначим через I^* верхнюю 'наддиагональ' таблицы $n \times n$, т.е. объединение клеток $i \times j$ с $i < j - 1$ (отвечающих парам несоседних ребер графа I). См. рис. 29.

Для любого пути $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения, достаточно близкого к φ , и любых двух несоседних ребер i, j пересечение $f_i \cap f_j$ состоит из конечного числа точек. Поставим в клетке $i \times j \in I^*$ число $|f_i \cap f_j| \bmod 2$. Полученную расстановку назовем *препятствующей* и обозначим через $\nu(f)$: если путь f несамопересекающийся, то $\nu(f) = 0$. Расстановки можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие в каждой клетке (такое сложение называется *покомпонентным*).

Покрасим в черный цвет клетки $i \times j$ таблицы I^* , для которых $\varphi i \cap \varphi j = \emptyset$. Так как путь f близок к φ , то $\nu(f) = 0$ в черных клетках. Обозначим через x множество всех расстановок нулей и единиц в клетках таблицы с нулями в черных клетках. Итак, $\nu(f) \in x$.

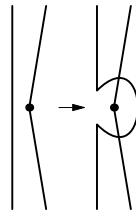


Рис. 30: Преобразование Райдемайстера для путей в плоскости

При преобразовании Райдемайстера пути f , изображенном на рис. 30, расстановка $\nu(f)$ изменяется ровно в двух соседних клетках $i \times j$ и $i \times (j+1)$ (или $j \times i$ и $(j+1) \times i$). Если одна из этих двух клеток не лежит в I^* , то число в ней не стоит и не меняется. Расстановка единицы в клетках таблицы I^* , соседних с ребром e , и нуля в остальных клетках таблицы I^* называется *элементарной кограницей ребра e таблицы I^** и обозначается δe .

Сделаем указанное преобразование Райдемайстера для ребер e_1, \dots, e_k таблицы I^* . Обозначим полученный путь через f_{e_1, \dots, e_k} . Тогда

$$\nu(f) - \nu(f_{e_1, \dots, e_k}) = \delta e_1 + \dots + \delta e_k.$$

Покрасим в белый цвет ребра $i \times a_j$ и $a_j \times i$ таблицы I^* , для которых $\varphi a_j \in \varphi i$. Покрасим в черный цвет остальные ребра (таким образом, граница черной клетки состоит из черных ребер, но могут быть и другие черные ребра). Так как f близко к φ , то указанное преобразование Райдемайстера возможно лишь для белых ребер e_1, \dots, e_k .

Назовем расстановки $\nu_1, \nu_2 \in x$ *когомологичными*, если $\nu_1 - \nu_2 = \delta e_1 + \dots + \delta e_k$ для некоторых белых ребер e_1, \dots, e_k . Группа $H_\varphi^2(I^*) = x / \sim$ расстановок с точностью до когомологичности называется *двумерной группой когомологии (с коэффициентами в \mathbb{Z}_2) пространства I^* относительно его черного подпространства*. (Стандартное обозначение: $H^2(I^*, I^{*\varphi})$, где $I^{*\varphi}$ — объединение черных клеток и ребер.)

Препятствие Ван Кампена (с коэффициентами в \mathbb{Z}_2) определяется как

$$v(\varphi) = [\nu(f)] \in H_\varphi^2(I^*).$$

Так как $v(f) = 0$ для вложения f , то $v(\varphi)$ является препятствием к аппроксимируемости пути φ вложениями.

Доказательство корректности определения препятствия $v(\varphi)$, т.е. независимости $v(\varphi)$ от выбора пути f . Пусть пути $f, f' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения, близкие к φ , отличаются только на внутренности одного ребра j . Для каждой вершины a_i проведем некоторый путь, соединяющий эту вершину с бесконечностью, и находящийся в общем положении относительно цикла $f(j) \cup f'(j)$. Пусть b_1, \dots, b_k — все те вершины, для которых проведенный путь пересекает цикл $f(j) \cup f'(j)$ в нечетном числе точек (набор этих вершин не зависит от выбора путей). Тогда

$$\nu(f) - \nu(f') = \delta\{b_1, j\} + \dots + \delta\{b_k, j\}.$$

Любой путь $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения, близкий к φ , может быть заменен на любой другой последовательностью нескольких гомеоморфизмов плоскости \mathbb{R}^2 и нескольких изменений внутренности лишь одного ребра (мы не доказываем это интуитивно очевидное утверждение). Поэтому $v(\varphi)$ не зависит от f . QED

Другое доказательство получается рассмотрением произвольной гомотопии $f_t : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения между заданными отображениями $f_0, f_1 : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения. Возьмем произвольную гомотопию $f_t : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$, общего положения,

близкую к φ . На каждом ребре $j \times a_i$ или $a_i \times j$ таблицы I^* поставим число $\mod 2$ моментов времени t , для которых $f_t(a_i) \in f_t(j)$ (это число конечно по соображениям общего положения). Пусть e_1, \dots, e_k — все ребра, на которых поставлена единица. Так как $f_t(x)$ близко к $\varphi(x)$, то из $\varphi a_i \notin \varphi j$ вытекает $f_t(a_i) \notin f_t(j)$. Поэтому на черных ребрах стоят нули. Легко проверить, что $\nu(f_0) - \nu(f_1) = \delta e_1 + \dots + \delta e_k$. Поэтому $v(\varphi)$ не зависит от f .

3.14. (a) $H_\varphi^2(I^*) \cong \mathbb{Z}_2^k$, где k — число кусков таблицы I^* , ограниченных черными ребрами (т.е. в границе которых *только* черные ребра) и содержащих хотя бы одну белую клетку.

(b) $k = c(\varphi)$. Существует естественный изоморфизм (Пуанкаре) $\mathbb{Z}_2^{c(\varphi)} \cong H^2(I_\varphi^*)$. Два построенных препятствия Ван Кампена переходят друг в друга при этом изоморфизме.

3.15. (a) В каждой точке (x, y) на ребре таблицы I^* поставим вектор с направлением от $f(x)$ к $f(y)$. Тогда в каждой клетке таблицы I^* стоит четность числа оборотов вектора при обходе по ее границе.

(b) Если невырожденный путь $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ аппроксимируем вложениями, то (R) для любого непрерывного движения точек x и y по отрезку I , в процессе которого $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, а в конце которого точки x и y возвращаются *каждая* в свое исходное положение (т.е. для любого непрерывного отображения $S^1 \rightarrow \{(x, y) \in I \times I \mid \varphi(x) \neq \varphi(y)\}$), число оборотов вектора от $\varphi(x)$ к $\varphi(y)$ в процессе этого движения равно нулю.

(c) Рассмотрим более слабую форму (r) условия (R): *число оборотов четно*. Тогда $(r) \Leftrightarrow (v(\varphi) = 0)$. Условие $v(\varphi) = 0$ сложнее формулируется, но гораздо проще проверяется, чем (r).

Препятствие Ван Кампена $V(\varphi)$ с целыми коэффициентами строится так. Выберем ориентацию в \mathbb{R}^2 и на I . Для любого отображения $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения, достаточно близкого к φ , и любых двух несоседних ребер i, j , пересечение $fi \cap f j$ состоит из конечного числа точек. Поставим в клетке $i \times j$ индекс *пересечения* $fi \cdot f j = \sum \{\text{sign } P \mid P \in fi \cap f j\}$, где $\text{sign } P = +1$, если векторы ориентаций fi и fj (в этом порядке) составляют базис ориентации плоскости \mathbb{R}^2 , и $\text{sign } P = -1$ в противном случае. Обозначим полученную расстановку через $N(f)$. Обозначим через X множество всех расстановок целых чисел в клетках таблицы с нулями в черных клетках. Определим когомологичность аналогично и положим $V(\varphi) = [N(f)] \in H_\varphi^2(I^*; \mathbb{Z}) := X / \sim$.

Нетрудно показать, что $V(\varphi)$ зависит от выбора ориентаций в \mathbb{R}^2 и на ребрах графа I лишь с точностью до автоморфизма группы $H_\varphi^2(I^*; \mathbb{Z})$.

3.16. (a) $H_\varphi^2(I^*; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^k$.

(b) $(R) \Leftrightarrow (V(\varphi) = 0)$.

(c) Постройте аналогично препятствия $v(\varphi)$ и $V(\varphi)$ для аппроксимируемости циклов вложениями.

3.5 Препятствие Ван Кампена к распроектируемости

Отображение $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ конечного графа G в прямую называется *распроектируемым*, если существует такое вложение $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$, что $\varphi = \pi \circ f$, где $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — ортогональная проекция.

Приведем еще более элементарную переформулировку этого определения для кусочно-линейных отображений φ общего положения (рис. 31). (Общность положения означает здесь, что никакой отрезок не переходит в точку.) Для этого фиксируем декартову систему координат на плоскости. Назовем *расположением* такое изображение (с самопересечениями) графа G на плоскости, для которого

(1) абсциссы вершин целые,

(2) если две вершины соединены ребром в нашем графе, то их абсциссы отличаются ровно на 1, и это ребро является отрезком.

Расположение называется *вложением*, если внутренности образов любых двух его ребер не пересекаются. Расположение называется *распроектируемым*, если возможно преобразовать его во вложение путем одновременной перестановки вершин, не изменяющей их абсцисс, и соответствующего изменения ребер.

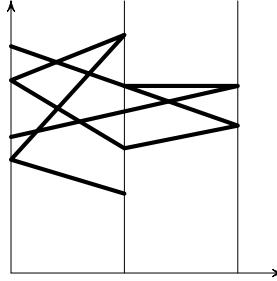


Рис. 31: Пример расположения

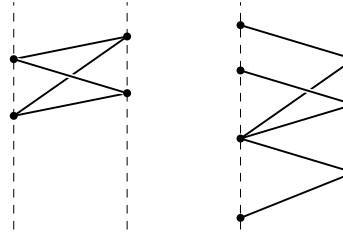


Рис. 32: Простейшие нераспроектируемые расположения

3.17. (a) Любое отображение отрезка в отрезок является распроектируемым.

(b) Расположения на рис. 32 не являются распроектируемыми.

(c) (Гипотеза) Расположение графа в плоскости, абсциссы вершин которого равны 0 или 1, является распроектируемым тогда и только тогда, когда оно не содержит расположения окружности с четным числом вершин, абсциссы которых равны поочередно нулю или единице (рис. 32 слева) или расположения триода на рис. 32 справа.

(d) Расположения букв H и X с рис. ?? (даже близкие к ним) не являются распроектируемыми. Указание. Если не получается, то см. ниже.

В этом пункте исследуется следующая проблема: *какие симплициальные отображения общего положения являются распроектируемыми?* Понятие распроектируемости (спроектированного вложения) возникло в [?], [Ak00] и изучалось в [ARS02] в связи с проблемой аппроксимации вложениями отображений графов в плоскость. По поводу алгоритмической разрешимости проблемы распроектируемости и невозможности критерия типа Куратовского можно сделать замечания, аналогичные приведенным выше по проблеме аппроксимируемости вложениями.

Теорема распроектируемости. *Если отображение $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ распроектируемо, то пара точек не может непрерывно двигаться по графу G так, чтобы в процессе движения их φ -образы совпадали, а сами точки не совпадали, и в результате движения точки поменялись бы местами.*

Для симплициального отображения $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ общего положения это необходимое условие (Ван Кампена) является достаточным, если из каждой вершины графа G выходит не менее трех ребер.

3.18. (a) Докажите необходимость в теореме распроектируемости.

(b) Докажите необходимость аналогичного условия Ван Кампена для распроектируемости расположений, полученного из сформулированного выше заменой 'φ-образов' на 'абсциссы'.

Например, следующие последовательности пар показывают, что расположения с рис. ?? не являются распроектируемыми (это решает задачу 14.d):

$$\begin{aligned} &aa_1, ee_1, d_1d_2, b_2b_1, c_2c_1, e_2e, b_2b, d_1d, c_1c, a_1a; \\ &aa_1, dd_3, cc_1, ff_1, d_1d_2, e_2e_1, c_2c_1, d_4d_3, b_2b_1, d_5d_3, f_2f, b_2b, e_2e, d_3d, a_1a. \end{aligned}$$

В [ARS02] для симплициальных отображений общего положения доказано, что необходимое условие Ван Кампена действительно равносильно некоторому алгебраическому условию, более похожему на вышеописанные препятствия Ван Кампена. Из этого, в частности, вытекает, что условие Ван Кампена легко проверять алгоритмически (см. прямое доказательство ниже). В [ARS02] выдвинута также гипотеза о достаточности. Достаточность в теореме распроектируемости вытекает из [ARS02], [Sk03']. Заметим, что такое доказательство очень непрямое. Прямое доказательство при другом дополнительном ограничении см. в [GS].

Приведем переформулировку необходимого условия Ван Кампена. Из переформулировки будет ясно, что его легко проверить алгоритмически [ARS02]. Упорядоченную пару (A, B) двух таких различных вершин графа G , что $\varphi(A) = \varphi(B)$, будем называть просто *парой* и обозначать AB . Пара A_1B_1 называется *элементарно достижимой* из пары AB , если граф G содержит ребра AA_1 и BB_1 . Пара ST называется *достижимой* из пары AB , если ST может быть получена из AB последовательностью элементарно достижимых пар. Обозначение: $ST \sim AB$. Очевидно, достижимость — отношение эквивалентности. Необходимое условие Ван Кампена равносильно следующему (для расположений): *никакая пара AB не достижима из пары BA .* Приведенная гипотеза принимает следующую форму: *расположение, для которого никакая пара AB не достижима из пары BA , является распроектируемым.*

3.6 Approximability by embeddings

A possible method of studying embeddability of compacta is by decomposing them into inverse limits. See [Ish, McC67] [Si69], [SS83]. Roughly speaking, the embeddability of compacta is reduced to the embeddability of PL maps between polyhedra.

A map $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ is said to be *approximable by embeddings* if for each $\varepsilon > 0$ there is an embedding $\varphi : N \rightarrow \mathbb{R}^m$, which is ε -close to f . A map $f : K \rightarrow M$ is said to be *embeddable* in \mathbb{R}^m if there exists an embedding $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ for which $\psi \circ f$ is approximable by embeddings (this notion differs slightly from that of [Si69, SS83]).

The following examples [Si69] show that this notion is rather geometric and is also interesting in itself.

Example 3.6.1. [Si69] (a) A map $f : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ is approximable by embeddings if and only if $\deg f \in \{0, \pm 1\}$.

(b) Let H , T and X be the graphs homeomorphic to letters H , T and X , respectively. The maps $I \rightarrow H \subset \mathbb{R}^2$, $f : I \rightarrow T \subset \mathbb{R}^2$, $H \rightarrow I \subset \mathbb{R}^2$ and $X \rightarrow I \subset \mathbb{R}^2$ in Figure are not approximable by embeddings. In Figure a general position map $g : H \rightarrow \mathbb{R}^2$, close to $i \circ f$, is shown.

Theorem 3.6.2. (a) For each n every map $f : I^n \rightarrow I^n$ is embeddable in \mathbb{R}^{2n} [Si69].

(b) For each $n \geq 2$ every map $f : T^n \rightarrow T^n$ between n -dimensional tori is embeddable in \mathbb{R}^{2n} [KW85].

(c) For each $n > 1$ every map $f : S^n \rightarrow S^n$ is embeddable in \mathbb{R}^{2n} .

The proof of Theorem 3.6.2.a is obvious: one just need to take the graph of f in $I^n \times I^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ and compress it to the first factor. The proofs of Theorems 3.6.2.b, are much more complicated [Me04]. In [Akh96S, Akh96P] it is erroneously proved that for $n \in \{1, 3, 7\}$ there is a map $f : S^n \rightarrow S^n$, non-embeddable in \mathbb{R}^{2n} .

The partial case of the approximability problem, important for dynamical systems, is the following. Take $m = 2n = 2$, replace the range \mathbb{R}^m to an arbitrary 2-manifold, let N and fN be wedges of p and q circles, respectively, and suppose that f is represented by p words of q letters and [Zh]. E.g.,

(Smale) The map $S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$, defined by $a \mapsto aba$ and $b \mapsto ab$ is embeddable into torus but not into plane.

(Wada–Plykin) The map $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1 \vee S^1$, defined by $a \mapsto aca^{-1}$, $b \mapsto bab^{-1}$ and $c \mapsto b$ is embeddable into plane.

(Zhirov) The map $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$, defined by $a \mapsto ac$, $b \mapsto ad$, $c \mapsto bac$ and $d \mapsto c$ is embeddable into pretzel but not into torus.

An interesting and perhaps easier analogue of the approximability problem is its *disjoinability*, or *link map* analogue:

given a map $f : K \sqcup L \rightarrow \mathbb{R}^m$, under which conditions it is disjoinable, i.e. can be arbitrary closely approximated by a map φ such that $\varphi K \cap \varphi L = \emptyset$?

Cf. [Ko93] and references there. For the case $K = L$ and g a composition of the identification of the two copies and an embedding $K \rightarrow \mathbb{R}^2$ see [RSS95] and references there.

Another analogue of the approximability problem is as follows. Let $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be the canonical projection and $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ the canonical inclusion. A map $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ is called a *projected embedding* if there is an embedding $\bar{f} : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $f = \pi \circ \bar{f}$. Evidently,

if f is a projected embedding, then the map $i \circ f$ is approximable by embeddings.

The converse is false, as the example of a constant map shows. We conjecture that *the converse is true for general position maps f .*

This is so if $\tilde{\Delta}(f)$ (see the definition below) has exactly two connected components [Skr].

Указания и решения к некоторым задачам

3.4. Можно свести к непланарности графов Курацковского K_5 и $K_{3,3}$. Пунктирная линия на рис. 24 поможет сделать это.

3.10. (a) Числа в вершинах $i \times j$ и $(i-1) \times (j-1)$ (или $i \times (j-1)$ и $(i-1) \times j$) графа Δ изменяются на 1, а числа в остальных вершинах не изменяются. Поэтому $v(\varphi, f)$ не изменится.

3.11. (b) Следует из 3.9.a.

4 Реализуемость двумерных комплексов

4.1 Наглядные задачи о склейках в пространстве

В задачах этого пункта треугольник и другие фигуры предполагаются двумерными и растяжимыми. Ответ ‘можно’ обосновывайте предъявлением конструкции (например, рисунка, как на рис. 33 справа). Достаточно нестрогих обоснований ответа ‘нельзя’. Формализация приведена в следующих пунктах.

4.1. Можно ли в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 , не допуская самопересечений, склеить с указанными направлениями стороны

- (a) \vec{AB} , \vec{AC} и \vec{BC} треугольника ABC ? (b) \vec{AB} и \vec{DC} , \vec{BC} и \vec{AD} квадрата $ABCD$?
 (c) \vec{AB} и \vec{CD} , \vec{BC} и \vec{AD} квадрата $ABCD$? (d) \vec{AB} и \vec{CD} , \vec{BC} и \vec{DA} квадрата $ABCD$?

Для решения задач 4.1.cd нужны ‘неориентируемость’ фигур, полученных склейкой, и трехмерная теорема Жордана, ср. п. 2.2.

4.2. Можно ли в \mathbb{R}^3 склеить без самопересечений треугольник и ленту Мебиуса так, чтобы контур треугольника приклеился бы к срединной окружности ленты Мебиуса?

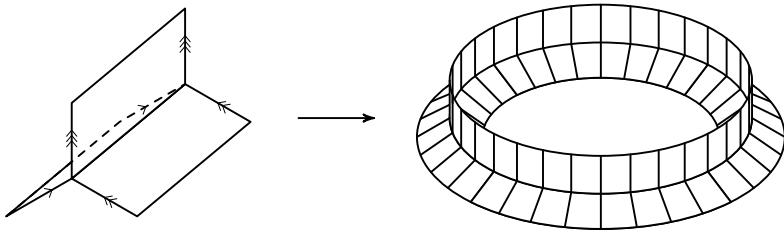


Рис. 33: Склейивание ребер

Возьмем в \mathbb{R}^3 прямоугольники XYB_kA_k , $k = 1, 2, \dots, n$, любые два из которых пересекаются только по отрезку XY . Книжкой с n листами называется объединение этих прямоугольников. См. рис. 33 слева для $n = 3$ (ср. с рис. 34, K_V).

Для перестановки $\sigma \in S_n$ назовем σ -склейкой склейку, с указанными направлениями, сторон $X\vec{A}_k$ и $Y\vec{B}_{\sigma(k)}$ книжки с n листами для каждого $k = 1, 2, \dots, n$. См. рис. 33 для $n = 3$ и $\sigma = \text{id}$.

4.3. Можно ли в \mathbb{R}^3 осуществить σ -склейку без самопересечений?

- (3) $n = 3$, $\sigma = (123)$; (21) $n = 3$, $\sigma = (12)(3)$; (22) $n = 4$, $\sigma = (12)(34)$;
 (31) $n = 4$, $\sigma = (123)(4)$; (211) $n = 4$, $\sigma = (12)(3)(4)$; (23) $n = 5$, $\sigma = (123)(45)$.

4.4. Для каких перестановок $\sigma \in S_n$ в \mathbb{R}^3 можно осуществить σ -склейку без самопересечений?

4.5. Для каждого ребра AB некоторого графа возьмем прямоугольник $ABB'A'$. Возьмем несвязное объединение таких прямоугольников. (В нем разные ребра AA' обозначены одинаково.) Докажите, что в \mathbb{R}^3 существует фигура, полученная из этого объединения склейкой ребер AA' разных прямоугольников для каждой вершины A графа. (См. четкую формулировку в задаче 1.9.а; эта фигура называется цилиндром над графиком, см. четкое определение в п. 4.3.)

4.2 Определение двумерного симплициального комплекса

В этом параграфе мы определим двумерные полиэдры и многообразия комбинаторно. Это удобно как для теории, так и для хранения в памяти компьютера. См. подробнее [Sk, п. 5.2 и 5.3].

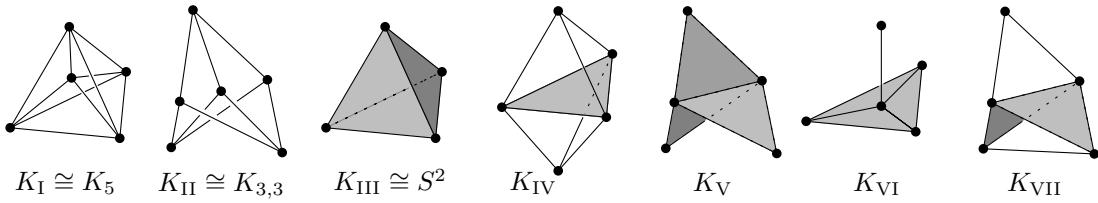


Рис. 34: Двумерные комплексы, не вложимые в плоскость

Двумерным симплициальным комплексом называется семейство двухэлементных и трехэлементных подмножеств конечного множества, которое вместе с каждым трехэлементным множеством содержит все три его двухэлементные подмножества. (Похожие объекты в комбинаторике называются гиперграфами.) Будем сокращенно называть двумерный симплициальный комплекс просто *2-комплексом*. Примеры 2-комплексов приведены на рис. 34 (двеэлементные подмножества семейства изображаются отрезками, а трехэлементные — треугольниками).

Элементы данного конечного множества называются *вершинами* 2-комплекса, выделенные двухэлементные подмножества — *ребрами* 2-комплекса, а трехэлементные подмножества семейства — *гранями* 2-комплекса.

Например, *кнопкой* называется 2-комплекс с вершинами $c, 0, 1, 2, 3$ с гранями $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$ и $\{0, 2, 3\}$; ребрами являются все их двухэлементные подмножества и $\{c, 0\}$. См. рис. 34, K_{VI} .

Книжкой с n листами называется 2-комплекс с вершинами $a, b, 1, 2, \dots, n$ с гранями $\{a, b, 1\}, \{a, b, 2\}, \dots, \{a, b, n\}$; ребрами являются все их двухэлементные подмножества. См. рис. 34, K_V , для $n = 3$, ср. рис. 33 слева.

Полным 2-комплексом с n вершинами (или двумерным остовом $(n-1)$ -мерного симплекса) называется 2-комплекс с n вершинами и семейством *всех* двухэлементных и трехэлементных подмножеств. Полный 2-комплекс с 3 вершинами называется также диском D^2 . См. рис. 34, K_{III} для $n = 4$ (этот 2-комплекс называется также сферой S^2) и рис. 1 слева для $n = 5$.

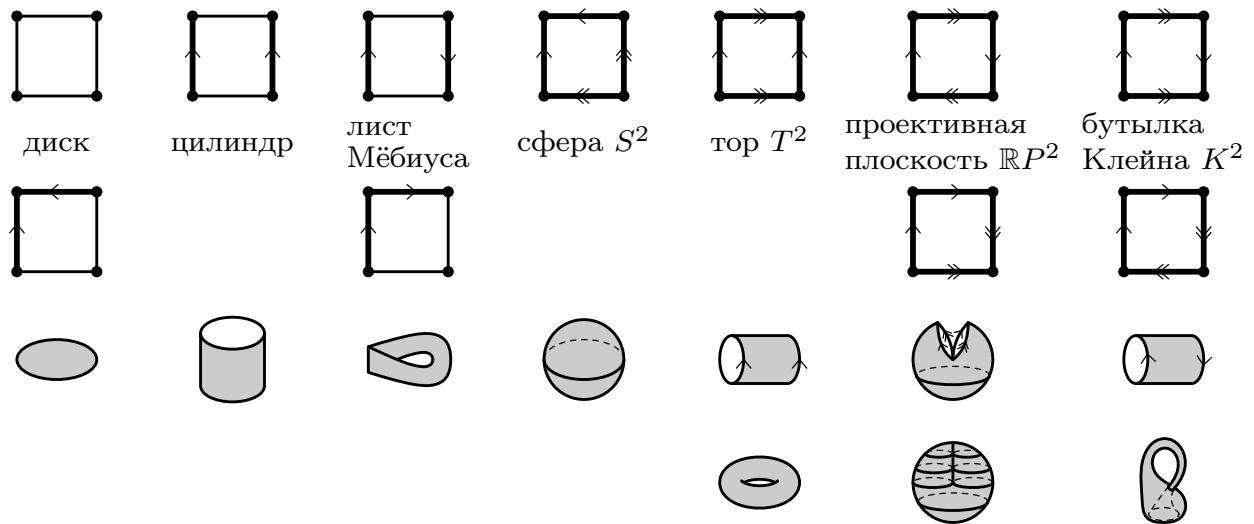


Рис. 35: Простейшие 2-комплексы (и соответствующие фигуры-тела)

2-комплекс можно строить при помощи ‘склейки’ сторон квадрата или даже многоугольника. См. первую и вторую строки на рис. 35. Эта конструкция формализуется понятием *клеточного разбиения*, см. [Sk, п. 6.2]; здесь нам не понадобится эта форма-

лизация, достаточно интуитивного представления.

Как и графы, 2-комплексы можно задавать *фигурами*, в т.ч. ‘гладкими’ и самопересекающимися, т.е. их *телами*. См. третью и четвертую строки на рис. 35.

Локально евклидовы двумерные комплексы

2-комплекс называется *локально евклидовым* или *триангуляцией 2-многообразия*, если любое его ребро содержится в некоторой грани и для любой его вершины v все грани, ее содержащие, образуют ‘цепочку’

$$\{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\} \dots \{v, a_{n-1}, a_n\} \quad \text{или} \quad \{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\} \dots \{v, a_{n-1}, a_n\}, \{v, a_n, a_1\}$$

для некоторых попарно различных вершин a_1, \dots, a_n . Если для всех v имеет место второй случай, то локально евклидов 2-комплекс называется *замкнутым*.

Кусочно-линейным двумерным многообразием называется класс гомеоморфности локально евклидова 2-комплекса. Мы будем называть кусочно-линейное двумерное многообразие просто *2-многообразием*. Представляющий 2-комплекс называется *триангуляцией* соответствующего 2-многообразия.

Вместо термина ‘локально евклидов 2-комплекс’ используется термин ‘триангуляция 2-многообразия’. Это неудобно для начинающего, поскольку при изучении 2-многообразий с кусочно-линейной точки зрения изначальным объектом являются 2-комплексы, и через них определяются 2-многообразия. В этом параграфе мы используем термин ‘локально евклидов 2-комплекс’, а в дальнейшем — ‘триангуляция 2-многообразия’ или даже ‘2-многообразие’, если речь идет о свойстве 2-комплексов, инвариантном относительно гомеоморфности.

Краем (или *границей*) ∂N локально евклидова 2-комплекса N называется объединение всех таких его ребер, которые содержатся только в одной грани.

4.6. (а) Любое 2-многообразие с непустым краем или ориентируемое кусочно-линейно вложимо в \mathbb{R}^3 .

(б) Никакое замкнутое неориентируемое 2-многообразие не вложимо кусочно-линейно в \mathbb{R}^3 .

(с) Любое 2-многообразие кусочно-линейно вложимо в \mathbb{R}^4 .

4.3 Другие конструкции 2-комплексов

Конус Con G над графом G — 2-комплекс с

- множеством вершин $V(G) \cup \{c\}$, $c \notin V(G)$,
- всеми гранями $\{c, i, j\}$, где $\{i, j\}$ — ребро графа G ,
- всеми ребрами графа G и всеми ребрами $\{c, i\}$, где i — вершина графа G .

Конус над путем или конус над циклом называются также диском (или книжкой с 1 страницей, или книжкой с 2 страницами), а конус над n -одом — книжкой с n листами (рис. 33 слева для $n = 3$, ср. рис. 34, K_V). Итак, иногда не изоморфные, но *гомеоморфные*, комплексы называются одинаково.

4.7. (а) Определите понятия 2-подкомплекса и изоморфизма 2-комплексов аналогично понятиям подграфа и изоморфизма графов.

(б) Полный 2-комплекс с n вершинами содержит подкомплекс, изоморфный $\text{Con } K_n$.

(с) Книжка с n листами изоморфна конусу над n -одом.

(д) Кнопка изоморфна конусу над некоторым графом. Над каким?

(е) Полный 2-комплекс с 4 вершинами не изоморфен конусу ни над каким графом.

Далее в этом пункте G и H — ориентированные графы с вершинами $1, 2, \dots, v_G$ и $1, 2, \dots, v_H$.

Цилиндр $G \times I$ над графом G — 2-комплекс с

- $2v_G$ вершинами $1, 2, \dots, v_G, 1', 2', \dots, v'_G$,
- всеми гранями $\{i, j, i'\}$ и $\{i', j', j\}$, где (i, j) — ориентированное ребро графа G ,
- всеми двухэлементными подмножествами граней и всеми ребрами $\{i, i'\}$, где i — изолированная вершина графа G .

Такое название принято потому, что цилиндр над циклом ‘выглядит’ как боковая поверхность (обычного) цилиндра.

- 4.8.** (a) Цилиндр над путем гомеоморфен диску.
 (b) Цилиндр над n -одом гомеоморфен книжке с n листами.
 (c) Для некоторой ориентации n -ода цилиндр над ним изоморфен конусу над некоторым графом. Над каким?

Декартово произведение $G \times H$ графов G и H — комплекс с

- $v_G v_H$ вершинами (i, j) , $1 \leq i \leq v_G$, $1 \leq j \leq v_H$,
- всеми гранями $\{(i, j), (i, l), (k, j)\}$ и $\{(k, l), (i, l), (k, j)\}$, где (i, k) и (j, l) — ориентированные ребра,
- всеми ребрами $\{(i, j), (i, l)\}$, где (j, l) — ребро графа H , и $\{(k, l), (i, l)\}$, где (i, k) — ребро графа G .

Декартов квадрат цикла называется *тором*.

- 4.9.** (a) Декартово произведение графа G на K_2 изоморфно цилинду $G \times I$.
 (b) Декартов квадрат триода с некоторой ориентацией изоморфен конусу над некоторым графом. Над каким?
 (c) Декартовы произведения каких графов локально евклидовы?

Врезанный квадрат \tilde{G} графа G — подкомплекс комплекса $G \times G$, полученный удалением всех граней и ребер, содержащих хотя бы одну ‘диагональную’ вершину $\{(i, i)\}$. Ср. п. 2.8, задачу 4.30.с и п. 5.1.

- 4.10.** Чему гомеоморфен врезанный квадрат (a) пути; (b) цикла (c) триода.

- 4.11.** (a) \widetilde{K}_5 и $\widetilde{K}_{3,3}$ локально евклидовы замкнуты. (b) Чему они гомеоморфны?

Определение I - и S^1 -расслоений над графами см. в [Sk, п. 13.1].

4.4 Линейная вложимость 2-комплексов

A set of non-degenerate triangles and segments in \mathbb{R}^3 is *embedded*, if each two of them either are disjoint, or intersect only at a common vertex, or (for two triangles) intersect only by a common side.

From now on we denote points in \mathbb{R}^3 (and in \mathbb{R}^4) by numbers.

- 4.12.** (a) There exist 6 points $0, 1, 2, 3, 4, 5$ in 3-space such that the set of all triangles $0jk$, $1 \leq j < k \leq 5$, $k \neq 2$ is embedded.

(b) Suppose that we have 5 points in 3-space. If the set of all triangles with vertices at these points is embedded, then for each point of space one of the 5 interiors of segments joining this point and one of the given points intersects at least one triangle with vertices at given points.

The following corollaries of Theorems 1.3 and 1.4 illustrate some ideas of the proof of Theorem 1.42.c.

- 4.13.** For any 6 points $0, 1, 2, 3, 4, 5$ in 3-space, if the set of triangles

(a) $0jk$, $1 \leq j < k \leq 5$, $k \neq 2$, together with segment 12, is embedded, then the triangles 012 and 345 are linked.

(b) $0jk$, $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$, together with segments 12 and 13, is embedded, then either the triangles 012 and 345, or the triangles 013 and 245, are linked.

(c) $0jk$, $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$, together with segments 12, 13 and 14 is embedded, then either the triangles 012 and 345, or the triangles 013 and 245, or the triangles 014 and 235 are linked.

(d) Dare you to guess the statement!

4.14. For any 7 points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 in 4-space, if the set of triangles

(a) ijk , $1 \leq i < j < k \leq 5$, $k \neq 3$, is embedded, then the triangle 123 and tetrahedron 4567 are linked.

(b,c,d) Dare you to guess the statements!

Неформально, 2-комплекс *линейно вложим* в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 , если его можно без самопересечений нарисовать в пространстве так, чтобы ребра изображались прямолинейными отрезками, а грани — плоскими двумерными треугольниками.

A *linear realization* of 2-complex (V, E, F) in \mathbb{R}^d is an embedded set of triangles and segments in \mathbb{R}^d whose vertices correspond to V , whose segments correspond to E and whose triangles correspond to F . At the beginning of this section we have shown that

Объединение таких отрезков и треугольников называется *телом* данного 2-комплекса.

4.15. Ни один из 2-комплексов на рис. 34.III-VII не вложим линейно в плоскость.

4.16. Вложим ли линейно в плоскость

(a) цилиндр над путем? (b) декартово произведение путей?

(c) цилиндр над циклом? (d) кнопка?

(e) некоторый тор, т.е. декартово произведение циклов некоторой длины?

Для доказательства вложимости нужно предъявить координаты вершин и проверить условие вложенности. Неформально, достаточно нарисовать понятную картинку.

Обозначим через T триод и через S^1 цикл длины 3.

Сам рисунок 34 показывает, что изображенные на нем 2-комплексы линейно вложимы в \mathbb{R}^3 . Утверждения 0-emex3.a, 1.9.ab и 4.1.a показывают, что в \mathbb{R}^3 линейно вложимы 2-комплекс, получающийся из $\text{Con } K_5$ удалением одной грани, цилиндр над произвольным графом и некоторый 2-комплекс, представляющий щутовской колпак Зимана.

Утверждения 0-ne3.a, 0-emex3.b, 0-ne3pr.n,mn и 4.1.bc показывают, что в \mathbb{R}^3 не вложимы линейно ни полный 2-комплекс с 6 вершинами, ни объединение полного 2-комплекса с 5 вершинами и конуса над множеством его 5 вершин, ни $\text{Con } K_5$, ни $K_5 \times S^1$, ни проективная плоскость \mathbb{RP}^2 (рис. 35), ни бутылка Клейна K (рис. 35).

4.17. Вложим(о) ли линейно в \mathbb{R}^3

(a) конус над произвольным планарным графом? (b) $T \times T$?

(c) декартово произведение S^1 и произвольного планарного графа? (d)* $K_{3,3} \times S^1$?

Рассуждение перед рис. f-con и решения задач 0-emb4 показывают, что в \mathbb{R}^4 линейно вложим конус над произвольным графом, полный 2-комплекс с 6 вершинами и 2-комплекс L , полученный из полного 2-комплекса с 7 вершинами удалением грани.

Утверждения 1.4, 1.8 и 1.30 показывают, что в \mathbb{R}^4 не вложимы линейно ни полный 2-комплекс с 7 вершинами, ни $K_5 \times K_5$, ни джойнокуб троеточия (т.е. 2-комплекс с девятью вершинами, разбитыми на три тройки, любые две вершины из разных троек соединены ребром, и на любые три вершины из разных троек натянута грань).

4.18. Вложим(о) ли линейно в \mathbb{R}^4

(a) некоторый 2-комплекс, представляющий проективную плоскость \mathbb{RP}^2 (рис. 35).

(b) некоторый 2-комплекс, представляющий бутылку Клейна (рис. 35).

(c) декартово произведения любых двух графов, один из которых планарен.

(d)* $K_5 \times K_{3,3}$. (e)* $K_{3,3} \times K_{3,3}$.

Решения задач 0-ne3pr.mn, 0-ne4.mn, 4.17.bcd, 4.18.cde позволяют описать все декартовы произведения графов, линейно вложимые в \mathbb{R}^3 и в \mathbb{R}^4 [Sk03]. (В кусочно-линейном

случае ответ такой же, доказательство аналогично; вместо лемм 1.11 и ?? нужны их кусочно-линейные аналоги.)

4.5 Кусочно-линейные вложения комплексов

Теорема 4.19. [HJ64] (a) Двумерный комплекс кусочно-линейно вложим в плоскость тогда и только тогда, когда никакой гомеоморфный ему комплекс не содержит подкомплекса, гомеоморфного графу K_5 , графу $K_{3,3}$, кнотке K_{VI} или сфере S^2 (рис. 34).

(b) Двумерный комплекс кусочно-линейно вложим в плоскость тогда и только тогда, когда он не содержит подкомплекса, гомеоморфного одному из изображенных на рис. 34.

При доказательстве этого результата (и теоремы 1.42.а) используйте без доказательства аналогичный результат для графов — теорему 1.34 Куратовского (и теорему 1.36). Приведенное в решениях доказательство теоремы 4.19.а использует понятие 2-многообразия и теорему классификации 2-многообразий.

Теорема 4.20. [To11] Существует алгоритм распознавания вложимости двумерного комплекса в некоторую трехмерную гомологическую сферу (не фиксированную заранее).

General Position Theorem. Every n -polyhedron embeds into \mathbb{R}^{2n+1} .

Here the number $2n + 1$ is the least possible: for each n there exists an n -polyhedron, non-embeddable in \mathbb{R}^{2n} . As an example one can take

- the n -th power of a non-planar graph (conjectured by Menger in 1929, proved by [Um78, Sk03]);
- the n -skeleton of a $(2n + 2)$ -simplex [vanKampen1932, Flores1934];
- the $(n + 1)$ -th join power of the three-point set [vanKampen1932, Flores1934].

Теорема об NP-трудности. [MTW08] Для любых m, n с условием $4 \leq m \leq \frac{3n}{2} + 1$ алгоритмическая проблема распознавания кусочно-линейной вложимости n -комплексов в m -мерное пространство \mathbb{R}^m является NP-трудной.

Идея доказательства приведена в п. 4.10.

Теорема о распознаваемости. [MTW08], [C11] Для любых m, n с условием $m \geq \frac{3n+3}{2}$ существует (даже полиномиальный) алгоритм распознавания кусочно-линейной вложимости n -комплексов в m -мерное пространство \mathbb{R}^m .

Условие этой теоремы выполнено, в частности, для любых $m = 2n \geq 6$. Идея доказательства приведена в п. 4.7 и 4.8.

$k \setminus d$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	P	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	P	?	NPh	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	?	NPh	NPh	P	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4		NPh	UND	NPh	NPh	P	+	+	+	+	+	+	+
5			UND	UND	NPh	NPh	?	P	+	+	+	+	+
6				UND	UND	NPh	NPh	NPh	?	P	+	+	+
7					UND	UND	NPh	NPh	NPh	?	?	P	

The complexity of EMBED(k, d) (P = polynomial-time solvable, UND = algorithmically undecidable, NPh = NP-hard, + = always embeddable, ? = no result known).

4.6 Задачи для исследования: вложения косых произведений

Здесь и далее вместо ‘кусочно-линейно вложим’ мы пишем коротко ‘вложим’.

Косым произведением G_φ *графа* G *на окружность, отвечающим автоморфизму* φ *называется фигура, полученная из цилиндра над графом* G *склейкой ребер* $A'B'$ *и* $\varphi(AB)$ *для каждого ребра* AB *графа* G . Ср. с п. 4.6. Ясно, что косое произведением графа G на окружность ‘выглядит’,

- как боковая поверхность (обычного) цилиндра или как лента Мебиуса для пути G ,
- как тор или как бутылка Клейна (задачи 4.1.bс) для цикла G ,
- как результат некоторой σ -склейки для n -ода G .

4.21. (a) $(K_4)_{\text{id}}$ реализуется без самопересечений в \mathbb{R}^3 (ср. с §1).

(b)* Для каких автоморфизмов $\varphi : K_4 \rightarrow K_4$ в \mathbb{R}^3 реализуется без самопересечений $(K_4)_\varphi$?

(c) $(K_5)_{\text{id}}$ не реализуется без самопересечений в \mathbb{R}^3 (ср. с теоремой 1.6 и ее кусочно-линейным аналогом).

(d)* Для каких автоморфизмов $\varphi : K_5 \rightarrow K_5$ в \mathbb{R}^3 реализуется без самопересечений $(K_5)_\varphi$?

4.22. * Для каких графов G и автоморфизмов $\varphi : G \rightarrow G$ косое произведение G_φ реализуется без самопересечений в \mathbb{R}^3 ?

Определение I - и S^1 -расслоений над графом приведены в [Sk], параграф ‘расслоения’.

4.23. (a) Любое I -расслоение над графом вложимо в \mathbb{R}^3 .

(b) S^1 -расслоение над графом вложимо в \mathbb{R}^3 тогда и только тогда, когда граф планарен, а расслоение является прямым произведением.

(c)* Какие расслоения над окружностью S^1 со слоем граф вложимы в \mathbb{R}^3 ?

(d) T -расслоение над связным графом вложимо в \mathbb{R}^3 тогда и только тогда, когда этот граф является циклом и перестановка ребер триода, определяющая T -расслоение, четная. (Определение T -расслоения для триода T аналогично определению I - и S^1 -расслоений.)

Решения задач 4.23 позволяют описать все косые произведения графов, вложимые в \mathbb{R}^3 .

4.24. (a) Произведение $P \times S^1$ 2-комплекса P и окружности (это трехмерный комплекс) вложимо в \mathbb{R}^3 тогда и только тогда, когда P планарен.

(b) *Гипотеза.* Цилиндр $P \times I$ над 2-комплексом P (это трехмерный комплекс) вложим в \mathbb{R}^3 тогда и только тогда, когда никакой гомеоморфный P комплекс не содержит подкомплекса, гомеоморфного кнопке (рис. 34, K_6) или ленте Мебиуса. (Оба эти свойства равносильны вложимости P в сферу с некоторым количеством ручек.)

(c) Какие прямые произведения 2-комплекса на граф вложимы в \mathbb{R}^3 ?

(d)* Какие I -расслоения над 2-комплексами вложимы в \mathbb{R}^3 ?

(e)* А S^1 -расслоения?

4.7 Алгоритм ван Кампена распознавания вложимости графов

В этом и следующем пунктах мы приведем идею доказательства теоремы распознаваемости из п. 4.5.

‘Понятие препятствия, по-видимому, впервые возникло у Ван Кампена при решении проблемы о вложимости n -мерных полиэдров в \mathbb{R}^{2n} для $n \geq 2$ ’ [No76]. (Напомним, что любой n -мерный полиэдр вложим в \mathbb{R}^{2n+1} .) См. [FKT94], [RS96, §2], [RS99, §2],

[RS99', §2], [Fo04], [Sk08, §4]. Но показать основную идею гораздо проще на языке теории графов: на примере проблем планарности графов (в этом пункте), рамсеевской теории зацеплений (§2) и аппроксимируемости пути вложениями (§3).

Идею построения препятствия ван Кампена иллюстрирует доказательство непланарности графа K_5 при помощи леммы 2.3. Чтобы обобщить то рассуждение, введем определения. Кусочно-линейное отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения графа K называется \mathbb{Z}_2 -вложением, если f -образы любых двух несмежных ребер пересекаются в четном числе точек. Граф \mathbb{Z}_2 -планарен, если существует его \mathbb{Z}_2 -вложение в плоскость.

4.25. Граф планарен тогда и только тогда, когда он \mathbb{Z}_2 -планарен. (Используйте теорему Куратовского 1.34. Прямой вывод планарности из \mathbb{Z}_2 -планарности см. в [Sa91]. К. Саркария подтверждает, что в этом выводе имеются пробелы. Прямой вывод \mathbb{Z}_2 -планарности из отсутствия подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$ см. в [Sa91].)

Продемонстрируем идею доказательства теоремы распознаваемости на примере построения алгоритма распознавания \mathbb{Z}_2 -планарности графов.

Построение расстановки $\nu(f)$ для отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения графа K . Для любых двух несмежных ребер σ, τ пересечение $f\sigma \cap f\tau$ состоит из конечного числа точек. Поставим в соответствие неупорядоченной паре $\{\sigma, \tau\}$ вычет

$$\nu(f)_{\sigma\tau} := |f\sigma \cap f\tau| \pmod{2}.$$

Обозначим через K^* множество неупорядоченных пар несмежных ребер графа K . (Знакомые с понятием 2-комплекса могут представлять себе K^* 2-комплексом.) Тогда $\nu(f)$ — отображение из этого множества в \mathbb{Z}_2 . (Или расстановка нулей и единиц на ‘квадратиках’ 2-комплекса K^* .)

4.26. (a) Постройте отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого $\nu(f) \neq 0$.

(b) Каждой точке (x, y) ребре 2-комплекса K^* сопоставим вектор $\tilde{f}(x, y) := \frac{f(x) - f(y)}{|f(x) - f(y)|}$ с направлением от $f(y)$ к $f(x)$. Тогда в каждом ‘квадратике’ 2-комплекса K^* стоит четность числа оборотов вектора при обходе по его границе, т.е. $\nu(f)_{\sigma\tau} = \deg \tilde{f}_{\partial(\sigma \times \tau)}$.

(c) Пусть A — вершина, не являющаяся концом ребра e . При преобразовании Райдемайстера на рис. 36 к $\nu(f)$ добавляется (покомпонентно и по модулю 2) расстановка единицы на паре $\{e', e\}$ для $e' \in A$ и нуля на остальных парах.

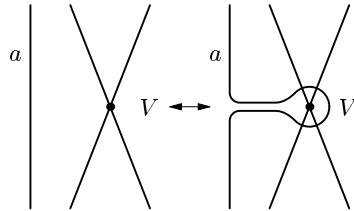


Рис. 36: Преобразование Райдемайстера для графов в плоскости (замени $V \rightarrow A$, $a \rightarrow e$)

Построение препятствия Ван Кампена для графа K . Расстановку из задачи 4.26.c назовем элементарной кограницей $\delta(A, e)$ пары (A, e) . Назовем расстановки ν_1, ν_2 когомологичными, если

$$\nu_1 - \nu_2 = \delta(A_1, e_1) + \cdots + \delta(A_k, e_k)$$

для некоторых вершин A_1, \dots, A_k и ребер e_1, \dots, e_k .

Обозначим через $H^2(K^*)$ множество расстановок с точностью до когомологичности.

¹⁵ Препятствие Ван Кампена (с коэффициентами в \mathbb{Z}_2) определяется как

$$v(K) = [\nu(f)] \in H^2(K^*).$$

Ясно, что $\nu(f) = 0$ для \mathbb{Z}_2 -вложения f . Поэтому $v(K) = 0$ для \mathbb{Z}_2 -планарного графа K .

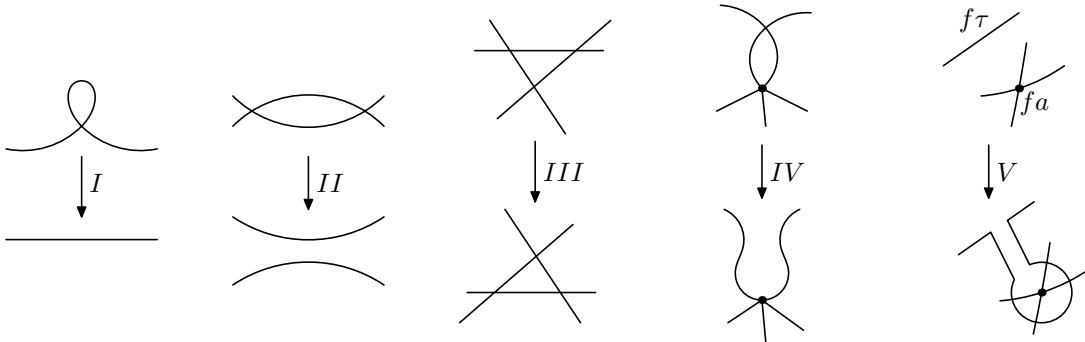


Рис. 37: Преобразования Райдемайстера для графов в плоскости

Пояснение. Любые два отображения общего положения одного графа в плоскость можно перевести друг в друга преобразованиями Райдемайстера, рис. 37. (Это утверждение мы не доказываем, оно нужно только для пояснения, независимость препятствия ван Кампена от выбора f доказывается напрямую, см. задачу 4.27.а и указание к ней.) Из этих преобразований только последнее меняет расстановку $\nu(f)$. Когомологичность — это то отношение эквивалентности на расстановках, которое порождает изменение отображения f .

4.27. (а) Препятствие $v(K)$ определено корректно, т.е. не зависит от выбора отображения f .

(б) Граф K является \mathbb{Z}_2 -планарным тогда и только тогда, когда $v(K) = 0$.

(с) Постройте алгоритм распознавания условия $v(K) = 0$. Быстрее он или медленнее алгоритма распознавания наличия подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$?

Знак точки пересечения упорядоченной пары (a, b) неколлинеарных направленных отрезков на плоскости равен $+1$, если эта пара положительно ориентирована, и равен -1 , если отрицательно.

Кусочно-линейное отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения графа K называется \mathbb{Z} -вложением, если для любых двух несмежных ребер сумма знаков точек пересечения их f -образов равна нулю, для некоторых (или, эквивалентно, для любых) ориентаций на этих ребрах. Говорят: f -образы этих ребер пересекаются в нулевом числе точек с учетом знака. Граф \mathbb{Z} -планарен, если существует его \mathbb{Z} -вложение в плоскость.

4.28. Граф планарен тогда и только тогда, когда он \mathbb{Z} -планарен.

Для отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения графа K поставим в соответствие упорядоченной паре (σ, τ) ориентированных ребер число $N(f)_{\sigma\tau}$ точек их пересечения со знаком.

4.29. (а') $N(f)_{\sigma\tau} = -N(f)_{\tau\sigma}$.

(а) Как меняется расстановка $N(f)$ при изменении ориентации ребра?

(б) Как меняется расстановка $N(f)$ при преобразовании Райдемайстера на рис. 36?

(с) Постройте препятствие Ван Кампена $V(K) \in H^2(K^*; \mathbb{Z}_T)$ к \mathbb{Z} -планарности.

(д) Граф K является \mathbb{Z} -планарным тогда и только тогда, когда $V(K) = 0$.

¹⁵Оно называется *двумерной группой когомологий с коэффициентами в \mathbb{Z}_2* 2-комплекса K^* . Знать это название (и определение 2-комплекса) для определения препятствия Ван Кампена не обязательно.

(e) Постройте алгоритм распознавания условия $V(K) = 0$.

Перед построением многомерного обобщения читателю может оказаться полезным построить маломерное: определить препятствие Ван Кампена к \mathbb{Z}_2 -вложимости графа K в прямую. Ср. п. 2.8, 8.1. Впрочем, следующую задачу (и задачи 4.31.ef) можно пропустить, они не используются далее.

4.30. (a) Для любых отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ общего положения графа K и пары $\{AB, CD\}$ несмежных ребер графа K

$$|f(A) \cap f(CD)| + |f(B) \cap f(CD)| + |f(AB) \cap f(C)| + |f(AB) \cap f(D)| \equiv_2 0.$$

(b) Для любых отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ общего положения графа K обозначим через $\nu(f)$ сопоставление числа $|f(A) \cap f(BC)|$ каждой паре A, BC из вершины и не содержащего ее ребра. Определите аналог преобразований Райдемайстера на рис. 36 для отображений графов в прямую. Выясните, как меняется сопоставление $\nu(f)$ при таком аналоге.

(c) Определим граф $K^{*(1)}$. Его вершины — неупорядоченные пары $\{A, B\}$ различных вершин графа K . Каждой паре A, BC из вершины и не содержащего ее ребра в графе K соответствует ребро в графе $K^{*(1)}$, соединяющее вершины $\{A, B\}$ и $\{A, C\}$. Это ребро обозначается $A \times BC = BC \times A$. Ср. с определением графа \widehat{K} перед задачей 2.36.

Найдите $K^{*(1)}$, если K — цикл с тремя вершинами, триод, K_4 .

(d) Пусть дан коцикл ν (это расстановка нулей и единиц на ребрах графа $K^{*(1)}$). Определим отображение

$$\nu^2 : K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2 \quad \text{формулой} \quad \nu^2\{AB, CD\} := \nu(A \times CD) + \nu(B \times CD) = \nu(AB \times C) + \nu(AB \times D).$$

(Т.е сопоставим неупорядоченной паре $\{AB, CD\}$ непересекающихся ребер графа K сумму двух чисел на «противоположных» ребрах $A \times CD$ и $B \times CD$ «прямоугольника».)

Докажите, что если $\nu = \delta\{A, B\}$ является элементарной кограницей вершины $\{A, B\}$ графа $K^{*(1)}$, то $\nu^2 = \delta(A \times \delta B)$, где δB — множество ребер с концом B .

Поэтому *квадрат Бокштейна* $H^1(K^*) \rightarrow H^2(K^*)$, $x \mapsto x^2$, корректно определен формулой $[\nu] \mapsto [\nu^2]$. Эту операцию можно определить для произвольного комплекса, но мы ограничились необходимым в (e) частным случаем, в котором определение проще.

(e) Сопоставление $\nu(f)$ есть расстановка нулей и единиц на ребрах графа $K^{*(1)}$. По п. (a) сумма четырех чисел ребрах $A \times CD$, $B \times CD$, $C \times AB$, $D \times AB$ равна нулю. Расстановки с таким условием называются *коциклами*. Определим *элементарную кограницу* $\delta\{A, B\}$ вершины $\{A, B\}$ как расстановку единиц на ребрах графа $K^{*(1)}$, содержащих эту вершину, и нулей на остальных ребрах. Назовем коциклы ω_1 и ω_2 *когомологичными*, если $\omega_1 - \omega_2$ является суммой некоторых элементарных кограниц. Определим группу $H^1(K^*)$ как группу коциклов с точностью до когомологичности. Определим препятствие Ван Кампена $v_1(K) \in H^1(K^*)$ к \mathbb{Z}_2 -вложимости графа K в прямую как $v_1(K) = [\nu(f)] \in H^1(K^*)$. Корректность определения вытекает из п. (c).

Докажите, что $v(K) = v_1(K)^2$.

(f) Определите билинейное умножение *Колмогорова-Александера* $\cup : H^1(K^*) \times H^1(K^*) \rightarrow H^2(K^*)$, для которого $x^2 = x \cup x$.

4.8 Алгоритм Ван Кампена распознавания вложимости

Хотя в этом пункте мы приводим идею доказательства теоремы распознаваемости из п. 4.5, знать определение вложения не нужно, поскольку мы используем без доказательства теорему Ван Кампена-Шапиро-Ву (см. далее). Вместо этого понадобятся следующие определения.

Линейное отображение 2-комплекса $K = (V, E, F)$ в \mathbb{R}^3 — отображение $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$. Образом $f(ab)$ ребра ab 2-комплекса K назовем отрезок $f(a)f(b)$. Образом $f(abc)$ грани abc 2-комплекса K назовем треугольник $f(a)f(b)f(c)$ (т.е. выпуклую оболочку этих трех точек). Для n -комплексов и \mathbb{R}^m определения аналогичны. Впрочем, этот пункт интересен даже для $n = 2$.

Кусочно-линейное отображение комплекса K в \mathbb{R}^m — линейное отображение $f : L \rightarrow \mathbb{R}^m$ некоторого комплекса, гомеоморфного комплексу K . Образом $f(a_0a_1 \dots a_n)$ симплекса $a_0a_1 \dots a_n$ комплекса K назовем объединение f -образов симплексов комплекса L , ‘содержащихся’ в $a_0a_1 \dots a_n$.

Кусочно-линейное отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ комплекса K называется отображением общего положения, если образы вершин комплекса, гомеоморфного K , находятся в общем положении.

Кусочно-линейное отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ общего положения n -комплекса K называется \mathbb{Z}_2 -вложением, если f -образы любых двух несмежных n -симплексов пересекаются в четном числе точек.

4.31. (a) Для любых отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ общего положения и несмежных симплексов σ, τ комплекса K их образы $f(\sigma)$ и $f(\tau)$ не пересекаются при $\dim \sigma + \dim \tau < 2n$ и пересекаются в конечном числе точек при $\dim \sigma = \dim \tau = n$.

(b) Для отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ общего положения n -комплекса K поставим в соответствие неупорядоченной паре $\{\sigma, \tau\}$ ориентированных n -симплексов число $\nu(f)_{\sigma\tau}$ точек их пересечения со знаком. Как меняется расстановка $\nu(f)$ при n -мерном аналоге преобразования Райдемайстера на рис. 36?

(c) Постройте препятствие Ван Кампена $v(K) \in H^{2n}(K^*)$ к \mathbb{Z}_2 -вложимости n -комплекса K в \mathbb{R}^{2n} .

(d) Комплекс K размерности n является \mathbb{Z}_2 -вложимым в \mathbb{R}^{2n} тогда и только тогда, когда $v(K) = 0$.

(e)* Постройте препятствие Ван Кампена $v_m(K) \in H^m(K^*)$ к \mathbb{Z}_2 -вложимости n -комплекса K в \mathbb{R}^m . (Начните с $n = 2$ и $m \leq 3$.)

(f)* Сформулируйте и докажите равенство $v_m(K) = v_1(K)^m$ для n -комплекса K .

Знак точки пересечения упорядоченной пары (a, b) ориентированных n -симплексов общего положения в \mathbb{R}^{2n} равен $+1$, если для положительных базисов s_1, \dots, s_n и t_1, \dots, t_n в a и b , соответственно, $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$ является положительным $2n$ -базисом в \mathbb{R}^{2n} , и равен -1 , если отрицательным.

Кусочно-линейное отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ общего положения n -комплекса K называется \mathbb{Z} -вложением, если для любых двух несмежных n -симплексов сумма знаков точек пересечения их f -образов равна нулю, для некоторых (или, эквивалентно, для любых) ориентаций на этих n -симплексах. Говорят: f -образы этих n -симплексов пересекаются в нулевом числе точек с учетом знака.

Теорема Ван Кампена-Шапиро-Ву. Комплекс K размерности $n \neq 2$ вложим в \mathbb{R}^{2n} тогда и только тогда, когда он \mathbb{Z} -вложим в \mathbb{R}^{2n} .

Эта теорема дает, в частности, критерий планарности графов. Хотя другие критерии планарности проще, только приведенный критерий обобщается на высшие размерности.

Задачи 4.39.а и 4.35 показывают, что аналог теоремы Ван Кампена-Шапиро-Ву для $n = 2$ неверен.

Для отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ общего положения n -комплекса K поставим в соответствие упорядоченной паре (σ, τ) ориентированных n -симплексов число $N(f)_{\sigma\tau}$ точек их пересечения со знаком.

4.32. (a) $N(f)_{\sigma\tau} = (-1)^n N(f)_{\tau\sigma}$.

(b) Как меняется расстановка $N(f)$ при изменении ориентации n -симплекса?

(c) Как меняется расстановка $N(f)$ при n -мерном аналоге преобразования Райдемайстера на рис. 36?

(d) Постройте препятствие Ван Кампена $V(K) \in H^{2n}(K^*; \mathbb{Z}_T)$ к вложимости n -комплекса K в \mathbb{R}^{2n} .

(e) Комплекс K размерности n является \mathbb{Z} -вложимым в \mathbb{R}^{2n} тогда и только тогда, когда $V(K) = 0$.

(f)* Постройте препятствие Ван Кампена $V_3(K) \in H^3(K^*; \mathbb{Z}_T)$ к \mathbb{Z} -вложимости 2-комплекса K в \mathbb{R}^3 .

(g)* Постройте 2-комплекс K , не вложимый в \mathbb{R}^3 , для которого $V_3(K) = 0$.

Сформулированная в начале теорема следует из теоремы Ван Кампена-Шапиро-By, задачи 4.32.b и наличия алгоритма распознавания условия $V(K) = 0$.

4.33. (a) Любые три 2-цикла в \mathbb{R}^3 , вершины которых находятся в общем положении, пересекаются в четном количестве точек.

(b)* Для 2-комплекса K постройте препятствие ван Кампена к наличию отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ общего положения, образы при котором любых трех попарно непересекающихся 2-симплексов пересекаются в четном числе точек.

(c)* Докажите полноту построенного препятствия.

Отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ из n -комплекса K называется *r-почти вложением*, если f -образы любых r попарно непересекающихся симплексов не имеют общей точки.

Отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{rk}$ комплекса K размерности $(r-1)k$ называется *r-почти \mathbb{Z} -вложением*, если f -образы любых r попарно непересекающихся симплексов пересекаются в нулевом числе точек с учетом знака, для некоторых (или, эквивалентно, для любых) ориентаций на этих симплексах.

Теорема Мабийяра-Вагнера. [MW14], [MW15] Пусть $k \geq 3$. Комплекс K размерности $(r-1)k$ является *r-почти вложимым* в \mathbb{R}^{rk} тогда и только тогда, когда он является *r-почти \mathbb{Z} -вложимым* в \mathbb{R}^{rk} .

Теорема. Пусть r, k целые положительные и r не степень простого. Тогда любой $(r-1)k$ -мерный комплекс *r-почти \mathbb{Z} -вложим* в \mathbb{R}^{rk} .

Эта теорема доказана в [Fr15, Corollary 3] с использованием неопубликованного результата [Oz87].

Доказательство опровержения топологической гипотезы Тверберга из §1.11. Применим вышеуказанные теоремы для $r = 6$ и $k = 3$. Получим 6-почти вложение $(\Delta^{100})^{(15)} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$ 15-мерного остова 100-мерного симплекса Δ^{100} . Продолжим его произвольно на симплекс Δ^{100} . Обозначим через $g(x)$ расстояние от точки x симплекса Δ^{100} до его 15-мерного остова. Докажем, что $f \times g : \Delta^{100} \rightarrow \mathbb{R}^{19}$ является контрпримером к топологической гипотезе Тверберга для $d = 19$ и $r = 6$. Пусть 6 точек $x_1, \dots, x_6 \in \Delta^{100}$ отобразились в одну точку в \mathbb{R}^{19} и лежат в попарно непересекающихся гранях. Размерность одной из этих граней (н.у.о., первой) не больше $\frac{101}{6} - 1$, т.е. не больше 15. Значит, $g(x_1) = 0$. Тогда $g(x_2) = \dots = g(x_r) = g(x_1) = 0$. Поэтому $f(x_1) = \dots = f(x_r)$. Противоречие. QED

4.9 Неполнота препятствия ван Кампена для 2-комплексов в \mathbb{R}^4

Для трехмерного аналога нужны трехмерная лемма 2.19.а о кольцах Борромео и теорема 2.10 Конвея-Гордона-Закса (ссылки на нее можно заменить ссылками на ее следствие — кусочно-линейный аналог задачи 4.13). Для самого доказательства (задача 4.35) нужны четырехмерная лемма 2.31 о кольцах Борромео и результат 4.14 четырехмерной рамсеевской теории зацеплений.

В этом и следующем пункте обозначим через T тор, через a и b его меридиан и параллель, $K := \text{Con } K_5$. Будем обозначать штрихами копии комплексов и их элементов. Через (ijk) обозначим грань комплекса $\text{Con } K_5$ (или внутренность грани — что именно, видно из контекста). Через $[ijk]$ обозначим объединение ломаных ij, jk, ki комплекса $\text{Con } K_5$.

Рис. 38: www.mccme.ru/circles/oim/algofig.pdf, $P_{x_1 \vee \bar{x}_1}$

Комплекс $P = P_{x_1 \vee \bar{x}_1}$, невложимый в \mathbb{R}^3 . Положим

$$P := [K - (012)] \bigcup_{0=0'} [K' - (012)'] \bigcup_{[012]=a, [012]'=b} T.$$

См. рис. 38 (на нем и на рис. 39 и 40 ниже нужно заменить отрезок $0u0'$ на точку).

Пусть, напротив, P вложим в \mathbb{R}^3 . Будем рассматривать его как подмножество в \mathbb{R}^3 , т.е. отождествим его с его образом. По теореме 2.10 Конвея-Гордона-Закса замкнутая ломаная [345] зацеплена с меридианом $[012] = a$ тора T . Аналогично замкнутая ломаная $[345]'$ зацеплена с параллелью $[012]' = b$ тора T . По определению вложения ни одна из ломаных $[345]$ и $[345]'$ не пересекает тора T . Замкнутые ломаные $[345]$ и $[345]'$ ограничивают диски $\bar{A} := (034) \cup (035) \cup (045)$ и \bar{A}' , соответственно. Значит, эти ломаные ограничивают два (других) непересекающихся несамопересекающихся диска (докажите!). Противоречие с леммой 2.19.а о кольцах Борромео.

Следующая задача 4.34 показывает, что приведенное рассуждение ценно лишь как трехмерное объяснение четырехмерной идеи.

4.34. Комплекс $[K - (012)] \bigcup_{[012]=a} T$ не вложим в \mathbb{R}^3 .

4.35. Зададим комплекс Q той же формулой, что и P , с заменой K на полный гиперграф с 7 вершинами.

(a) Q не вложим в \mathbb{R}^4 . (b) $v(Q) = 0$. (c) $V(Q) = 0$.

4.10 Идея доказательства теоремы 1.42.с об NP-трудности

Пусть имеется формула f для булевой функции, являющаяся дизъюнкцией конъюнкций переменных и их отрицаний. Пусть при этом в каждом ‘слагаемом’ не более трех ‘сомножителей’. Используя п. §4.9, мы построим 2-комплекс P_f со следующим свойством: если P_f вложим в \mathbb{R}^3 , то $f \not\equiv 1$. Более того, количество граней (всех размерностей) в комплексе P является полиномом от количества переменных n в функции f , и построение P_f по f реализуется полиномиальным по n алгоритмом. Аналогично строится 2-комплекс Q_f со следующим свойством: Q_f вложим в \mathbb{R}^4 тогда и только тогда, когда $f \not\equiv 1$. Вместе с аналогичными свойствами ‘полиномиальности’ этого достаточно для теоремы об NP -трудности.

Чтобы показать основную идею без технических подробностей, сначала построим комплекс P_f для частных случаев.

Рис. 39: www.mccme.ru/circles/oim/algofig.pdf: $P_{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$

4.36. (а) (это не задача, а загадка [VINH]) Почему не проходит доказательство невложимости комплекса $P_{x_1 \vee \bar{x}_1}$ в \mathbb{R}^3 (§4.9) для следующего комплекса?

$$P_{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1} := P_{x_1 \vee \bar{x}_1} - (013) = [K - (012) - (013)] \bigcup_{0=0'} [K' - (012)'] \bigcup_{[012]=a, [012]'=b} T.$$

(b) Следующий комплекс (рис. 39) не вложим в \mathbb{R}^3 :

$$P_{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} := [K - (012) - (013)] \bigcup_{0=0'} [K' - (012)'] \bigcup_{0=0''} [K'' - (013)''] \bigcup_{\substack{[012]=a, [012]'=b, \\ [013]=a', [013]'=b'}} T \cup T'.$$

(c) (загадка) Почему не проходит доказательство невложимости в \mathbb{R}^3 из пункта (b) для следующего комплекса?

$$P_{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2} := [K - (012) - (013)] \bigcup_{0=0'} [K' - (012)' - (013)'] \bigcup_{\substack{[012]=a, [012]'=b, \\ [013]=a', [013]'=b'}} T \cup T'.$$

Рис. 40: www.mccme.ru/circles/oim/algofig.pdf: $P_{x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3}$

(d) Следующий комплекс (рис. 40) не вложим в \mathbb{R}^3 :

$$P_{x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3} := [K - (012) - (013) - (014)] \bigcup_{0=0'} [K' - (012)'] \bigcup_{0=0''} [K'' - (013)''] \bigcup_{0=0'''} \bigcup_{\substack{[012]=a', [012]'=b', \\ [013]=a'', [013]'=b'', \\ [014]=a''', [014]'''=b'''}} T' \cup T'' \cup T'''.$$

(e) Следующий комплекс не вложим в \mathbb{R}^3 :

$$P_{x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1} := [K - (012) - (013)] \bigcup_{0=0'} [K' - (012)' - (013)'] \bigcup_{0=0''} \bigcup_{\substack{[012]=a, [012]''=b, \\ [012]'=a', [012]'''=b', \\ [013]=a'', [013]'=b''}} T \cup T' \cup T''.$$

4.37. Следующие комплексы не вложимы в \mathbb{R}^3 .

$$(a) [K - (012) - (013)] \bigcup_{\substack{[012]=a, [013]=a'}} T \cup T'.$$

$$(b) [K - (012) - (013) - (014)] \bigcup_{\substack{[012]=a', [013]=a'', [014]=a'''}} T' \cup T'' \cup T'''.$$

Трехмерная версия основной леммы. Пусть задана формула

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{s=1}^m x_{p_s(2)}^{\alpha_s} x_{p_s(3)}^{\beta_s} x_{p_s(4)}^{\gamma_s}.$$

Здесь $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$ и $p_s : \{2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ индекции. Положим

$$P_f := \bigcup_{0_1=0_2=\dots=0_m} [K - (012) - (013) - (014)]_s \bigcup_{[01p_i^{-1}(k)]_i=a_{ijk}, [01p_j^{-1}(k)]_j=b_{ijk}} \cup_{ijk} T_{ijk}.$$

Здесь индексы s и ijk означают номер копии, причем

s пробегает все целые числа от 1 до m ;

ijk пробегает все (упорядоченные) тройки $(i, j, k) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, для которых в i -м слагаемом есть x_k , а в j -м есть \bar{x}_k (такие тройки назовем конфликтными).

Если P_f вложим в \mathbb{R}^3 , то существует \vec{x} , для которого $f(\vec{x}) = 0$.

4.38. Если $f \equiv 1$, то существует

- (a) конфликтная тройка ijk .
- (b) конфликтная тройка ijk , для которой x_k и \bar{x}_k стоят на первом месте.

Доказательство трехмерной версии основной леммы. Пусть, напротив, $f \equiv 1$ и P_f вложен в \mathbb{R}^3 . Тогда рассмотрим P_f как подмножество в \mathbb{R}^3 .

По теореме Конвея-Гордона-Закса можно считать, что для любого $s = 1, 2, \dots, m$ замкнутые ломаные $[345]_s$ и $[012]_s$ зацеплены (того, чтобы именно эти ломаные были зацеплены, можно добиться, перенумеровав вершины $2_s, 3_s, 4_s$). Так как $f \equiv 1$, то для любого выбора одного сомножителя из каждого ‘слагаемого’ найдутся два сомножителя x_k и \bar{x}_k среди выбранных. То есть существует конфликтная тройка ijk , для которой x_k и \bar{x}_k стоят на первом месте (т.е. $p_i(2) = p_j(2) = k$). По определению вложения замкнутые ломаные $[345]_i$ и $[345]_j$ не пересекают тора $T_{ijk} \subset P_f$.

Для $s \in \{i, j\}$ замкнутая ломаная $[345]_s$ ограничивает диск $(034)_s \cup (045)_s \cup (045)_s$. Значит, ломаные $[345]_i$ и $[345]_j$ ограничивают два (других) непересекающихся несамопересекающихся диска D_1^2 и D_2^2 . Противоречие с леммой о кольцах Борромео. QED

Задачи 4.34 и 4.37 показывают, что справедлив и более сильный факт: если P_f вложим в \mathbb{R}^3 , то в каждом слагаемом есть сомножитель, не участвующий ни в какой конфликтной тройке.

Обращение трехмерной версии основной леммы, по-видимому, неверно. Поэтому доказательство теоремы 1.42.с не проходит для трехмерного случая, см. гипотезу 1.43.а.

Зададим комплекс Q_f той же формулой, что и P_f , с заменой K на полный 2-комплекс L с 7 вершинами.

4.39. Если Q_f вложим в \mathbb{R}^4 , то существует \vec{x} , для которого $f(\vec{x}) = 0$.

Вместо общего доказательства обратного рассмотрим следующие важные примеры.

4.40. Следующие комплексы вложимы в \mathbb{R}^4 .

- (a) $[L-(012)] \bigcup_{[012]=a} T$.
- (b) $Q_{x_1x_2 \vee \bar{x}_1} = [L-(012)-(013)] \bigcup_{0=0'} [L'-(012)'] \bigcup_{[012]=a, [012]'=b} T$.

Указания и решения к некоторым задачам

4.1. Ответы: (a,b) — да, (c,d) — нет.

4.3. Ответы: (3,22) — да, (21, 31, 411, 32) — нет.

4.4. Для перестановок σ , сопряженных степеням цикла $(12 \dots n)$.

4.16. Ответы: (a,b,c) — да, (d,e) — нет.

4.17. Ответы: (a,b,c) — да, (d,e) — нет.

(b) Аналогично рис. f-con.

(d) Он гомеоморфен $\text{Con } K_{3,3}$.

(e) Сведите к почти невложимости $K_5 \times S^1$ в \mathbb{R}^3 при помощи *почти-вложений* (рис. fig-almemb).

4.18. Ответы: (a,b,c) — да, (d,e) — нет.

(d,e) Сведите к почти невложимости $K_5 \times K_5$ в \mathbb{R}^4 при помощи *почти-вложений* (рис. fig-almemb).

4.6. (b) $\mathbb{R}P^2$ гомеоморфна листу Мебиуса с приклеенным по граничной окружности диском. Используйте теорему классификации 2-многообразий.

4.19. (a) Нетривиальна лишь часть ‘тогда’ и лишь для *связных* 2-комплексов. Следующее доказательство (видимо, являющееся фольклорным, см. [Sk05]) проще оригинального. (Впрочем, Халин и Юнг сразу доказывали часть (b).)

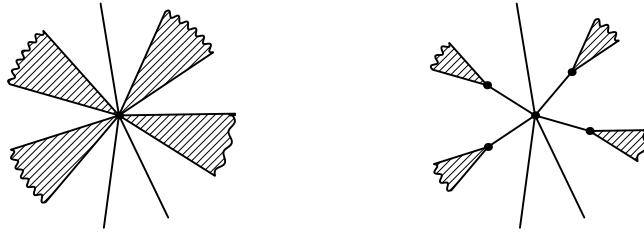


Рис. 41: Преобразование окрестности точки

Пусть связный комплекс $N \not\cong S^2$ не содержит ни графов K_5 , $K_{3,3}$, ни зонтика U . Так как N не содержит зонтика, то окрестность любой точки в N является объединением дисков и отрезков, склеенных за одну точку (рис. 41 слева). Если этих дисков больше одного, то заменим эту окрестность на изображенную на рис. 41 справа. При этом преобразовании не появится подграфов K_5 и $K_{3,3}$. Обратное преобразование является стягиванием ‘звезды с несколькими лучами’ и поэтому сохраняет планарность. Значит, достаточно доказать теорему для полученного 2-комплекса. Рассмотрим объединение \bar{N} его двумерных граней. Тогда окрестность любой точки в \bar{N} является диском. Значит, по теореме классификации 2-многообразий \bar{N} является сферой с ручками, пленками Мебиуса и дырками. Поскольку каждый из графов K_5 и $K_{3,3}$ вложим и в тор с дыркой, и в лист Мебиуса, то \bar{N} есть несвязное объединение дисков с дырками.

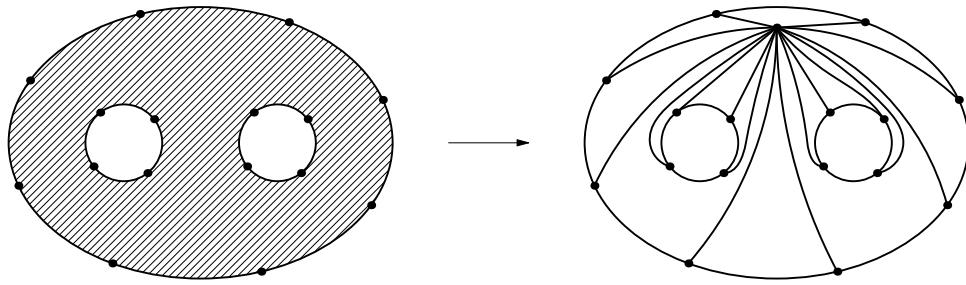


Рис. 42: Преобразование диска с дырками

Заменим каждый из этих дисков с дырками на граф с рис. 42. Полученный граф планарен. По вложению этого графа в плоскость легко построить вложение комплекса \bar{N} в плоскость.

4.24. (b) Используйте идею доказательства теоремы Халина-Юнга.

4.27. (a) Аналогично доказательству леммы 2.3.

(а) *Другое доказательство.* Пусть отображения $f, f' : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения отличаются только на внутренности одного ребра e . Для каждой вершины a графа K проведем некоторый путь, соединяющий эту вершину с бесконечностью, и находящийся в общем положении относительно цикла $f(e) \cup f'(e)$. Пусть a_1, \dots, a_k — все те вершины, для которых проведенный путь пересекает цикл $f(e) \cup f'(e)$ в нечетном числе точек (набор этих вершин не зависит от выбора путей). Тогда $\nu(f) - \nu(f') = \delta\{a_1, e\} + \dots + \delta\{a_k, e\}$. (Докажите!) Любое отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения может быть заменено на любое другое последовательностью нескольких гомеоморфизмов плоскости \mathbb{R}^2 и нескольких изменений внутренности одного ребра (мы не доказываем это интуитивно очевидное утверждение). Поэтому $v(K)$ не зависит от f .

4.29, 4.31, 4.32. [MTW08].

4.30. (e) Возьмем линейное отображение $g : K \rightarrow \mathbb{R}^2$, образы вершин при котором образуют ‘чашку’, т.е. лежат на графике выпуклой функции. Обозначим через $f : K \rightarrow$

\mathbb{R}^1 композицию g и проекции на ось Ox . Тогда $\nu(f)^2 = \nu(g)$. Из этого следует нужная формула.

4.34. (а) Пусть вложим. Замкнутая ломаная [345] ограничивает диск $(034) \cup (045) \cup (045)$. Этот диск пересекает тор в единственной точке 0. Дополнение диска до этой точки находится по одну сторону от тора. Тогда этот диск можно заменить на другой диск в \mathbb{R}^3 с той же граничной окружностью [345], который уже не пересекает тора. (Чтобы это строго доказать, можно рассмотреть маленькую сферу с центром в точке 0.) Значит, по лемме о четности ломаная [345] не зацеплена с параллелью [012] тора (ср. с задачей ??). Противоречие с теоремой Конвея-Гордона-Закса.

4.36. (b,d,e) Аналогично доказательству невложимости комплекса $P_{x_1 \vee \bar{x}_1}$.

4.37. Аналогично задаче 4.34.

4.38. См. доказательство основной леммы.

5 Конфигурационные пространства и планарность

5.1 Препятствие взрезанного квадрата к планарности графов

Конфигурационные пространства полезны как в топологии, так и в других областях математики. Поясним идею их применения на примере критерия планарности графов (и полиэдров). Конечно, проверять планарность графов (и полиэдров) проще без конфигурационных пространств — по теореме Куратовского (и Халина-Юнга). Однако для вложений в высшие размерности аналога теоремы Куратовского (и Халина-Юнга) просто нет, а вот метод конфигурационных пространств хорошо работает [RS96, §6], [RS99, §4], [Sk02], [Sk08, §5]. Итак, в этом пункте читатель на примере изучения планарности графов (и полиэдров) освоит метод, который хорошо работает в многомерном случае, а также является частным случаем более общих методов, полезных для других задач.

Назовем

$$\tilde{N} = \{(x, y) \in N \times N \mid x \neq y\}$$

врезанным квадратом графа (или даже полиэдра или компакта) N .

Если задана триангуляция T графа (или 2-полиэдра) N , то назовем *симплексиальным взрезанным квадратом* этой триангуляции 2-полиэдр (или 4-полиэдр) $\tilde{T} := \{\sigma \times \tau \in T \times T \mid \sigma \cap \tau = \emptyset\}$.

5.1. Рассмотрим (минимальные) триангуляции графов $K_{1,3}$ (триод), K_5 и $K_{3,3}$, а также 2-полиэдра U (зонтик), см. рис. 3. Симплексиальные взрезанные квадраты этих триангуляций графа $K_{1,3}$, полиэдра U , графа K_5 и графа $K_{3,3}$ гомеоморфны соответственно S^1 , S^2 , сфере с 6 ручками и сфере с 4 ручками.

Рассмотрим отображение ‘перестановку сомножителей’ $t : \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}$ и симметрию $a : S^1 \rightarrow S^1$ относительно центра окружности.

5.2. Указанный в задаче 5.1 изоморфизм переводит отображения t на симплексиальных взрезанных квадратах в антиподальные отображения.

Если $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ вложение, то можно определить непрерывное отображение

$$\tilde{f} : \tilde{N} \rightarrow S^1 \quad \text{формулой} \quad \tilde{f}(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{|f(x) - f(y)|}.$$

Для отображения \tilde{f} выполнено $\tilde{f}(y, x) = -\tilde{f}(x, y)$, т.е. $\tilde{f} \circ t = a \circ \tilde{f}$. Такие непрерывные отображения $\tilde{N} \rightarrow S^1$ называются *эквивариантными*. Итак, если N вложим в плоскость, то существует эквивариантное отображение $\Phi : \tilde{N} \rightarrow S^1$.

Используя теорию препятствий, можно построить алгебраическое препятствие к существованию такого эквивариантного отображения. Оно окажется равным препятствию Ван Кампена к планарности графов.

5.3. Теорема Ву. *Если для полиэдра (в частности, графа) N существует эквивариантное отображение $\Phi : \tilde{N} \rightarrow S^1$, то N вложим в плоскость* [Wu65], [SS98].

Теорема Ву интересна, поскольку показывает, что ‘многомерный’ критерий взрезанного квадрата справедлив и для плоского случая. Кроме того, именно критерий взрезанного квадрата может оказаться справедлив для более широкого класса компактов, чем полиэдры (см., впрочем, пункт ‘препятствие взрезанного квадрата к планарности компактов.’).

Доказательство теоремы Ву основано на критерии Куратовского (Халина-Юнга) планарности графов (полиэдров), задачах 4.10 и 5.2, а также случае $n = 1$ следующего знаменитого результата (другие его применения см. в следующем пункте). Отображение $f : S^n \rightarrow S^m$ сферы в сферу называется *эквивариантным* (или *нечетным*), если $f(-x) = -f(x)$ для каждого $x \in S^n$.

Теорема Борсуга-Улама. *Ничтое отображение $S^{n+1} \rightarrow S^n$ не эквиварантно.*

Комментарий по поводу доказательства. Достаточно доказать, что любое нечетное отображение $f : S^n \rightarrow S^n$ имеет нечетную степень. Для $n = 1$ см. [S]. Для произвольного n можно доказать и использовать коммутативность следующей диаграммы (коэффициенты \mathbb{Z}_2):

$$\begin{array}{ccccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{p_*} & H_n(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\cap \mathbb{R}P^0} & H_0(\mathbb{R}P^n) \\ \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow \bar{f}_* \\ H_n(S^n) & \xrightarrow{p_*} & H_n(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\cap \mathbb{R}P^0} & H_0(\mathbb{R}P^n) \end{array}$$

Другое доказательство приведено в [Pr04, §8.8].

5.1. Для K_5 и $K_{3,3}$. Проверьте, что \tilde{T} является 2-многообразием без края, вычислите его эйлерову характеристику и докажите его ориентируемость. Ориентируемость следует, например, из вложимости 2-полиэдра \tilde{T} во *врезанный джойн* (определенный в [Pr04]) графа K_5 или $K_{3,3}$, который гомеоморфен S^3 .

5.2 Приложение: теорема Мура о триодах и непланарное бесконечное дерево

Теорема Мура. *Плоскость не содержит несчетного семейства попарно непересекающихся триодов.*

Поскольку любое несчетное подмножество в (полном) пространстве замкнутых ограниченных подмножеств плоскости содержит сходящуюся последовательность, то теорема Мура вытекает из следующей леммы. Обозначим через T триод.

Лемма. *Для любого вложсения $f_0 : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ существует $\varepsilon > 0$, для которого образ $f_\varepsilon(T)$ любого вложсения $f_\varepsilon : T \rightarrow \mathbb{R}^2$, являющегся ε -близким к f_0 (т.е. $|f_0(x), f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in T$), пересекается с образом $f_0(T)$.*

Доказательство. Будем считать триод T вложенным в плоскость при помощи отображения f_0 и, тем самым, пропускать f_0 в обозначениях. Возьмем число ε настолько малым, что на триоде $T = f_0(T)$ можно поменять местами две точки путем их непрерывного движения, в процессе которого расстояние между ними больше ε . Чтобы получить противоречие, достаточно определить непрерывное отношение ' $<$ ' на парах точек $X, Y \in T$, для которых $|XY| > \varepsilon$. (Это отношение не обязательно будет транзитивным, т.е. условия $A < B$ и $B < C$ не обязательно влечут $A < C$.)

Рассмотрим движение двух точек — одной в T , а другой в $f_\varepsilon(T)$. В первый момент времени они совпадают с точками X и $f_\varepsilon(Y)$, соответственно. Затем первая точка движется вдоль (единственной) дуги $l \subset T$ от X к Y , а вторая точка движется вдоль дуги $f_\varepsilon(l) \subset f_\varepsilon(T)$ от $f_\varepsilon(Y)$ к $f_\varepsilon(X)$. Если вектор, смотрящий от первой точки ко второй, повернется по часовой стрелке, то положим $X < Y$; если против, то положим $Y < X$. Ясно, что для пар точек X, Y с $|XY| > \varepsilon$ это отношение определено (т.е. вектор не мог повернуться на нулевой угол). Более того, отношение ' $<$ ' непрерывно зависит от X и Y . QED

5. Пусть K — (двумерный) многоугольник на плоскости и a — вектор, для которых образ $K + a$ многоугольника K при сдвиге на вектор a не пересекается с K , т.е. $K \cap (K + a) = \emptyset$. Тогда два воза (т. е. круга диаметра a) не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по K , так что возы не сталкиваются.

В оставшейся части этого пункта и во всем следующем пункте используется понятие *компакта*. Читатель может пропустить эту часть текста без ущерба для понимания

дальнейшего или прочитать определения в [Ки68]. Здесь заметим лишь, что понятие компакта является обобщением понятий графа и вообще полиэдра. Компакты естественно появляются при изучении динамических систем (даже гладких!).

Компакт называется *одномерным*, если у него существуют покрытия сколь угодно мелкими открытыми множествами, никакие три из которых не пересекаются. Ясно, что граф является одномерным компактом.

Любой *стягиваемый граф*, т.е. дерево, планарен (из сформулированной ниже теоремы Клэйтора вытекает также, что любой *стягиваемый одномерный компакт Пеано* планарен). Следующий пример показывает, что для компактов дело обстоит иначе.

Пример невложимости. *Существует стягиваемый одномерный непланарный компакт.*

Этот пример является фольклорным результатом 1930-х годов. В качестве такого компакта можно взять $N = T \times \left(0 \cup \left\{\frac{1}{k}\right\}\right) \cup x \times [0, 1]$, где T — триод и $x \in T$. Ясно, что компакт N стягиваем и одномерен.

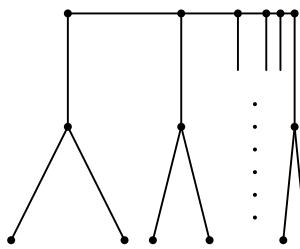


Рис. 43: Стягиваемый одномерный непланарный компакт

Элементарное доказательство невложимости компакта N в плоскость [CRS98], [KS99] получается применением Леммы к $f_0 = f_{T \times 0}$.

Приведем *другое доказательство невложимости компакта N в плоскость*. Его преимущество в том, что оно подходит и для доказательства следующего многомерного аналога примера невложимости.

6. Для любого n существует стягиваемый n -мерный компакт, не вложимый в \mathbb{R}^{2n} [RSS95, доказательство Следствия 1.5], [RS01].

Доказательство невложимости N в плоскость, основанное на теореме Борсук-Улама. Предположим, что существует вложение $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$. Заметим, что существует отображение $\varphi : S^1 \rightarrow T$, которое не склеивает антиподы (т.е. диаметрально противоположные точки). Тогда мы можем определить отображение $\psi : S^1 \rightarrow T \times T$ формулой $\psi(s) = (\varphi(s), \varphi(-s))$. Так как φ не склеивает антиподов, то $\psi S^1 \cap \text{diag } T = \emptyset$. Следовательно, можно определить отображения

$$g_0 : \psi S^1 \rightarrow S^1 \quad \text{формулой} \quad g_0(x, y) = \frac{f(x, 0) - f(y, 0)}{|f(x, 0) - f(y, 0)|} \quad \text{и}$$

$$g_k : T \times T \rightarrow S^1 \quad \text{формулой} \quad g_k(x, y) = \frac{f(x, 0) - f\left(y, \frac{1}{k}\right)}{|f(x, 0) - f\left(y, \frac{1}{k}\right)|}.$$

Отображения ψ , g_0 и g_k эквивариантны относительно инволюций на $\psi S^1 \subset T \times T$ и S^1 , переставляющих сомножители и антиподы, соответственно. Так как $|\psi S^1, \text{diag } T| > 0$, то для точки $(x, y) \in \psi S^1$ и достаточно большого k точки $g_0(x, y)$ и $g_k(x, y)$ будут близкими. Следовательно, они не могут быть антиподами. Поэтому g_0 эквивариантно гомотопно $g_k|_{\psi S^1}$. Но $g_k|_{\psi S^1}$ продолжается на стягиваемое пространство $T \times T$ и поэтому

нуль-гомотопно. Следовательно, $g_0 : \psi S^1 \rightarrow S^1$ нуль-гомотопно. Значит, отображение $g_0 \circ \psi : S^1 \rightarrow S^1$ эквивариантно и нуль-гомотопно, что противоречит теореме Борсука-Улама. QED

5.3 Приложение: препятствие взрезанного квадрата к планарности компактов

Знаменитой нерешенной проблемой является проблема описания *связных компактов*, вложимых в плоскость.

Связный компакт называется *локально связным* (или континуумом Пеано), если для любой его точки x и ее окрестности U существует такая меньшая окрестность V точки x , что любые две точки из V соединяются некоторым путем, целиком лежащим в U (или, эквивалентно, если он является непрерывным образом дуги $[0, 1]$). Континуумы Пеано могут быть очень сложно устроены [Киб68]. Поэтому удивительно, что имеется следующий результат.

Теорема Клэйтора. *Континуум Пеано вложим в S^2 тогда и только тогда, когда он не содержит компактов K_5 , $K_{3,3}$, C_{K_5} и $C_{K_{3,3}}$ (рис. 44).*

Рисунок 44 пока отсутствует

Рис. 44: Континуумы Куратовского-Клэйтора

Построение компактов C_{K_5} и $C_{K_{3,3}}$. Возьмем ребро ab графа K_5 и отметим на нем новую вершину a' . Пусть $P = K_5 - (aa')$. Пусть P_n копия графа P . Обозначим через a_n и a'_n вершины графа P_n , соответствующие a и a' . Тогда

$$C_{K_5} = (P_1 \bigcup_{a'_1=a_2} P_2 \bigcup_{a'_2=a_3} P_3 \dots) \bigcup_{x=0} I,$$

где $\{P_n\}$ — последовательность графов на плоскости со стремящимися к нулю диаметрами, сходящаяся к точке $x \notin \sqcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Точно так же можно определить компакт $C_{K_{3,3}}$, взяв в начале $K_{3,3}$ вместо K_5 .

Ясно, что отсутствие подкомпактов, гомеоморфных одному из графов K_5 и $K_{3,3}$ (даже вместе с отсутствием подкомпактов, гомеоморфных компактам C_{K_5} и $C_{K_{3,3}}$), недостаточно для планарности компакта (докажите!). Поэтому для изучения указанной проблемы нужны новые препятствия к вложимости в плоскость. В этом пункте мы докажем, что *препятствие взрезанного квадрата полно для континуумов Пеано и неполно для произвольных связных компактов* [Sk98].

Доказательство теоремы *Ву для континуумов Пеано N .* По теореме Клэйтора достаточно доказать, что не существует эквивариантных отображений $\widetilde{C_{K_5}} \rightarrow S^1$ и $\widetilde{C_{K_{3,3}}} \rightarrow S^1$. Пусть, напротив, $\Phi : \widetilde{C_{K_5}} \rightarrow S^1$ — эквивариантное отображение. Обозначим через S_n окружность в P_n , составленную из ребер, не содержащих вершин a_n и a'_n . Для достаточно больших n и $m < l$ последовательно получаем гомотопическую тривиальность сужений Φ на следующие множества:

$$x \times 1, \quad S_n \times 1, \quad S_n \times 0, \quad S_n \times S_m, \quad S_m \times S_l, \quad S_m \times a_m, \quad S_m \times a'_m.$$

(Первый переход верен, так как S_n сходится к x . Второй переход верен, так как $\Phi|_{S_n \times 0}$ является гомотопией между $\Phi|_{S_n \times 0}$ и $\Phi|_{S_n \times 1}$. Третий переход верен, так как S_m сходится к x . Пятый переход верен, так как $\Phi|_{S_m \times a_m}$ и $\Phi|_{S_m \times a'_m}$ 'гомотопны'.)

Значит, $\Phi|_{\widetilde{P_m}}$ эквивариантно продолжается на $\widetilde{P_m} \cup S_m \times (aa')_m \cup (aa')_m \times S_m$. Это пространство эквивариантно гомоморфно $\widetilde{K_5}$, что противоречит отсутствию эквивариантных отображений $\widetilde{K_5} \rightarrow S^1$.

Несуществование эквивариантного отображения $\widetilde{C_{K_{3,3}}} \rightarrow S^1$ доказывается аналогично. (Сравните это доказательство с доказательством невложимости в теореме Клэйтона [Sk05].) QED

Пример трехадического соленоида. *Трехадический соленоид Σ_3 не вложим в плоскость, хотя существует эквивариантное отображение $\Phi : \widetilde{\Sigma}_3 \rightarrow S^1$ [Sk98].*

Приведем построение знаменитого p -адического соленоида Виеториса-Ван Данцига, который возникает в разных отделах топологии и теории динамических систем. Он является пересечением бесконечной последовательности полноторий, каждый из которых вписан в предыдущий со степенью p . Более точно, возьмем полноторие $T_1 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть $T_2 \subset T_1$ будет полноторием, проходящим p раз вдоль оси полнотория T_1 . Аналогично, пусть $T_3 \subset T_2$ будет полноторием, проходящим p раз вдоль оси полнотория T_2 . Продолжая аналогично, получаем бесконечное семейство полноторий $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \dots$. Пересечение всех полноторий T_i называется p -адическим соленоидом Σ_p . Формально,

$$\Sigma_p = \{(x_1, x_2, \dots) \in l_2(S^1) : x_i \in S^1, x_{i+1}^p = x_i\}, \quad \text{где } S^1 = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}.$$

Это пространство рассматривается с топологией Тихонова (как и $\widetilde{\Sigma}$ и U_n в нижеследующем доказательстве).

Заметим, что p -адический соленоид локально вложим в плоскость, но не вложим ни в какое 2-многообразие.

Построение эквивариантного отображения $\widetilde{\Sigma}_3 \rightarrow S^1$. Имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{\Sigma} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots) \mid & x_i, y_i \in S^1, x_{i+1}^3 = x_i, \\ & y_{i+1}^3 = y_i \text{ для каждого } i \text{ и } x_i \neq y_i \text{ для некоторого } i\}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$U_n = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots) \in \widetilde{\Sigma} : |x_n, y_n| > 4^{-n}\}.$$

Так как $|x_n, y_n| \leq 3|x_{n+1}, y_{n+1}|$ для каждого n , то $|x_n, y_n| > 4^{-n}$ для достаточно большого n . Поэтому $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ и $\widetilde{\Sigma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Так как U_n открыто, достаточно построить последовательность таких эквивариантных отображений $R_n : U_n \rightarrow S^1$, что $R_n = R_{n+1}|_{U_n}$.

Обозначим $S_n = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 : |x, y| \geq 4^{-n}\}$. Достаточно построить последовательность таких эквивариантных отображений

$$r_n : S_n \rightarrow S^1, \quad \text{что } r_n(x^3, y^3) = r_{n+1}(x, y) \quad \text{при } (x^3, y^3) \in S_n.$$

Мы будем строить такие отображения r_n последовательно. Пусть $r_0 : S_0 \rightarrow S^1$ — произвольное эквивариантное отображение. Предположим, что r_{n-1} уже построено. Для дуги $M \subset S^1$ с концами в a и b обозначим через $A(M) = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid \arg \frac{x}{y} \in M\}$ кольцо с граничными циклами $A(a)$ и $A(b)$. Обозначим $\varepsilon = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$. Используя условие $r_n(x, y) = r_{n-1}(x^3, y^3)$, мы можем определить отображение r_n на объединении трех колец (обозначенных белым на рис. 45)

$$A\left[\varepsilon; \frac{2\pi}{3} - \varepsilon\right] \cup A\left[\frac{2\pi}{3} + \varepsilon; \frac{4\pi}{3} - \varepsilon\right] \cup A\left[\frac{4\pi}{3} + \varepsilon; 2\pi - \varepsilon\right].$$

Так как сужения отображения r_{n-1} на окружности $A(3\varepsilon)$ и $A(2\pi - 3\varepsilon)$ гомотопны, то сужения отображения r_n на окружности $A\left(\frac{2\pi}{3} - \varepsilon\right)$ и $A\left(\frac{4\pi}{3} + \varepsilon\right)$ тоже гомотопны. Значит,

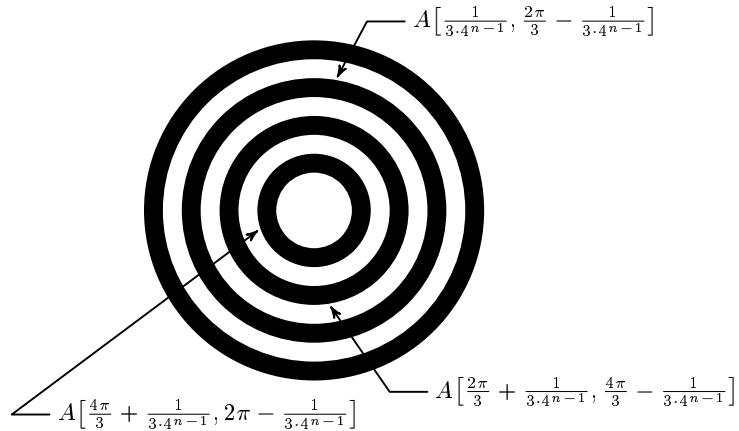


Рис. 45: Отображение r_n определено на белых кольцах и продолжается на черные.
Заменить $\frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} \rightarrow \varepsilon$

r_n продолжается на $A\left[\frac{2\pi}{3} - \varepsilon, \frac{2\pi}{3} + \varepsilon\right]$. Следовательно, r_n эквивариантно продолжается на S_n . Мы берем в качестве $r_n : S_n \rightarrow S^1$ любое такое продолжение. QED

Гипотеза. Существует древовидный компакт N , не вложимый в плоскость, но для которого есть эквивариантное отображение $\tilde{N} \rightarrow S^1$.

6 Утолщения графов

6.1 Реализуемость иероглифов на плоскости

6.1. Улицы города (с двусторонним движением) идут либо с севера на юг, либо с запада на восток. (См. рис. 46.)

(а) Из одного перекрестка выехали два велосипедиста: первый на север, второй на восток. Оба они приехали на этот же перекресток: первый с юга, второй с запада. Докажите, что один из велосипедистов пересекал следы другого.

(б) Из одного перекрестка выехали три велосипедиста: первый на север, второй на восток и третий на запад. Все они приехали на другой перекресток: первый с севера, второй с востока и третий с запада. Докажите, что один из велосипедистов пересекал следы другого.

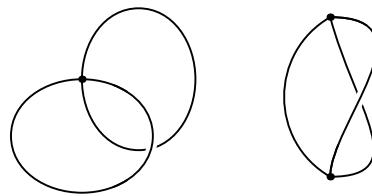


Рис. 46: Пути велосипедистов пересекаются (изменить; ...с севера на юг...!)

При решении этой задачи можно использовать без доказательства следующий факт.

Теорема Жордана. *Замкнутая несамопересекающаяся кривая на плоскости делит плоскость ровно на две части. Две точки плоскости, не принадлежащие кривой, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить ломаной, не пересекающей кривой.*

Будем рассматривать слова длины $2n$ из n букв, в которых каждая буква встречается два раза. *Упрощенным иероглифом* называется такое слово с точностью до переименования букв, циклического сдвига и симметрии.

Эквивалентно, *упрощенным иероглифом* называется семейство (занумерованных) петель с общей вершиной, для которого указан *неориентированный циклический порядок* выходящих из вершины отрезков (отрезки, отвечающие одной петле, занумерованы номером этой петли).

Эквивалентно, *упрощенным иероглифом* называется фигура из $2n$ отрезков с общей вершиной на плоскости ('плоская звезда с $2n$ лучами'), отрезки которой пересекаются друг с другом только по общей вершине и произвольным образом разбиты на (занумерованные) пары.

В этом и следующем пунктах, если не оговорено противное, упрощенные иероглифы называются просто *иероглифами*.

Рис. 47: Утолщения слов $(abab)$, $(abacbc)$ и $(abcabc)$

Иероглифы изображаются рисунками типа рис. 47, 48. При этом циклический порядок задается обходом выходящих из вершины отрезков вокруг вершины.

Иероглиф называется *реализуемым на плоскости*, если можно соединить ребра каждой пары ломаной так, чтобы не было пересечений. Или, эквивалентно, если его петли можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, чтобы при обходе по плоскости вокруг вершины выходящие из нее отрезки проходились бы в соответствии с указанным циклическим порядком.

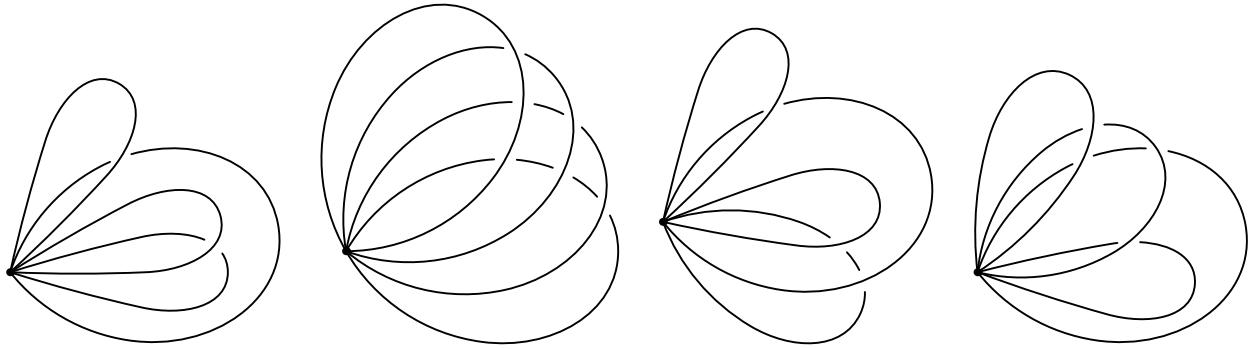


Рис. 48: Утолщения слов из четырех букв (заменить на рис. 15 с <http://www.mccme.ru/circles/oim/nedosta.eps>)

Например, иероглиф $(abab)$ (рис. 47) не реализуем на плоскости (ср. с задачей 6.1.a).

6.2. Иероглиф G реализуем на плоскости тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух следующих эквивалентных условий:

G не содержит иероглифа $(abab)$.

граф петель иероглифа G является объединением изолированных вершин.

Понятие ‘содержит’ для иероглифов определите самостоятельно.

Графом петель иероглифа называется граф, вершинами которого являются петли иероглифа; две вершины соединены ребром, если соответствующие две петли образуют иероглиф $(abab)$ (т.е. ‘скрещиваются’).

6.2 Реализуемость иероглифов на двумерных многообразиях

Иероглиф называется *реализуемым на торе*, если на торе можно соединить ломаной отрезки каждой пары в звезде так, чтобы не было пересечений. Или, эквивалентно, если его петли можно изобразить без самопересечений на торе так, чтобы при обходе по тору вокруг вершины выходящие из нее отрезки проходились бы в соответствии с указанным циклическим порядком.

Например, иероглифы $(abab)$, $(abcabc)$ и $(abacbc)$ на рис. 47 реализуемы на торе (см. [Sk], задачи 2.17.ab и перед ними).

В этом параграфе используйте *не гомеоморфность друг другу сфер с разным числом ручек* [Sk, §5.5]. Комментарии по поводу гомеоморфности см. в [Sk, §2.4].

6.3. (a) Тор с дыркой невозможно вырезать из сферы.

(b) Сферу с двумя ручками и одной дыркой невозможно вырезать из тора.

(cdef) Иероглифы на рис. 48 не реализуемы на торе.

6.4. [Cu81], [KPS]. Следующие условия на иероглиф G эквивалентны

(1) G реализуем на торе.

(2) G не содержит ни одного иероглифа с рис. 48.

(3) граф петель иероглифа G является объединением изолированных вершин и полного трехдольного графа $K_{p,q,r}$.

(4) G редуцируется до одного из иероглифов $()$ (так обозначается иероглиф без петель), $(abcabc)$ или $(abab)$.

Редукцией (упрощенного) иероглифа называется композиция некоторого числа следующих преобразований.

(D) Удаление некоторой изолированной петли (т.е. такой петли, которая в циклическом порядке задается двумя подряд идущими буквами $(aa\dots)$).

(R) Замена двух 'параллельных' петель a и a' (т.е. петель, соответствующие которым буквы в циклическом порядке находятся на соседних местах и не чередуются: $(aa' \dots a'a \dots)$) на одну.

Иероглиф называется *реализуемым на сфере с g ручками*, если на сфере с g ручками можно соединить ломаной отрезки каждой пары в звезде так, чтобы не было пересечений. Или, эквивалентно, если петли можно изобразить без самопересечений на сфере с g ручками так, чтобы при обходе по сфере с g ручками вокруг вершины выходящие из нее ребра проходились бы в соответствии с указанным циклическим порядком.

Например, каждый из иероглифов на рис. 48 реализуем на сфере с двумя ручками.

- 6.5. (a) Придумайте иероглиф, не реализуемый на сфере с двумя ручками.
 (b) Для каждого g придумайте иероглиф, не реализуемый на сфере с g ручками.
 (c) Если иероглиф не реализуем на сфере с g ручками, а при удалении любой его петли получается иероглиф, реализуемый на сфере с g ручками, то в исходном иероглифе $2g + 2$ петли.

(d) **Теорема.** Для каждого g существует алгоритм распознавания реализуемости иероглифов на сфере с g ручками.

(e)* Для каждого g существуют такие (универсальные) иероглифы E_1, \dots, E_s со следующим свойством: данный иероглиф реализуем на сфере с g ручками тогда и только тогда, когда он редуцируется до одного из иероглифов E_1, \dots, E_s)

(f)* Для каждого g существуют такие (запрещенные) иероглифы E_1, \dots, E_s со следующим свойством: данный иероглиф реализуем на сфере с g ручками тогда и только тогда, когда он не содержит ни одного из иероглифов E_1, \dots, E_s .

(g)** Найдите количества универсальных и запрещенных иероглифов для $g = 2$. Оцените их для произвольного g .

Было бы интересно найти и другие описания иероглифов, реализуемых на сфере с g ручками, и оценить их число. См. задачу 6.4, [Cu81] [Vd95] [Vd96] [Vd97]. Эта задача связана с подсчетом числа многоугольников, склейкой которых получается сфера с g ручками.

Реализуемость иероглифа на ленте Мебиуса (рис. 58, 35) и на бутылке Клейна (рис. 35) определяется аналогично реализуемости на сфере с ручками.

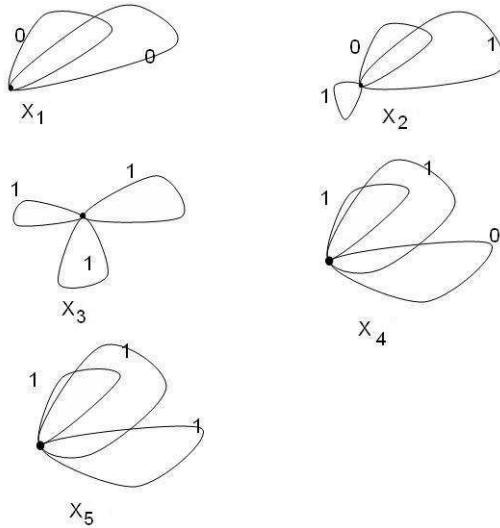


Рис. 49: Запрещенные иероглифы для бутылки Клейна

- 6.6. (a) Иероглифы $(abab)$ и $(abcabc)$ (рис. 47 слева) реализуемы на листе Мебиуса.
 (b) Редукция иероглифов не обязательно сохраняет реализуемость на листе Мебиуса.

- (c) Следующие условия на иероглиф равносильны:
 реализуем на листе Мебиуса;
 не содержит иероглифов $(ababcdcd)$ (рис. 48 слева) и $(abacbc)$ (рис. 47).
 его граф петель является объединением изолированных вершин и полного графа.
 (d) Опишите иероглифы, реализуемые в бутылке Клейна.

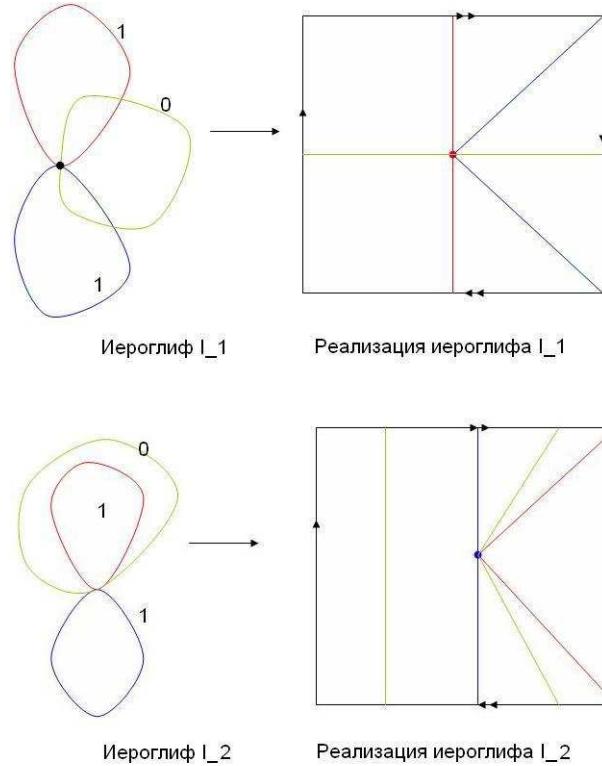


Рис. 50: Универсальные иероглифы для бутылки Клейна

6.7. * *Диск с t лентами Мебиуса* определен в [Sk], §2. *Реализуемость* иероглифа на диске с лентами Мебиуса определяется аналогично реализуемости на сфере с ручками. Опишите иероглифы, реализуемые в диске с t листами Мебиуса.

Иероглифом (не упрощенным) называется иероглиф вместе с некоторой расстановкой нулей и единиц на его петлях (рис. 49, 50).

Иероглиф (не упрощенный) называется *реализуемым* на листе Мебиуса, если его петли можно изобразить без самопересечений на листе Мебиуса так, чтобы

— при обходе по листу Мебиуса вокруг вершины выходящие из нее отрезки проходились бы в соответствии с указанным циклическим порядком, и

— вдоль петель, на которых стоит единица, менялась бы ориентация, а вдоль петель, на которых стоит ноль, не менялась бы.

Редукцией иероглифа (не упрощенного) называется композиция некоторого числа преобразований (D) и (R) для петель с нулем, а также следующего преобразования.

(R') Замена двух 'параллельных' петель a и a' с единицей (т.е. для которых в циклическом порядке буквы, соответствующие этим петлям, находятся на соседних местах и чередуются: $(aa' \dots aa' \dots)$) на одну.

6.8. Ср. [Cu81] (a) Следующие условия на иероглиф (не упрощенный) равносильны реализуемости на листе Мебиуса:

не содержит ни одного иероглифа с рис. ???

редуцируется к иероглифу с одной петлей с единицей.

(b)* Следующие условия на иероглиф равносильны реализуемости на бутылке Клейна:

не содержит ни одного иероглифа с рис. 49;

редуцируется к одному из двух иероглифов с рис. 50.

(c)* Опишите иероглифы (не упрощенные), реализуемые на диске с t листами Мебиуса.

6.3 Определение и примеры утолщений

Конструкция *утолщения* возникает во многих задачах топологии и ее приложений (синонимы: граф с вращениями, эскиз [Ha], [KPS], [LZ]).

Графом с петлями и кратными ребрами называется конечное множество V вместе с таким отображением $e : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ в множество целых неотрицательных чисел, что $e(x, y) = e(y, x)$. Элементы множества V называются *вершинами*. Пара различных (или совпадающих) вершин, переходящая в число $k > 0$, называется *ребром* (или *петлей*) *кратности* k . (Ребром или петлей кратности 0 удобно называть пару, переходящую в 0.)

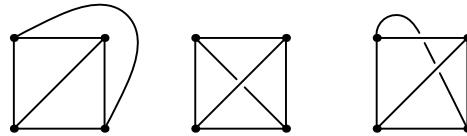


Рис. 51: Все ориентированные утолщения графа K_4 с незанумерованными вершинами

Полуребром графа называется половинка ребра. При этом петле кратности k отвечает $2k$ полуребер. *Ориентированным утолщением* графа называется этот граф вместе с указанием для каждой его вершины ориентированного циклического порядка выходящих из нее полуребер. См. рис. 51.

Приведем эквивалентное ‘определение’ ориентированного утолщения. Оно сложнее тем, что двумерно (а не одномерно), но именно оно возникает в других областях математики. Кроме того, иногда с ним удобнее работать.



Рис. 52: Соединение дисков ленточкой

Для данного графа G рассмотрим несвязное объединение дисков, число которых равно числу вершин графа. На каждой граничной окружности диска выберем ориентацию и отметим непересекающиеся отрезки, отвечающие выходящим из соответствующей вершины ребрам, в указанном ориентированном циклическом порядке. Для каждого ребра графа соединим (не обязательно в плоскости) соответствующие ему два отрезка ленточкой-прямоугольником (так, чтобы разные ленточки не пересекались), см. рис. 52. При этом стрелки на окружностях должны быть противоположны. Заметим, что каждый из двух способов на рис. 52 может отвечать такому соединению дисков ленточками.

Обозначим через N объединение построенных дисков и ленточек. Пара (N, G) , состоящая из N и графа G , лежащего в N , называется (*двумерным*) *ориентированным утолщением* графа G . (Граф G называется *спайном*, или *утолщением* фигуры N .)

Примеры ориентированных утолщений. (1) Цилиндр с его средней линией является ориентированным утолщением окружности.

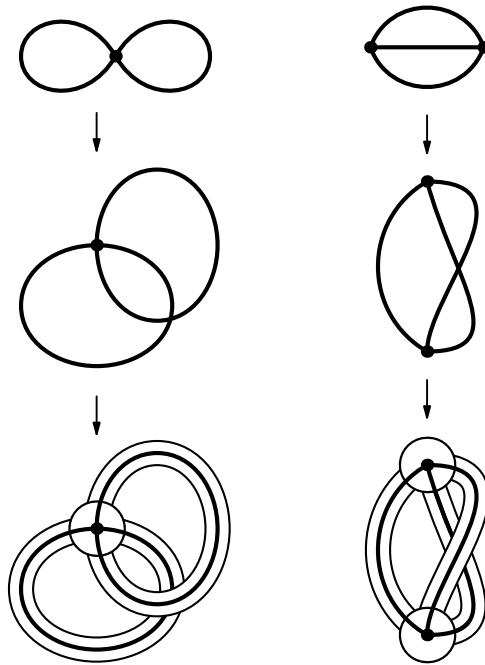


Рис. 53: Построение утолщения по отображению графа в плоскость (добавить ряд без самопересечений!)

(2) Если график вложен в плоскость (или в сферу с ручками), то легко выбрать окрестность этого графика, являющуюся его ориентированным утолщением.

(3) Если дано отображение *общего положения* графа G в плоскость (или в сферу с ручками), то можно построить ориентированное утолщение графа G , соответствующее этому отображению (рис. 54, 51, 53).

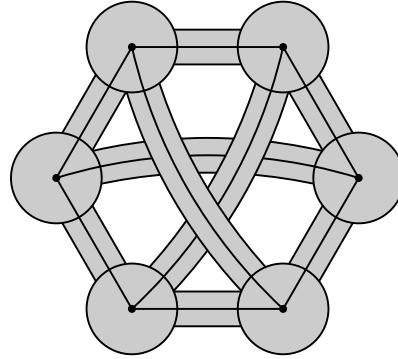


Рис. 54: Утолщение графа $K_{3,3}$

6.9. (a) Сколько ориентированных утолщений с занумерованными вершинами у графа K_4 ?

(b)* То же с незанумерованными вершинами (т.е. сколько ориентированных утолщений с точностью до изоморфизма у графа K_4 ?).

Комментарии по поводу гомеоморфности и краевых окружностей см. в [Sk, §2.4, §2.5].

6.10. (a) У любого ориентированного утолщения дерева одна краевая окружность.

(b) У любого ориентированного утолщения цикла две краевые окружности.

(c) Существует график, имеющий два ориентированных утолщения с разным числом краевых окружностей.

(d) По ориентированному утолщению постройте граф, число компонент связности которого равно числу краевых окружностей утолщения. (Значит, это число можно находить на компьютере, не рисуя рисунка.)

6.11. (a) Объединение дисков и ленточек ориентированного утолщения дерева можно изобразить без самопересечений на плоскости так, чтобы оно заполняло двумерный многоугольник.

(b) Объединение дисков и ленточек ориентированного утолщения цикла можно изобразить без самопересечений на плоскости так, чтобы оно заполняло замыкание дополнения одного двумерного многоугольника до другого, в нем лежащего.

(c) Любое ориентированное утолщение ‘восьмерки’ гомеоморфно либо диску с двумя дырками, либо тору с дыркой.

(d) Чему может быть гомеоморфно ориентированное утолщение графа K_4 ?

6.12. (a) *Формула Эйлера.* Ориентированное утолщение связного графа с V вершинами и E ребрами, имеющее F краевых окружностей, гомеоморфно сфере с $(2 - V + E - F)/2$ ручками и F дырками.

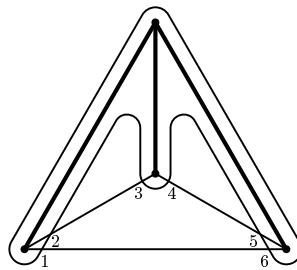


Рис. 55: Обход максимального дерева

(b) *Формула Мохара.* Пусть дано ориентированное утолщение связного графа с V вершинами и E ребрами. Возьмем максимальное дерево в графе и соответствующее подутолщение (рис. 55). Это подутолщение имеет одну краевую окружность. При обходе по ней получается циклическая последовательность ребер вне максимального дерева, в которой каждое ребро встречается два раза. Занумеруем эти ребра числами от 1 до $n := E - V + 1$. Построим матрицу $n \times n$ следующим образом. Если $i \neq j$ и ребра i и j в полученной циклической последовательности чередуются (т.е. идут в порядке $ijij$, а не $ijji$), то в клетке $i \times j$ поставим единицу. В остальных клетках поставим нули. Обозначим через b ранг над \mathbb{Z}_2 полученной матрицы. Тогда b четно и данное ориентированное утолщение гомеоморфно сфере с $b/2$ ручками и некоторым количеством дырок.

6.4 Реализуемость ориентированных утолщений

Проблема вложимости (т.е. реализуемости без самопересечений) графов или графов с дополнительной структурой в плоскость, в тор, в ленту Мебиуса (и в другие поверхности) — одна из основных в топологической теории графов [МТ01]. Одна из красивых форм решения этой проблемы — найти несколько таких подграфов, что произвольный граф G вложим в данную поверхность тогда и только тогда, когда G не содержит ни одного из таких подграфов. Например, о критерии Куратовского планарности графов см. [Пр04], [Ск05], [СТ07].

Ясно, что любой нарисованный без самопересечений на плоскости граф ‘задает’ ориентированное утолщение (см. определение в начале §6.3 и пример (2)).

Ориентированное утолщение называется *планарным*, если его можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, чтобы для каждой вершины выходящих из

нее полуребер по часовой стрелке совпадал бы с указанным ориентированным циклическим порядком. Или, эквивалентно, если объединение N дисков и ленточек можно нарисовать без самопересечений на плоскости.

Ясно, что любой граф имеет конечное число ориентированных утолщений. Поэтому вопрос о вложимости графов в плоскость сводится к вопросу о вложимости ориентированных утолщений в плоскость. То же справедливо для вложимости графов в сферу с ручками и в диск с лентами Мебиуса (или в сферу с пленками Мебиуса).

6.13. Какие из ориентированных утолщений графа K_4 (рис. 51) планарны?

Если L — подграф графа G , то любое утолщение N графа G содержит утолщение графа L , называемое *подутолщением* утолщения N .

6.14. *Теорема планарности ориентированных утолщений.* Каждое из следующих условий на ориентированное утолщение (N, G) связного графа равносильно его планарности.

(E) $V - E + F = 2$, где V и E — количества вершин и ребер графа, а F — число краевых окружностей в N .

(S) (N, G) не содержит ориентированных подутолщений, гомеоморфных изображенным на рис. 53.

(I) для любого максимального дерева T в G в циклической последовательности ребер вне T из задачи 6.12.b никакие два ребра не чередуются.

Ориентированное утолщение называется *реализуемым на сфере с g ручками*, если его можно нарисовать без самопересечений на сфере с g ручками так, чтобы для каждой вершины обход выходящих из нее полуребер по часовой стрелке совпадал бы с указанным ориентированным циклическим порядком.

6.15. *Теорема реализуемости ориентированных утолщений.* Каждое из следующих условий на ориентированное утолщение (N, G) связного графа равносильно его реализуемости на сфере с g ручками.

(E) $V - E + F \geq 2 - 2g$, где V и E — количества вершин и ребер графа, а F — число краевых окружностей в N .

(I) для любого максимального дерева в G число b из задачи 6.12.b не превосходит $2g$.

6.16. Теорема. Для каждого g существует алгоритм распознавания реализуемости утолщений на сфере с g ручками.

Остаток этого пункта посвящен гипотезам об аналоге критерия (S) для реализуемости на торе.

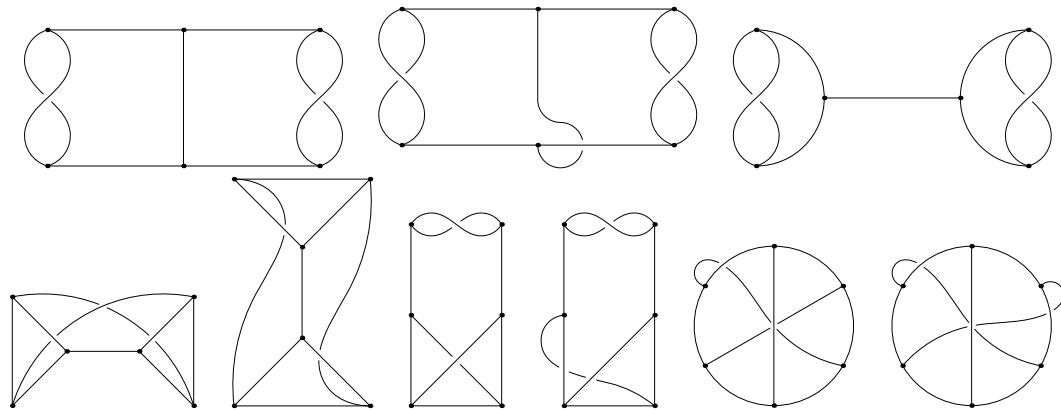


Рис. 56: Утолщения, не вложимые в тор

6.17. Пусть (N, G) — ориентированное утолщение связного графа G степени 3 (т.е. из каждой вершины которого выходит 3 ребра), не реализуемое на торе, любое связное подутолщение которого реализуемо на торе.

- (a) В G нет петель.
- (b) В N одна краевая окружность.
- (c) В G 6 вершин и 9 ребер.
- (d)* Любой связный граф степени 3 с условиями (a) и (c) изоморфен одному из графов на рис. 56 (даже одному из 1-го, 3-го, 4-го, 6-го и 8-го) или на рис. 57.
- (e)* *Гипотеза.* Пусть из каждой вершины связного графа выходит 3 ребра. Ориентированное утолщение этого графа реализуемо на торе тогда и только тогда, когда оно не содержит подутолщений, изображенных на рис. 56.

Рис. 57: Шестой граф

6.18. Пусть (N, G) — ориентированное утолщение связного графа G степени 4, не реализуемое на торе, любое подутолщение которого реализуемо на торе.

- (a) В G нет петель.
- (b) В N одна краевая окружность.
- (c) Сколько в G вершин и ребер?
- (d)* Опишите ориентированные утолщения графов степени 4, реализуемые на торе, в терминах запрещенных подутолщений.
- (e)* Опишите X-графы, реализуемые на торе. См. определение X-графа в [Sk10]. Ср. [Fr], [FM].

6.5 Реализуемость утолщений

Утолщением называется граф вместе с расстановкой нулей и единиц на его ребрах и, для каждой вершины графа, ориентированным циклическим порядком выходящих из нее полуребер.

Двумерное ‘определение’ утолщения аналогично вышеприведенному для ориентированных утолщений, только стрелки на окружностях должны быть противонаправлены, если на ребре стоит 0, и сонаправлены, если на ребре стоит 1. (При этом каждый из двух способов на рис. 52 может отвечать как ленточке с нулем, так и ленточке с единицей.)

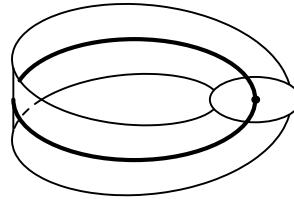


Рис. 58: Лист Мебиуса с его средней линией — утолщение окружности

Например, см. рис. 58. Из примеров (2) и (3) ориентированных утолщений получаются примеры утолщений, если заменить сферу с ручками на объединение листов Мебиуса, любые два из которых пересекаются по отрезку их края, и любые три из которых не пересекаются.

(Заметим, что иероглифы не являются частными случаями утолщений, ибо для иероглифов два полуребра одной петли равноправны.)

6.19. Сформулируйте и докажите аналоги задач 6.9– 6.12.b для утолщений.

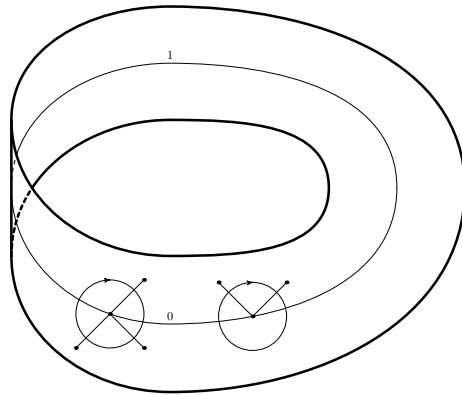


Рис. 59: Расстановка чисел на ребрах

Определение утолщения приведено в конце §6.3. Утолщение называется *реализуемым на сфере с g ручками*, если его можно изобразить без самопересечений на диске с сфере с g ручками и окружить каждую вершину маленькой ориентированной окружностью так, чтобы

- для каждой вершины обход выходящих из нее полуребер вдоль ориентированной окружности давал бы заданный ориентированный циклический порядок.
- на ребре стоит 0 тогда и только когда, когда ориентации окружностей, построенных вокруг концов этого ребра, *согласованы вдоль этого ребра* (рис. 59).

Определение реализуемости утолщения на диске с t лентами Мебиуса аналогично. (В реализации вершины не должны лежать на краю.)

6.20. Сформулируйте и докажите аналог теоремы планарности для утолщений.

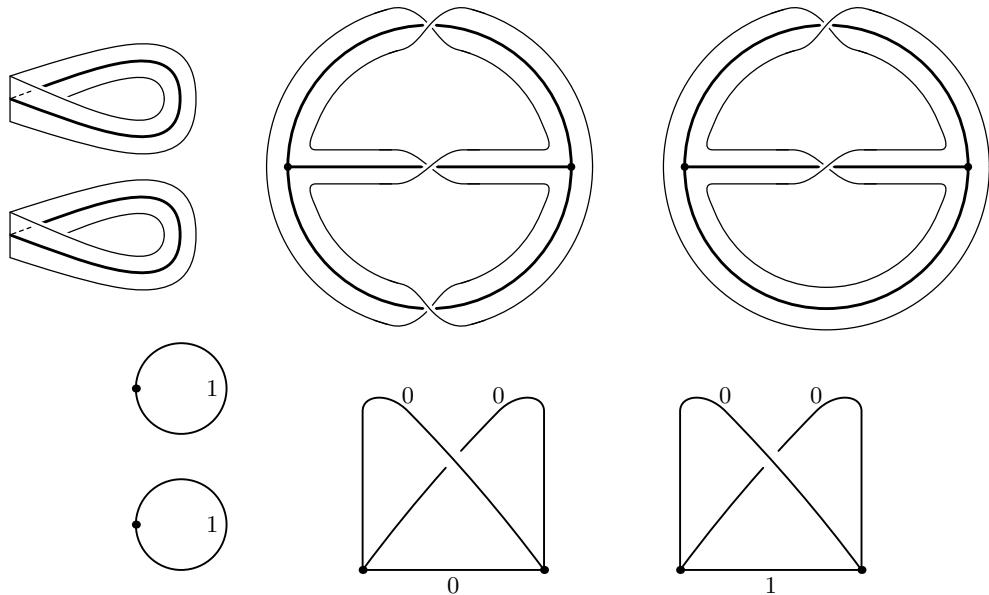


Рис. 60: Утолщения, не реализуемые на листе Мебиуса (добавить!!!)

- 6.21.** (a) Утолщения на рис. 60 не реализуемы на листе Мебиуса.
- (b) Если при удалении некоторого ребра из графа получается дерево, то любое утолщение этого графа реализуемо на листе Мебиуса.
- (c) Какие утолщения графа K_4 реализуемы на листе Мебиуса?
- (E,I) Сформулируйте и докажите аналоги критериев (E,I) для реализуемости утолщения на диске с t листами Мебиуса.

Остаток этого пункта посвящен аналогам критерия (S) для реализуемости.

Инвертированием в вершине для утолщения графа называется замена ориентации цикла полуребер, выходящих из этой вершины, одновременно с заменой нулей единицами, а единиц нулями на всех ребрах, выходящих из этой вершины (при этом числа на петлях не меняются).

Два наброска называются *эквивалентными*, если от одного можно перейти к другому несколькими инвертированиями (возможно, в разных вершинах).

(Заметим, что иероглиф можно рассматривать как класс эквивалентности утолщений.)

6.22. * (а) (Гипотеза) Утолщение реализуемо на листе Мебиуса тогда и только тогда, когда оно не содержит подутолщений, эквивалентных изображенным на рис. 60 [Pe].

(б) (Гипотеза) Утолщение графа степени 3 реализуемо на бутылке Клейна тогда и только тогда, когда оно не содержит подутолщений, эквивалентных изображенным на рисунке (нарисуйте рисунок самостоятельно!).

(с) (Нерешенная задача) Какие утолщения графов степени 3 реализуемы на торе?

(д) *Графом с неориентированными вращениями* называется граф, для каждой вершины которого указан неориентированный циклический порядок выходящих из нее полуребер. Сформулируйте и докажите аналоги вышеизложенных теорем и задач для графов с неориентированными вращениями. Начните с графов степени 4.

6.6 Ориентируемость и классификация утолщений

Определение эквивалентности дано в конце предыдущего пункта.

Утолщение называется *ориентируемым*, если оно эквивалентно утолщению, имеющему только нули на ребрах.

Теорема ориентируемости утолщений. *Следующие условия на утолщение (N, G) равносильны его ориентируемости:*

(M) (N, G) не содержит листа Мебиуса (т.е. подутолщения, гомеоморфного изображенному на рис. 58).

(E) В каждом несамопересекающемся цикле в графе G четное количество ребер с единицами.

(W) Первый класс Штифеля-Уитни $w_1(N, G) \in H^1(G)$ нулевой.

Критерий (W) не интересен сам по себе. Однако конструкции из его доказательства интересны как иллюстрация теории препятствий и необходимы для классификации утолщений (см. ниже).

Доказательство критерииев (M) и (E). Ясно, что (M) эквивалентно (E), и что условие (E) необходимо для ориентируемости. Докажем его достаточность.

Рассмотрим остов T графа G . Существует утолщение, эквивалентное данному, для которого на ребрах остова T стоят нули. Возьмем несамопересекающийся цикл, образованный произвольным ребром e вне остова и некоторыми ребрами остова. В этом цикле четное количество ребер с единицами, ибо это свойство не меняется при инвертировании. Поэтому в данном утолщении на ребре e стоит ноль. Значит, данное утолщение ориентируемо. QED

Определение группы $H^1(G)$, класса $w_1(N, G)$ и доказательство критерия (W). Обозначим данное утолщение через o . Назовем соответствующую расстановку нулей и единиц на ребрах графа G препятствующей и обозначим ее $\omega(o)$. Если $\omega(o) = 0$, то утолщение ориентируемо.

Если $\omega(o) \neq 0$, то еще не все потеряно: можно попытаться сделать инвертирования так, чтобы препятствующая расстановка стала нулевой. Выясним, как $\omega(o)$ меняется

при инвертированиях. Для этого заметим, что расстановки можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*). При инвертировании к $\omega(o)$ прибавляется расстановка единиц на ребрах, выходящих из a , и нулей на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется *элементарной кограницей вершины* a и обозначается δa . Ясно, что если утолщения o и o' получаются друг из друга инвертированиями в вершинах a_1, \dots, a_k , то

$$\omega(o) - \omega(o') = \delta a_1 + \dots + \delta a_k.$$

Назовем *кограницей* сумму элементарных кограниц нескольких вершин. Назовем расстановки ω_1 и ω_2 *когомологичными*, если $\omega_1 - \omega_2$ есть кограница $\delta a_1 + \dots + \delta a_k$. Ясно, что

- (i) При инвертировании препятствующая расстановка утолщения заменяется на когомологичную расстановку.
- (ii) Если препятствующая расстановка утолщения является кограницей, то существует эквивалентное утолщение с нулевой препятствующей расстановкой.
- (iii) Когомологичность является отношением эквивалентности на множество всех расстановок нулей и единиц на ребрах.

Одномерной группой когомологии графа G (с коэффициентами в \mathbb{Z}_2) называется группа $H^1(G)$ расстановок с точностью до когомологичности.

Первым классом Штифеля-Уитни утолщения называется класс когомологичности препятствующей расстановки этого утолщения:

$$w_1(N, G) = [\omega(o)] \in H^1(G).$$

Это определение корректно ввиду утверждения (i).

Ясно, что $w_1(N, G)$ является препятствием к ориентируемости утолщения. Обратно, пусть $w_1(N, G) = 0$. Значит, препятствующая расстановка данного утолщения является кограницей. Тогда по (ii) утолщение ориентируемо. QED

6.23. Определение группы $H_1(G)$ приведено, например, в [Sk], параграф ‘гомологии двумерных многообразий’.

(a) Формула $w_1^*(N, G)[g] = \omega(o) \cdot g$ корректно задает линейную функцию $w_1^*(N, G) : H_1(G) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

(Т.е. первый класс Штифеля-Уитни определяет отображение из множества утолщений в множество линейных функций $H_1(G) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.)

(b) $w_1(N, G) = 0$ тогда и только тогда, когда функция $w_1^*(N, G)$ нулевая.

(c) Отображение $\varphi : H^1(G) \rightarrow (H_1(G))^*$, заданное формулой $\varphi[\nu](h) = \nu \cdot h$ корректно определено, является изоморфизмом и переводит $w_1(N, G)$ в $w_1^*(N, G)$ для любого утолщения (N, G) .

Приведем в виде цикла задач *классификацию утолщений*. Их можно решать и не прочитав предыдущий материал об ориентируемости: определение группы $H^1(G)$ и инварианта $w_1(N, G)$ сами собой возникнут в процессе классификации. В оставшихся задачах этого пункта считается, что вершины и ребра графа *занумерованы*.

Два ориентированных утолщения одного связного графа *эквивалентны*, если одно получается из другого обращением ориентации циклических порядков во всех вершинах.

6.24. (a) Эквивалентные ориентируемые утолщения одновременно планарны или нет.

(b) Эквивалентные утолщения одновременно реализуемы на листе Мебиуса или нет. (См. определения планарности и реализуемости на листе Мебиуса в предыдущем пункте.)

6.25. Гомеоморфные графы имеют одинаковое количество классов эквивалентности ориентируемых утолщений (утолщений).

6.26. Сколько классов эквивалентности ориентированных утолщений (утолщений)
(a) окружности, (b) триода, (c) креста, (d) n -ода, (e) восьмерки, (f) буквы Θ ?

6.27. (a) Число классов эквивалентности ориентированных утолщений (утолщений) связного графа, имеющего только вершины степени 3 и имеющего V вершин и E ребер, равно 2^{V-1} (2^E).

(b) *Классификация утолщений графа.* Пусть G — связный граф, не гомеоморфный точке, окружности или отрезку. Если в G имеется V вершин степеней k_1, \dots, k_V и $E = \frac{1}{2}(k_1 + \dots + k_V)$ ребер, то количества классов эквивалентности ориентируемых утолщений и утолщений этого графа равны соответственно

$$\frac{1}{2}(k_1 - 1)! \dots (k_V - 1)! \quad \text{и} \quad 2^{E-V}(k_1 - 1)! \dots (k_V - 1)!.$$

6.28. Классификации трехмерных утолщений графа. Пусть G — связный граф с V вершинами и E ребрами. Трехмерным утолщением (3-утолщением) графа G называется расстановка нулей и единиц на его ребрах.

Приведем ‘трехмерное определение’ 3-утолщения. Рассмотрим несвязное объединение V трехмерных шаров. На граничной сфере каждого такого шара введем ориентацию. На каждой такой граничной сфере отметим непересекающиеся двумерные диски, отвечающие выходящим из соответствующей вершины ребрам. Для каждого ребра графа соединим (не обязательно в трехмерном пространстве) соответствующие ему два диска трехмерной трубкой $D^2 \times I$. Пусть M — объединение построенных шаров и трубок. Пара (M, G) , состоящая из M и графа G , естественно вложенного в M , называется *трехмерным утолщением* (3-утолщением) графа G . Трубка из определения 3-утолщения называется *перекрученной*, если ориентации на двух ее противоположных основаниях, лежащих в шарах, совпадают. Трубка называется *неперекрученной*, если эти ориентации противоположны.

Два 3-утолщения графа G *эквивалентны*, если одно получается из другого инвертированиями. (Или, на трехмерном языке, если можно изменить ориентации на их сферах так, чтобы трубы в двух утолщениях, соответствующие одному и тому же ребру графа G , были бы одновременно перекручены или нет.)

Множество 3-утолщений графа G с точностью до эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с $H^1(G) \cong \mathbb{Z}_2^{E-V+1}$.

Указания и решения к некоторым задачам

6.2. Осталось доказать часть ‘тогда’. Реализуем звезду с $2n$ лучами (и их заданным циклическим порядком) вне внутренности некоторого выпуклого многоугольника так, чтобы концы лучей изображались бы вершинами многоугольника. Тогда оставшиеся отрезки можно реализовать прямолинейно внутри многоугольника.

6.3. (b) Пусть из тора вырезана фигура K , являющаяся сферой с ручками и одной дыркой. Если краевая окружность фигуры *не разбивает* тор, то у K две граничные окружности — противоречие. Если краевая окружность *разбивает* тор, то при ее за克莱йке в K диском получается тор или сфера. Противоречие с приведенным фактом.

(cdef) Достаточно придумать граф, не реализуемый на торе, но реализуемый на утолщении каждого из этих иероглифов (можно ли взять K_8 ?).

Другое решение вытекает из (b).

6.4. Доказательство разумно проводить по схеме $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

6.5. (b) $(a_1 b_1 a_1 b_1 \dots a_{g+1} b_{g+1} a_{g+1} b_{g+1})$.

6.9. (a) Ответ: $16 = 2^4$. Указание. Из каждой вершины графа выходит 3 ребра.

Тогда для каждой вершины имеется два различных ориентированных циклических порядка выходящих из нее полуребер. Поэтому имеется 2^4 различных ориентированных утолщений.

(b) Ответ: 3, см. рис. 51. Указание. Порядки выходящих полуребер можно менять в 0, 1, 2, 3, 4-х вершинах. Следовательно, таких ориентированных утолщений не более 5.

6.11.d. Диску с 3 дырками или тору с 2 дырками.

6.19. Аналог 6.9.а. Ответ: $1024 = 2^{10}$.

Аналог 6.11.d. Диску с 3 дырками, тору с 2 дырками, листу Мебиуса с 2 дырками или бутылке Клейна с дыркой.

Аналог 6.12.a. **Формула Эйлера.** Утолщение связного графа V вершинами и E ребрами, имеющее F краевых окружностей и цикл с нечетной суммой чисел на его ребрах, гомеоморфно диску с сфере с $2 - V + E - F$ листами Мебиуса и F дырками.

Аналог 6.12.b. Для каждого ребра i вне максимального дерева рассмотрим несамопересекающийся путь в максимальном дереве, соединяющий концы этого ребра. Поставим в диагональной клетке $i \times i$ матрицы сумму по модулю 2 чисел на ребрах этого пути и на ребре i . Поставим числа в остальные клетки матрицы, как раньше. Обозначим через b ранг над \mathbb{Z}_2 полученной матрицы. Тогда если на диагонали есть хотя бы одна единица, то данное утолщение гомеоморфно диску с b листами Мебиуса и некоторым количеством дырок.

6.14. *Набросок доказательства критерия (S).* Необходимость доказывается с использованием теоремы Жордана.

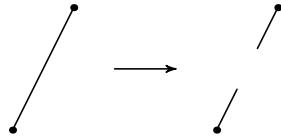


Рис. 61: Вырезание средней трети

Докажем достаточность. Выделим в (N, G) ориентированное подутолщение максимального дерева T . Покрасим оставшиеся ребра в красный цвет. Из каждого красного ребра вырежем его 'среднюю треть', как на рис. 61. Останется ориентированное утолщение дерева T . Его можно изобразить (с учетом ориентированного циклического порядка) без самопересечений на плоскости вне (внутренности) многоугольника $A_1 \dots A_n$ так, чтобы вершины дерева были бы вершинами многоугольника. (Это доказывается по индукции с отбрасыванием висячей вершины.)

Пусть существуют вершины A, B, A_1, B_1 дерева T , лежащие на границе многоугольника в этом порядке, причем вершины A и A_1 лежат на одном красном ребре, а вершины B и B_1 — на другом. Соединим путями в дереве вершину A с A_1 и B с B_1 . Если эти пути пересекаются ровно в одной точке, то (N, G) содержит 'восьмерку' с рис. 53. Если эти пути пересекаются ровно по одному отрезку, то (N, G) содержит 'тету' с рис. 53. Остальные случаи сводятся к рассмотренным. Итак, (N, G) содержит ориентированное подутолщение, гомеоморфное одному из изображенных на рис. 53.

Поэтому если вершины A, A_1 лежат на одном красном ребре, а B, B_1 — на другом, то вершины A, A_1, B, B_1 лежат на границе многоугольника в этом циклическом порядке (или в противоположном). Значит, их можно соединить внутри многоугольника непересекающимися отрезками. Следовательно, (N, G) планарно. QED

6.23. (а) Для любого (гомологического) цикла g сумма $\omega(o) \cdot g$ значений $\omega(o)$ по всем ребрам подграфа g не зависит от наброска ω .

6.25. Два ориентированных утолщения гомеоморфных графов *гомеоморфны*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций одновременного подразделения ребра графа и соответствующей ленточки утолщения, или обратных к ним. Гомеоморфность утолщений гомеоморфных графов определяется аналогично случаю ориентируемых утолщений.

7 Трехмерные утолщения двумерных комплексов

7.1 Утолщаемость 2-комплексов до 3-многообразий

Понятия утолщаемости и утолщения, которые мы определим и изучим в этом параграфе, полезны, в частности, для характеристизации

- 2-комплексов, вложимых в \mathbb{R}^3 , путем изучения ‘минимальных’ 3-многообразий, содержащих данный 2-комплекс и распознавания вложимости в \mathbb{R}^3 таких 3-многообразий;
- фундаментальных групп 3-многообразий путем изучения вложимости в 3-многообразия стандартных 2-полиэдров, отвечающих копредставлениям групп,
- гомеоморфности 3-многообразий путем изучения эквивалентности лежащих в них 2-комплексов.

См. задачи о (не)реализуемости 2-комплексов в \mathbb{R}^3 в §1 и §4.

Основная идея этого параграфа — показать, как алгебраические идеи возникают и работают при решении топологических задач. Поэтому изложение ведется на наглядном уровне, без формализации на языке 2-комплексов и 3-многообразий.

Трехмерная лента Мебиуса получается из трехмерного цилиндра

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

склейкой точек $(x, y, 0)$ и $(x, -y, 1)$ для всех x, y . Эта склейка осуществляется не в трехмерном пространстве, а в четырехмерном пространстве или абстрактно.

- 7.1. (a) Вложим ли полный комплекс с 6 вершинами в трехмерную ленту Мебиуса?
(b) Какие из склеек задач 4.1-4.4 можно осуществить в трехмерной ленте Мебиуса?

Возьмем трехмерный шар. Отметим на его краевой (=границной) сфере попарно непересекающиеся двумерные диски, разбитые на пары. Каждую пару $D^2 \times \{0, 1\}$ дисков соединим (не обязательно в трехмерном пространстве) трехмерной трубкой $D^2 \times [0, 1]$ (так, чтобы разные трубы не пересекались). Объединение шара и построенных трубок называется *шаром с трубками*.

Заметим, что каждую пару дисков можно соединить трубкой двумя способами. При первом способе ориентация краевой сферы при проносе вдоль трубы совмещается с противоположной ориентацией; такая трубка называется *неперекрученной*. При первом способе эта ориентация совмещается с собой; такая трубка называется *перекрученной*.

Аналогично определяется объединение шаров и трубок, в котором трубы могут соединять диски на разных шарах. Если это объединение связно, то оно гомеоморфно шару с трубками. Поэтому будем называть шаром с трубками также связное объединение шаров и трубок.

Шару с трубками гомеоморфны

- часть пространства \mathbb{R}^3 , ограниченная стандартной сферой с ручками;
- некоторая окрестность любого графа, кусочно-линейно вложенного в \mathbb{R}^3 ;
- трехмерная лента Мебиуса;
- некоторая окрестность любого графа, вложенного в трехмерную ленту Мебиуса;
- некоторая окрестность любого графа, вложенного в шар с трубками.

7.2. Любой ли шар с трубками можно вырезать из трехмерной ленты Мебиуса?

Краем шара с трубками является сфера с перекрученными ручками. Отметим на ней попарно непересекающиеся кольца. К каждому кольцу $S^1 \times [0, 1]$ приклеим (не обязательно в трехмерном пространстве) трехмерную пробку $D^2 \times [0, 1]$ (так, чтобы разные пробки не пересекались). Объединение шара с трубками и построенных пробок называется *шаром с трубками и пробками*.

- 7.3.** Вложим(а)(о) ли в некоторый шар с неперекрученными трубками и пробками
- проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$?
 - любое 2-многообразие?
 - 2-комплекс, получающийся из двумерного правильного многоугольника склейкой всех сторон с одним направлением?

Если следующие задачи 7.4-7.6 не получаются, возвращайтесь к ним позже.

- 7.4.** Вложимо ли в некоторый шар с трубками и пробками объединение

- ленты Мебиуса и диска, при котором краевая окружность диска отождествляется со средней линией S ленты Мебиуса.
- ленты Мебиуса и тора с дыркой, при котором краевая окружность тора с дыркой отождествляется с S .
- ленты Мебиуса и ленты Мебиуса, при котором краевая окружность ленты Мебиуса отождествляется с S .
- проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ и кольца, при котором одна из краевых окружностей кольца отождествляется с $\mathbb{R}P^1$?

- 7.5.** (а) Объединение двух шаров с трубками по некоторым двум наборам из одинакового количества колец на их краях гомеоморфно шару с трубками.

- (б) То же для шаров с трубками и дырками.

2-комплекс называется *утолщаемым*, если он вложим в некоторый (не фиксированный заранее) шар с трубками и пробками. 2-комплекс называется *ориентируемо утолщаемым*, если он вложим в некоторый (не фиксированный заранее) шар с неперекрученными трубками и пробками.¹⁶

Теорема. Существуют алгоритмы проверки утолщаемости и ориентируемой утолщаемости произвольных конечных 2-комплексов (фольклор, см. доказательство в [Sk94]).

7.2 Ложные поверхности и их утолщаемость

2-комплекс (или соответствующий 2-полиэдр) называется *ложной поверхностью*, если каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфную одной из следующих: диску D^2 , книжке с тремя страницами $T \times I$ или конусу над полным графом K_4 с четырьмя вершинами, см. рис. 62. Такие точки мы будем называть *точками типа 1, 2 и 3*, соответственно. *Краевой точкой* ложной поверхности называется такая точка, после вырезания некоторой открытой окрестности которой получается ложная поверхность, гомеоморфная исходной.

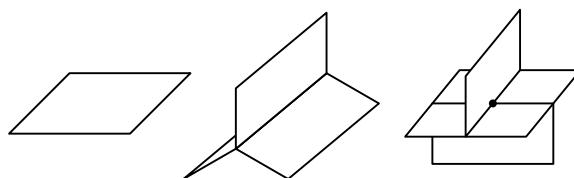


Рис. 62: Простейшие особенности

Мыльные пленки в \mathbb{R}^3 имеют сингулярности в точности типов 2 и 3. Понятие мыльных пленок из дифференциальной геометрии является также важным средством и объектом исследований в алгебраической и геометрической топологии. Например:

¹⁶Вот определения на общепринятом языке. 2-комплекс называется (*ориентируемо*) *утолщаемым*, если он гомеоморфен подкомплексу некоторой триангуляции некоторого (ориентируемого) 3-многообразия. Это 3-многообразие не предполагается фиксированным заранее. (Это определение *кусочно-линейной* утолщаемости, для 3-многообразий равносильное *топологической* [Bi83].)

- любое трехмерное многообразие является утолщением некоторой ложной поверхности [HMS93, I, Theorem 3.1.b].
- для любого 2-полиэдра P существует сюръективное отображение $f : Q \rightarrow P$ ложной поверхности Q ('резольвента'), прообразы точек при котором являются шарами размерности 1, 2 или 3 (и, в частности, стягиваются) [?].

Примерами ложных поверхностей являются

- объединение тора с двумя дисками, приклеенными к параллели и меридиану тора,
- дом Бинга с двумя комнатами [HMS93].
- объединение N ленты Мебиуса и кольца, для которого средняя линия ленты Мебиуса склеивается с одной из краевых окружностей кольца. Или, эквивалентно, 2-комплекс, полученный из книжки с 3 листами (12)(3)-склейкой.

Шутовской колпак Зимана (§??) не является ложной поверхностью.

Обозначим через Q' настоящий 1-остов ложной поверхности Q , т. е. множество точек типа 2 или 3. Ясно, что Q' является графом, вершины которого имеют степени 1, 2 или 4. Обозначим через Q'' множество точек из Q типа 3.

7.6. (a) Теорема ориентируемой утолщаемости. *Ложная поверхность Q ориентируемо утолщаема тогда и только тогда, когда она не содержит N* [BP97], [BRS99].

(b) Существует неутолщаемая ложная поверхность, не содержащая никакого объединения ленты Мебиуса и 2-многообразия ровно с одной краевой граничной окружностью, отождествленной со средней линией ленты Мебиуса [BRS99].

(c) *Гипотеза.* Пусть Q — ложная поверхность. Обозначим через \overline{Q} дополнение в Q до открытой регулярной окрестности графа Q' в Q (т.е. объединение симплексов второго барицентрического подразбиения 2-комплекса Q , не пересекающих Q'). Тогда \overline{Q} — 2-многообразие (локально евклидов 2-комплекс). Назовем краевую окружность $S \subset \partial Q$ *опасной*, если существует подкомплекс $X \subset Q$, для которого пара (X, S) гомеоморфна паре из N и той краевой окружности кольца в N , которая не склеивается со средней линией ленты Мебиуса. Ложная поверхность Q утолщаема тогда и только тогда, когда в каждой компоненте связности 2-многообразия \overline{Q} либо четное число опасных окружностей, либо имеется краевая точка ложной поверхности Q .

7.3 Доказательство теоремы ориентируемой утолщаемости

Необходимость следует из неутолщаемости комплекса N . Докажем достаточность.

Возьмем по точке на каждой компоненте связности графа Q' , которая является циклом. Обозначим через V объединение взятых точек с Q'' . Так как линк каждой точки из V — планарный граф, то существует несвязное объединение M_0 трехмерных шаров, содержащее окрестность множества V (в Q).

Для каждой дуги из $Q' - M_0$ возьмем трехмерную трубку $D^2 \times [0, 1]$, в которую окрестность (в Q) этой дуги вложена стандартным образом. Эта окрестность 'высекает' на торцах $D^2 \times \{0, 1\}$ трубки триоды. При克莱им эту трубку по торцам к соответствующим шарам из M_0 так, чтобы триоды на торцах трубки совместились с соответствующими триодами на шарах из M_0 . Получим шар с трубками M_1 , содержащий окрестность (в Q) графа Q' .

Рассмотрим произвольные 2-комплекс K и его вершину A . Назовем *звездой вершины A в комплексе K* 2-комплекс $\text{st}_K A = \cup\{\sigma \in K \mid A \in \sigma\}$. Построим новый граф $\text{lk}_K A$ — линк вершины A в комплексе K . Его вершины соответствуют ребрам 2-комплекса K , выходящим из вершины A . Две вершины соединены ребром, если соответствующие ребра лежат в одной грани. Или, формально,

$$\text{lk } A = \text{lk}_K A := \cup\{\sigma \in K \mid A \notin \sigma \subset \alpha \exists x \text{ для некоторого симплекса } \alpha\}.$$

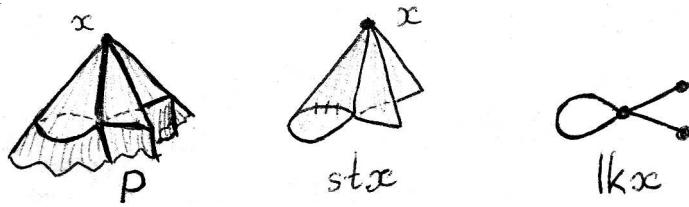


Рис. 63: Построение звезды и линка

Например, линки точек на рис. 62 гомеоморфны пути, окружности, триоду, букве θ и графу K_4 . Ясно, что $\text{lk}_K A = \cup \{ \sigma \in K \mid \sigma \subset \text{st}_K A \text{ и } A \notin \sigma \}$, т.е., звезда вершины является конусом над ее линком.

7.7. (a) Найдите линки вершин для 2-комплексов на рис. 34.

(b) Для любого графа найдется 2-комплекс и его вершина, линк которой является заданным графом.

(c) Линк каждой вершины 2-комплекса $K_5 \times S^1$ изоморден $K_{4,2}$.

Выведем из того, что Q не содержит N , неперекрученность каждой трубки. Обозначим через T триод. Для любой вершины $A \in Q''$ и для любых вершин $B, C \in \text{lk } A$ степени больше 2 существуют три пути в $\text{lk } A$, соединяющих B с C и пересекающихся только в B, C . Поэтому для любой окружности $J \subset Q'$ существует подкомплекс $\widehat{J} \subset Q$, получающийся из книжки с 3 листами σ -склейкой для некоторой $\sigma \in S_3$, причем окружность J получается этой склейкой из ‘корешка’ книжки. Перестановка σ является либо тождественной, либо циклом длины 3, либо циклом длины 2 (транспозицией). Так как Q не содержит N , то циклом длины 2 она быть не может. Поэтому каждая трубка не перекручена.

Замыкание $\text{Cl}(Q - M_1)$ есть 2-многообразие. Край $\partial \text{Cl}(Q - M_1)$ является несвязным объединением окружностей. Поэтому аналогично задаче 7.3.b существует шар с неперекрученными трубками и пробками Y , содержащий $\text{Cl}(Q - M_1)$, причем $\partial \text{Cl}(Q - M_1) \subset \partial Y$. Так как каждая трубка в M_1 не перекручена, то ∂M_1 ориентируемо. Поэтому существуют окрестности \widehat{M}_1 и \widehat{Y} края $\partial \text{Cl}(Q - M_1)$ в ∂M_1 и в Y , являющиеся несвязным объединением колец (без лент Мебиуса). Тогда $M := M_1 \bigcup_{\widehat{M}_1 = \widehat{Y}} Y$ есть шар с неперекрученными трубками и пробками, содержащий Q (по задаче 7.5.b). QED

7.8. Для ложной поверхности Q определите группу $H^1(Q')$ и инвариант Матвеева $m(Q) \in H^1(Q')$ так, чтобы Q была ориентируемо утолщаема тогда и только тогда, когда $m(Q) = 0$ [BRS99], [La00]. (Указание: аналогично следующему размышлению.)

7.4 Размышления об утолщаемости ложных поверхностей

Пусть Q — ложная поверхность. Как и в предыдущем доказательстве, определим V и возьмем несвязное объединение M_0 трехмерных шаров, содержащее окрестность (в Q) множества V .

Пересечение $Q \cap \partial M_0$ является несвязным объединением (по всем вершинам триангуляции) графов, каждый из которых есть либо K_4 (граф с четырьмя вершинами, любые две из которых соединены ребром), либо $K_{3,2}$ (граф буквы θ), либо S^1 (окружность). Поскольку существует ровно одно (с точностью до гомеоморфизма сферы S^2) вложение каждого из этих трех графов в S_2 , то M_0 единствено с точностью до гомеоморфизма, неподвижного на $Q \cap M_0$.

Построим утолщение окрестности 1-остова $Q^{(1)}$ аналогично предыдущему доказательству следующим образом. Для каждой дуги (‘ребра’) из $Q^{(1)} - M_0$ возьмем ее окрест-

ность в $Q - M_0$, гомеоморфную книжке с одной, двумя или тремя листами (сама дуга соответствует ‘корешку’ книжки). Возьмем трехмерную трубку $D^2 \times [0, 1]$, в которую эта окрестность вложена стандартным образом. Эта окрестность ‘высекает’ на торцах $D^2 \times \{0, 1\}$ трубки либо триод, либо отрезок. При克莱им каждую такую трубку по ее торцам к соответствующим шарам из M_0 так, чтобы триоды или отрезки на торцах трубки совместились с соответствующими триодами или отрезками на шарах. Получим шар с трубками M_1 , содержащий окрестность 1-остова $Q^{(1)}$.

Если ребро из $Q^{(1)} - M_0$ лежит в Q' , то на торцах трубки высекаются триоды. Значит, эта трубка приклеивается к M_0 однозначно. Поэтому ‘утолщение’ M'_1 окрестности графа Q' единственno с точностью до гомеоморфизма, неподвижного на $Q \cap M'_1$.

Выясним, продолжается ли ‘утолщение’ M_1 до ‘утолщения’ всего Q . Фиксируем набор ориентаций на несвязном объединении ∂M_0 сфер. На каждом ребре комплекса Q поставим 0, если ориентации торцов соответствующей трубки, определенные из ∂M_0 , не согласованы вдоль трубки. Поставим 1 в противном случае. Эту расстановку назовем *различающей* и обозначим $\omega(M_1)$. На каждой грани поставим сумму по модулю 2 чисел на ограничивающих ее ребрах. Полученную расстановку назовем *препятствующей* и обозначим $\delta\omega(M_1)$. Ясно, что $\delta\omega(M_1)$ не зависит от набора ориентаций на ∂M_0 (хотя $\omega(M_1)$ зависит).

Если существует ‘продолжение утолщения’ M_1 до утолщения всего Q , то у каждой грани существует малая окрестность (в Q), пересекающаяся с ∂M_1 по кольцу (а не по листу Мебиуса). Тогда $\delta\omega(M_1)$ равна нулю на этой грани. Следовательно, если $\delta\omega(M_1) \neq 0$, то M_1 не ‘продолжается до утолщения’ всего 2-комплекса Q .

Однако, если $\delta\omega(M_1) \neq 0$, то еще не все потеряно: можно попытаться изменить M_1 так, чтобы препятствующая расстановка $\delta\omega(M_1)$ стала нулевой. Выясним, какие бывают различающие расстановки $\omega(M_1)$ для различных M_1 . Утолщение графа Q' единственno. Значит, расстановка $\omega(M_1)$ на ребрах из Q' не зависит от M_1 . Трубки, соответствующие ребрам *вне* Q' могут быть приклеены к M_0 двумя способами. При этих способах на ребре будет поставлено 0 или 1. Таким образом, мы можем так подобрать M_1 , что расстановка $\omega(M_1)$ на ребрах вне Q' будет любой наперед заданной.

Изменение ‘утолщения’ M_1 на одном ребре e из $Q^{(1)}$, не лежащем в Q' , дает изменение расстановки $\delta\omega(M_1)$ на (двух или одной) гранях, примыкающих к e . Иными словами, к $\delta\omega(M_1)$ прибавляется *кограница* de ребра e , т.е. расстановка, равная 1 на гранях, примыкающих к e , и 0 на остальных гранях.

Назовем *группой двумерных когомологий комплекса Q по модулю подкомплекса Q'* группу $H^2(Q, Q')$ расстановок нулей и единиц на гранях комплекса Q с точностью до сумм кограниц ребер. Назовем *препятствием Матвеева*

$$\delta m(Q) := [\delta\omega(M_1)] \in H^2(Q, Q').$$

Если $\delta m(Q) = 0$, то существует такое утолщение M_1 , что $\delta\omega(M_1) = 0$. Это утолщение M_1 можно продолжить до утолщения всего Q . Получаем следующий результат: *ложная поверхность Q утолщаема тогда и только тогда, когда $\delta m(Q) = 0 \in H^2(Q, Q')$* [Ma73].

Из этого можно попытаться вывести гипотезу 7.6.с.

7.5 Классификация трехмерных утолщений ложных поверхностей

Шар с трубками и пробками M содержит 2-полиэдр (2-комплекс) P , полученный из букета окружностей, отвечающих трубкам, прилейкой дисков, отвечающих пробкам.

При этом вершина букета содержится в шаре, дополнение букета до некоторой окрестности вершины — в объединении трубок, а дополнение объединения дисков до окрестности букета — в объединении пробок. (Ясно, что не любой 2-полиэдр, полученный из букета окружностей приклейкой дисков можно получить из шара с трубками и пробками.) Пара (M, P) называется *трехмерным утолщением* полиэдра (комплекса) P .¹⁷ Мы будем сокращенно называть трехмерное утолщение 3-утолщением. Утолщения рассматриваются с точностью до (кусочно-линейного) гомеоморфизма, тождественного на P . Если полиэдр P фиксирован, мы для краткости будем писать M вместо (M, P) .

7.9. (а) 2-утолщение (определите!) μ края ∂N продолжается (определите!) до 3-утолщения 2-многообразия N тогда и только тогда, когда $\delta w_1(\mu) = 0 \in H^2(N, \partial N)$. (Определения объектов $\delta w_1(\mu)$ и $H^2(N, \partial N)$ не обязательно знать заранее, их можно придумать в процессе решения.)

(б) Классифицируйте 3-утолщения данного 2-многообразия.

(с) Сформулируйте и докажите аналог пункта (а) для продолжаемости на N данного I -расслоения μ над краем ∂N .

(д) Продолжения I -расслоения μ с границы ∂N 2-многообразия N находятся в 1-1-соответствии с такими элементами $\nu \in H^1(N)$, что $\nu|_{\partial N} = w_1(\mu)$.

7.10. Ложная поверхность имеет не более одного ориентируемого 3-утолщения.

Обозначим через $T^3(P)$ множество всех 3-утолщений (M, P) заданного полиэдра P , с точностью до кусочно-линейного гомеоморфизма, тождественного на P . Классификация 3-утолщений обобщает знаменитую теорему Кэслера о единственности [HMS93]. Кроме того, что существует много общего между классификацией 3-утолщений 2-полиэдра и классификацией граф-многообразий [Wa67] и интегрируемых гамильтоновых систем [?]. Проблемы существования, единственности и классификации n -мерных утолщений заданного полиэдра изучались также в [LS69], [Wa67], [Wr77], [GT87, Теоремы 3.2.3 и 3.2.2].

Определение групп $H^1(Q)$, $H^1(Q, Q')$, отображения сужения $r : H^1(Q) \rightarrow H^1(Q')$ и инварианта Матвеева $m(Q) \in H^1(Q')$ естественно появляются при изучении 3-утолщаемости, см. выше.

7.11. (а) Для каждого 3-утолщения M ложной поверхности Q имеем $m(Q) = w_1(M)|_{Q'}$.

(б) **Теорема классификации утолщений.** [BRS99], ср. [HMS93, I, Theorem 3.1.b]

Для 3-утолщаемой ложной поверхности Q имеется биекция $w_1|_Q : T^3(Q) \rightarrow r^{-1}(m(Q))$, где $r : H^1(Q) \rightarrow H^1(Q')$ — отображение сужения. Если Q' связно, то имеется биекция $T^3(Q) \rightarrow H^1(Q, Q')$.

(с) Теорема классификации утолщений верна для любого такого 2-полиэдра P , что для каждой $A \in \bar{P}''$ граф $\text{lk } A$ 3-связен [BRS99]. Граф называется *3-связным*, если никакие две его точки не разбивают его на два графа с более, чем одним ребром в каждом [Pr04]. (Например, граф выпуклого многогранника в \mathbb{R}^3 является 3-связным [Pr04].)

7.6 3-утолщения произвольных 2-полиэдров

Приведем результаты о существовании и классификации 3-утолщений произвольных 2-полиэдров. Доказательства оставляем читателю в качестве задач.

Для некоторых частных случаев существуют простые критерии 3-утолщаемости [OS74]. Для общего случая не существует более простого критерия утолщаемости, чем следующий.

¹⁷Это определение равносильно обычному: пара (M, P) называется *n-утолщением* полиэдра P , если n -многообразие M является *регулярной окрестностью* [Sk] полиэдра $P \subset \text{Int } M$. Понятие утолщения аналогично понятию расслоения и тесно связано с ним [Sk, §13], [LS69].

Общая теорема утолщаемости. 2-полиэдр P 3-утолщаем (ориентируемо 3-утолщаем) тогда и только тогда, когда существует такое подчиненное вложение $\varepsilon \in E(P)$, что $\delta m(\varepsilon) = 0$ ($m(\varepsilon) = 0$) [BRS99], ср. [Sk94], [OS74, Theorem 3.2], [La00].

Дадим необходимые определения.

Настоящий 1-остов P' полиэдра P — граф (точнее, 1-полиэдр) в P , состоящий из точек, не имеющих окрестности, гомеоморфной замкнутому 2-диску. Настоящий 0-остов P'' полиэдра P — конечное множество точек в P , не имеющих окрестности, гомеоморфной книжке с некоторым числом страниц. Заметим, что P'' является настоящим 0-остовом графа P' (т.е. конечным множеством точек в P' , не имеющих окрестности, гомеоморфной отрезку). Для каждой компоненты графа P' , не содержащей точек из P'' (т.е. являющейся окружностью или отрезком), возьмем произвольную точку на ней. Обозначим через \bar{P}'' объединение P'' с этими точками.

Предположим, что $\bigcup_{A \in \bar{P}''} \text{lk } A$ вложимо в S^2 . Рассмотрим набор вложений $\{g_A : \text{lk } A \rightarrow S^2\}_{A \in \bar{P}''}$. Возьмем 'невисячее ребро' $d \subset P'$ (т.е. замыкание компоненты связности множества $P' - \bar{P}''$, являющейся открытой в P'). Обозначим через $A, B \in \bar{P}''$ его концы (возможно, $A = B$). Ребро d пересекает $\text{lk } A \cup \text{lk } B$ в двух точках (различных даже при $A = B$). Малые окрестности этих точек в $\text{lk } A$ и в $\text{lk } B$ являются n -одами, которые можно отождествить друг с другом 'вдоль ребра d '. Если для каждого такого d отображения g_A и g_B дают одинаковые или противоположные циклические порядки лучей n -ода, то набор $\{g_A\}$ называется *подчиненным*. (Это определение отличается от стандартного — то, что обычно называют *подчиненным*, мы называем *ориентированно подчиненным*.)

Наборы вложений $\{f_A, g_A : \text{lk } A \rightarrow S^2\}_{A \in \bar{P}''}$ называются *изопозиционными*, если существует такое семейство гомеоморфизмов $\{h_A : S^2 \rightarrow S^2\}_{A \in \bar{P}''}$, что $h_A \circ f_A = g_A$ для любой $A \in \bar{P}''$.

Ясно, что изопозиционные наборы одновременно являются подчиненными или нет. Обозначим через $E(P)$ множество подчиненных наборов с точностью до изопозиции.

Множество вложений данного графа в плоскость с точностью до изопозиции было описано Уитни для двусвязных графов, и существует простое обобщение этого описания на случай произвольных графов (фольклор, [Sk05]).

Препятствие Матвеева $m : E(P) \rightarrow H^1(P')$ строится следующим образом. Для данного $\varepsilon \in E(P)$ рассмотрим его представитель $\{g_A : \text{lk } A \rightarrow S^2\}_{A \in \bar{P}''}$. Для каждого 'невисячего ребра' d полиэдра P возьмем циклические порядки (одинаковые или противоположные) из определения подчиненности. Поставим 0 или 1 на d , если вращения противоположные или одинаковые, соответственно. Тогда $m(\varepsilon) \in H^1(P')$ — когомологический класс этой расстановки μ .

Класс $m(\varepsilon)$ корректно определен. Действительно, пусть два набора вложений изопозиционны посредством семейства гомеоморфизмов $\{h_A : S^2 \rightarrow S^2\}_{A \in \bar{P}''}$. Тогда расстановки μ отличаются на кограницу расстановки \varkappa , равной 1 или 0 на вершине A , если h_A обращает или сохраняет ориентацию сферы S^2 , соответственно.

Доказательство общей теоремы утолщаемости содержится в [Sk94], [BRS99] и аналогично вышеприведенным рассуждениям для ложных поверхностей.

Общая теорема классификации утолщений. [BRS99] Для 3-утолщаемого 2-полиэдра P имеется индекция

$$e \times w_1|_P : T^3(P) \rightarrow E(P) \times H^1(P) \quad \text{с образом} \quad \{(\varepsilon, \omega) \in E(P) \times H^1(P) \mid m(\varepsilon) = \omega|_{P'}\},$$

где $r : H^1(P) \rightarrow H^1(P')$ — отображение сужения.

Из этой теоремы вытекает наличие биекции

$$T^3(P) \rightarrow m^{-1}(\text{im } r) \times \ker r.$$

Для 3-утолщения M 2-полиэдра P определим

$$e(M) := [\{\mathrm{lk}_P A \rightarrow \mathrm{lk}_M A \cong S^2\}_{A \in \bar{P}''}] \in E(P).$$

Так как окрестность каждого ребра графа P' вложена в M , то указанный набор вложений действительно является подчиненным. Эквивалентное утолщение дает изопозиционные наборы вложений, поэтому $e(M)$ корректно определено. Равенство $m(e(M)) = w_1(M)|_{P'}$ доказывается аналогично задаче 7.11, только вместо $m(Q)$ надо рассмотреть $m(e(M))$.

Указания и решения к некоторым задачам

7.1. (b) σ -склейку можно осуществить для перестановок σ , сопряженных перестановкам из подгруппы диэдра.

7.11. (a) Возьмем расстановки μ и ω нулей и единиц на ребрах графа Q' , представляющие классы $m(Q)$ и $w_1(M)|_{Q'}$. Пусть простая замкнутая кривая в Q' состоит из ребер d_1, \dots, d_n . Тогда $\sum_{i=1}^n \mu(d_i) = \sum_{i=1}^n \omega(d_i)$, поскольку оба выражения равны единице в точности тогда, когда прохождение вдоль выбранной кривой обращает ориентацию на M . Ввиду произвольности выбора кривой получаем $m(Q) = w_1(M)|_{Q'}$. QED

8 Гомотопическая классификация отображений

Основная теорема топологии о гомотопической классификации отображений $S^n \rightarrow S^n$ доказана Хайнцем Хопфом в 1926 г. [Sk, §8 ‘Векторные поля на многомерных поверхностях’]. Она обобщена на отображения n -полиэдра в S^n Хайнцем Хопфом в 1932 г. (‘по заказу’ Павла Сергеевича Александрова). Приводимые в §8.5 формулировка и доказательство теоремы Хопфа принадлежит Хасслеру Уитни (1937 г.). Дальнейшее развитие теоремы Хопфа-Уитни получила в работах Сэмюэля Эйленберга и Сондерса Маклейна (1940; §8.7), Льва Семеновича Понtryгина (1941), Нормана Стингрода (1947; §8.6), Джона Генри Константина Уайтхеда (1949) и Михаила Михайловича Постникова (1950). См. также [Sk, §15 ‘Гомотопическая классификация и ее применения’].

Напомним, что все отображения считаются непрерывными и прилагательное ‘непрерывное’ опускается. Пусть X, Y — произвольные многообразие (или даже тела симплексных комплексов). Обозначим через $[X, Y]$ множество непрерывных отображений $X \rightarrow Y$, переводящих отмеченную точку в отмеченную точку, с точностью до гомотопии в классе таких отображений.

8.1 Отображения графа в окружность

Приведем описание множества $[K, S^1]$ (см. задачу ??) на другом языке, следуя общему методу теории препятствий (и тоже развивая идею задачи ??). Хотя эти формулировка и доказательство более сложны, но с помощью их обобщения можно получить результаты, которые не получаются при помощи ‘стягивания ребер’ (и многомерного аналога стягивания).

Теорема Хопфа-Уитни для графов. Для графа K существует биекция $\deg : [K, S^1] \rightarrow H^1(K; \mathbb{Z})$.

Начало доказательства теоремы Хопфа-Уитни: определение препятствующей расстановки. Знакомство с этим доказательством рекомендуем начать со случая $K = K_4$ (рис. ??).

Фиксируем произвольную точку $v \in S^1$. Произвольное отображение $K \rightarrow S^1$ гомотопно *клеточному*, т.е. такому, для которого каждой вершине графа K соответствует вектор v (докажите!). Поэтому достаточно классифицировать клеточные отображения $K \rightarrow S^1$ с точностью до гомотопии, отображения которой не обязательно клеточны.

Построим для отображения f препятствие $\deg f$ к гомотопности отображения f постоянному отображению. Фиксируем произвольно направление на каждом ребре графа K (препятствие $\deg f$ будет зависеть от этого выбора). Возьмем клеточное отображение $f : K \rightarrow S^1$. Поставим на каждом ребре $e \subset K$ число оборотов вектора $f(x)$ при проходе точкой x по ребру e вдоль направления. Полученную расстановку обозначим $\gamma(f)$.

Если $f, g : K \rightarrow S^1$ — клеточные отображения, для которых $\gamma(f) = \gamma(g)$, то по Основной теореме топологии $f \simeq g$.

Изменение препятствующей расстановки. Обратное неверно, как показывает пример следующей гомотопии (рис. 64). Для вершины a графа K изменим отображение f так, чтобы вектор в a сделал один оборот против часовой стрелки, вектора в маленькой окрестности вершины a ‘потянулись’ за вектором в a , а вне этой маленькой окрестности отображение осталось прежним. В результате получим отображение $g : K \rightarrow S^1$, гомотопное отображению f . Понятно, что $\gamma(f)$ и $\gamma(g)$ отличаются на расстановку плюс или минус единиц (в зависимости от ориентации) на ребрах, содержащих вершину a , и нулей на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется *элементарной кограницей вершины a* и обозначается δa .

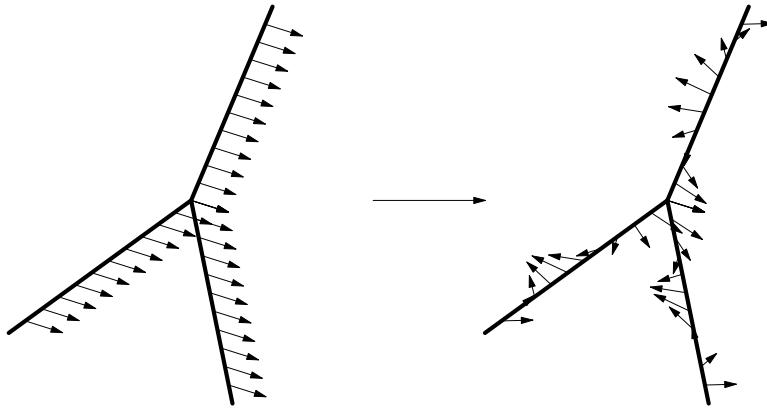


Рис. 64: Подкручивание отображения в окрестности вершины

В окрестностях вершин a_1, \dots, a_s сделаем описанную выше гомотопию отображения f , поворачивая вектора в этих вершинах на n_1, \dots, n_s оборотов, соответственно. Обозначим полученное отображение через $f_{n_1 a_1 + \dots + n_s a_s}$. Расстановки целых чисел на ребрах можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*). Тогда

$$\gamma(f) - \gamma(f_{n_1 a_1 + \dots + n_s a_s}) = n_1 \delta a_1 + \dots + n_s \delta a_s.$$

Теперь рассмотрим гомотопию $f_t : K \rightarrow S^1$ между клеточными отображениями f_0, f_1 . Поставим на каждой вершине a число оборотов вектора $f_t(a)$ при изменении t от 0 до 1. Полученную расстановку обозначим $n_1 a_1 + \dots + n_s a_s$. Легко проверить, что $\gamma(f_0) - \gamma(f_1) = n_1 \delta a_1 + \dots + n_s \delta a_s$.

Определение одномерной группы когомологий $H^1(K; \mathbb{Z})$, отображения \deg и доказательство его биективности. Назовем расстановки γ_1, γ_2 целых чисел на ребрах *когомологичными*, если $\gamma_1 - \gamma_2 = n_1 \delta a_1 + \dots + n_s \delta a_s$ для некоторых целых чисел n_1, \dots, n_s и вершин a_1, \dots, a_s . Группа $H^1(K; \mathbb{Z})$ расстановок с точностью до когомологичности называется *одномерной группой когомологий графа K (с коэффициентами в \mathbb{Z})*. Обозначим

$$\deg f = [\gamma(f)] \in H^1(K; \mathbb{Z})$$

Ясно, это определение корректно.

Если $\deg f = \deg g$ для некоторых клеточных отображений f и g , то $\gamma(f) - \gamma(g) = n_1 \delta a_1 + \dots + n_V \delta a_V$ для некоторых целых чисел n_1, \dots, n_V . Тогда $f \simeq f_{n_1 a_1 + \dots + n_s a_s} \simeq g$. Поэтому отображение \deg инъективно.

Чтобы доказать сюръективность отображения \deg , возьмем произвольную расстановку γ целых чисел на ребрах. Положим $f(a) = v$ для каждой вершины a графа K . В качестве $f|_e$ возьмем γ_e -кратный обход вдоль окружности S^1 . Для построенного клеточного отображения f имеем $\gamma(f) = \gamma$, поэтому $\deg f = [\gamma]$. QED

8.1. (a) Группа $H^1(K; \mathbb{Z})$ зависит только от топологического типа графа K , т.е. одномерные группы когомологий гомеоморфных графов изоморфны.

(b) $H^1(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{E-V+C}$.

(c) Отображение $\deg : [K, S^1] \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z})$ является изоморфизмом групп (S^1 является группой, поэтому $[K, S^1]$ является группой).

8.2 Отображения графа в проективную плоскость

Пусть граф K расположен в трехмерном пространстве. Назовем непрерывным отображением $f : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$ семейство прямых $f(x)$ трехмерного пространства, проходящих

через точки $x \in K$, непрерывно зависящих от x . (В этом определении можно заменить 'через точки $x \in K$ ' на 'через точку $0 \in \mathbb{R}^3$ '.)

- 8.2.** (a) Любые два отображения дерева в $\mathbb{R}P^2$ гомотопны.
 (b) Для любого отображения $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ композиция двукратной намотки $S^1 \rightarrow S^1$ и f гомотопна отображению в точку.
 (c) Стандартное включение $S^1 \cong \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ не гомотопно отображению в точку.
 (d) $[S^1, \mathbb{R}P^2] \cong \mathbb{Z}_2$.
 (e) Опишите $[K, \mathbb{R}P^2]$ (указание: используйте (b) и стягивание ребра).

Теорема Хопфа по модулю 2. Для графа K существует биекция $\deg : [K, \mathbb{R}P^2] \rightarrow H^1(K)$.

Набросок определения одномерной группы когомологий $H^1(K)$, отображения \deg и доказательства его биективности. Фиксируем в \mathbb{R}^3 некоторую прямую l_0 и плоскость α_0 , ее содержащую (т.е. фиксируем на проективной плоскости точку $\mathbb{R}P^0$ и окружность $\mathbb{R}P^1$, рис. 65). Любое отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}P^2$ гомотопно *клеточному*, т.е. такому, для которого все прямые параллельны α_0 , а прямая в вершине параллельна l_0 (т.е. переводящему любую вершину графа K в $\mathbb{R}P^0$, а любое ребро в $\mathbb{R}P^1$). Поэтому достаточно классифицировать клеточные отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}P^2$ с точностью до гомотопии (отображения которой не обязательно клеточны).

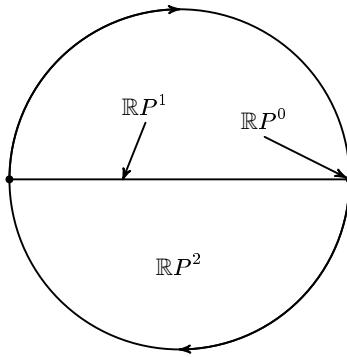


Рис. 65: Схема (клеточное разбиение) проективной плоскости

Для клеточного отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}P^2$ поставим на каждом ребре e количество оборотов прямой $f(x)$ при прохождении по этому ребру от одной вершины до другой. Это количество не зависит от выбора начальной вершины. Полученную расстановку нулей и единиц на ребрах графа K обозначим $\gamma(f)$.

Если $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}P^2$ — клеточные отображения и $\gamma(f) = \gamma(g)$, то $f \simeq g$ (поскольку $[S^1, \mathbb{R}P^2] \cong \mathbb{Z}_2$).

Так как $\mathbb{R}P^2$ является 2-многообразием, то любая гомотопия клеточного отображения f гомотопна *клеточной*, т.е. такой, в процессе которой прямые в вершинах графа K параллельны плоскости α_0 (т.е. образы вершин находятся на окружности $\mathbb{R}P^1$). Заметим, что отображения, из которых состоит клеточная гомотопия, не обязательно клеточны. Для клеточной гомотопии $f_t : K \rightarrow S^1$ между клеточными отображениями f_0 и f_1 и вершины $a \in K$ рассмотрим количество оборотов прямой $f_t(a)$ при прохождении параметром t отрезка $[0, 1]$. Пусть a_1, \dots, a_s — все вершины, для которых это количество нечетно. Тогда $\gamma(f_0) - \gamma(f_1) = \delta a_1 + \dots + \delta a_s$. Кограница δa вершины $a \in K$, отношение когомологичности, группа $H^1(K)$ и класс $\deg f = [h_f] \in H^1(K)$ определяются как и в теореме Хопфа с заменой \mathbb{Z} на \mathbb{Z}_2 . Корректность определения, инъективность и сюръективность отображения \deg доказываются аналогично теореме Хопфа. QED

8.3 Эквивариантные отображения графа

Пусть дан связный граф с симплициальной инволюцией $\tau : K \rightarrow K$, не имеющей неподвижных точек (см. определение в параграфе 'инволюции'). Отображение $f : K \rightarrow S^1$ называется *эквивариантным* (относительно τ), если $f(\tau(x)) = -f(x)$ для любой $x \in K$ (т.е. если векторы в τ -симметричных точках противоположны). Такие отображения возникали в пункте 'конфигурационные пространства и планарность'. Обозначим через $[K; S^1]_\tau$ множество эквивариантных отображений $K \rightarrow S^1$ с точностью до эквивариантной гомотопии (т.е. гомотопии в классе эквивариантных отображений).

Эквивариантная теорема Хопфа. Для связного графа K с симплициальной инволюцией $\tau : K \rightarrow K$, не имеющей неподвижных точек, существует биекция $\deg : [K; S^1]_\tau \rightarrow H^1(K/\tau; \mathbb{Z})$.

Набросок определения отображения \deg и доказательства его биективности. Предположим, что в графе K нет петель и кратных ребер.

Фиксируем произвольный единичный вектор v . Произвольное эквивариантное отображение $K \rightarrow S^1$ эквивариантно гомотопно *клеточному*, т.е. такому, для которого каждой вершине графа K соответствует один из векторов v или $-v$ (докажите!). Поэтому достаточно классифицировать клеточные эквивариантные отображения с точностью до эквивариантной гомотопии (отображения которой не обязательно клеточны).

Ясно, что существует некоторое эквивариантное клеточное отображение $K \rightarrow S^1$: его можно задать произвольно на вершинах и затем произвольно продолжить на ребра. Обозначим одно из таких отображений через f_0 .

Фиксируем ориентации на окружности S^1 и на ребрах графа K так, чтобы ориентации на инволютивных ребрах были согласованы. Возьмем клеточное эквивариантное отображение $f : K \rightarrow S^1$. Для каждого ребра рассмотрим полуцелое число оборотов вектора $f(x)$ при пробегании x этого ребра в направлении ориентации ребра. Поставим на этом ребре разность этого числа и аналогичного числа для f_0 . Получим расстановку $\gamma(f)$ полуцелых чисел на ребрах графа K . Тогда

- (i) на паре инволютивных ребер стоят равные числа.
- (ii) сумма чисел на ребрах любого пути в графе K , соединяющего две инволютивные вершины, целая.

(iii) сумма чисел на ребрах любого цикла в графе K целая.

Второе утверждение следует из $f(a) = -f(\tau a)$ и $f_0(a) = -f_0(\tau a)$.

Будем называть *эквивариантными* расстановки, удовлетворяющие этим условию.

Определим *эквивариантную кограницу* $\delta(a, \tau a)$ пары инволютивных вершин $a, \tau a$ так: на всех ребрах, не содержащих ни a , ни τa , ставим нули, на ребрах, входящих в одну из этих вершин, ставим $+1/2$, на выходящих ставим $-1/2$. При этом если есть ребро с концами только в вершинах a и τa , то на нем ставим 0. Определим отношение *эквивариантной когомологичности*, группу $H^1_\tau(K; \mathbb{Z})$ эквивариантных расстановок с точностью до эквивариантной когомологичности и отображение $\deg : [K; S^1]_\tau \rightarrow H^1_\tau(K; \mathbb{Z})$, как и в доказательстве теоремы Хопфа. Доказательства корректности определения отображения \deg и его инъективности аналогичны доказательству теоремы Хопфа.

Для доказательства сюръективности отображения \deg возьмем произвольную эквивариантную расстановку γ и любую вершину $a \in K$. Положим $f(a) = f_0(a)$ и $f(\tau a) = f_0(\tau a) = -f_0(a)$. Постепенно, выходя от вершины a , будем продолжать построенное отображение f на пары $e, \tau e$ инволютивных ребер, наматывая их 'с одинаковой скоростью' на окружность нужное число раз. Ввиду условия (ii) это построение корректно (проверьте!). Для построенного отображения f получаем $\gamma(f) = \gamma$.

Доказательство изоморфизма $H^1_\tau(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(K/\tau; \mathbb{Z})$ оставляем в качестве задачи. QED

8.3. (a) $H_\tau^1(K; \mathbb{Z}) \cong H^1(K/\tau; \mathbb{Z})$.

(b) В приведенном построении рассмотрим произвольную вершину b графа K . Если сумма чисел на ребрах некоторого пути, соединяющего a и b , целая, то $f(b) = 1$ и $f(\tau b) = -1$, иначе $f(b) = -1$ и $f(\tau b) = 1$. (Ввиду условия (iii) сумма чисел на ребрах любого пути, соединяющего a и b , является целой или полуцелой в зависимости только от вершины b , а не от выбора пути).

(c) Приведите другое доказательство теоремы, основанное на одновременном стягивании τ -симметричных ребер в K .

8.4 Отображения полиэдра в окружность

Этот и следующий пункты интересно разобрать даже для $n = 2$ (общий случай аналогичен). *Конечный n -полиэдр* можно представлять себе как объединение некоторого количества граней размерностей не более n в разбиении пространства \mathbb{R}^m на единичные m -кубы.

Обобщением задачи ??.*d* является следующий результат.

Теорема Брушлинского. Для любого конечного n -полиэдра K существует биекция $\deg : [K; S^1] \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z})$.

Набросок определения группы когомологий $H^1(K; \mathbb{Z})$, отображения \deg и доказательства его биективности для $n = 2$. Фиксируем произвольную триангуляцию 2-полиэдра K .

Второй и третий абзацы доказательства теоремы Хопфа-Уитни для графов нужно повторить без изменений (т.е. клеточные отображения и препятствующая расстановка $\gamma(f)$ определяются так же, как и в теореме Хопфа-Уитни для графов). По теореме продолжаемости, для расстановки $\gamma(f)$

сумма чисел на ребрах границы любой грани $c \subset K$ равна 0.

(Действительно, эта сумма равна количеству оборотов вектора $f(x)$ при обходе точкой x границы этой грани.)

Расстановки с этим условием называются *коциклами*.

Кограница да вершины $a \in K$, отношение *когомологичности*, группа $H^1(K; \mathbb{Z})$ классов когомологичности *коциклов* и отображение $\deg : [K, S^1] \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z})$ определяются как и в теореме Хопфа-Уитни для графов.

Для доказательства инъективности отображения \deg сначала соединим отображения одинаковой степени гомотопией на объединении $K^{(1)}$ ребер триангуляции (аналогично доказательству теоремы Хопфа-Уитни для графов). По теореме гомотопности эту гомотопию можно продолжить на все K (докажите!).

Для доказательства сюръективности отображения \deg мы сначала для коцикла γ строим такое непрерывное отображение $f : K^{(1)} \rightarrow S^1$, что $\gamma(f) = \gamma$ (аналогично доказательству теоремы Хопфа-Уитни для графов). Так как сумма чисел расстановки γ на ребрах границы ∂c произвольной грани $c \subset K$ равна нулю, то по теореме продолжаемости существует продолжение отображения $f : \partial c \rightarrow S^1$ на грани c . Аналогично продолжаем f на остальные грани триангуляции. QED

8.4. (a) Вычислите $H^1(K; \mathbb{Z})$ для 2-многообразия K с триангуляцией, имеющей V вершин, E ребер и F граней.

(b) Докажите теорему Брушлинского для произвольного n .

8.5. (a) Для подсхемы $A \subset K$ и расстановки x чисел на ребрах схемы K рассмотрим ограничение $x|_A$ этой расстановки на ребра схемы A . Тогда соответствие $[x] \mapsto [x|_A]$ определяет отображение $H^1(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(A; \mathbb{Z})$. Оно называется *сужением*.

(b) *Теорема Хопфа.* Окружность $S^1 \subset K$ в 2-полиэдре K является его ретрактом тогда и только тогда, когда существует $x \in H^1(K; \mathbb{Z})$, сужение которого на S^1 является образующей группы $H^1(S^1; \mathbb{Z})$.

8.5 Отображения полиэдра в сферу той же размерности

В этом пункте мы будем заниматься проблемой описания *множества гомотопических классов непрерывных отображений $K \rightarrow S^n$.* Для $K = S^n$ на этом множестве имеется естественная структура *группы* [Sk, §15.1 ‘Введение. Групповая структура.’], которая необходима при решении нашей задачи для произвольного K (несмотря на то, что для произвольного K такой естественной структуры *группы* нет и ответ, когда он известен,дается именно в терминах *множества*).

Теорема Хопфа-Уитни. Для n -полиэдра K существует биекция $\deg : [K, S^n] \rightarrow H^n(K; \mathbb{Z})$.

Набросок определений n -мерной группы когомологий $H^n(K; \mathbb{Z})$, отображения \deg и доказательства его биективности. Фиксируем произвольную точку $v \in S^n$. Фиксируем триангуляцию полиэдра K и ориентации на n -мерных гранях триангуляции. Любое отображение $f : K \rightarrow S^n$ гомотопно клеточному, т.е. переводящему объединение $(n-1)$ -мерных граней в v . Поэтому достаточно классифицировать клеточные отображения с точностью до гомотопии (отображения которой не обязательно клеточны).

Для клеточного отображения $f : K \rightarrow S^n$ рассмотрим произвольную n -мерную грань $c \subset K$. Поскольку f отображает ее границу ∂c в точку, то отображение $f|_c$ представляется в виде композиции схлопывания границы грани c в точку (при котором получается S^n) и некоторого отображения $S^n \rightarrow S^n$. Поставим на грани c степень последнего отображения. Полученную расстановку обозначим $\gamma(f)$.

Кограница ($n-1$)-мерной грани, отношение *когомологичности*, группа $H^n(K; \mathbb{Z})$ и отображение \deg определяются как и в теореме Хопфа-Уитни для графов.

Корректность определения отображения \deg , его инъективность и сюръективность доказываются аналогично теореме Хопфа-Уитни для графов, используя $\pi_i(S^n) = 0$ для $i < n$ и многомерную основную теорему топологии. Для доказательства инъективности необходимо следующее добавление: в силу общего положения можно считать, что гомотопия между $f, g : K \rightarrow S^n$ отображает объединение $(n-2)$ -мерных граней полиэдра K в $v \in S^n$. QED

Для полиэдра K произвольной размерности и любого клеточного отображения $f : K \rightarrow S^n$ можно точно так же определить препятствующую расстановку $\gamma(f)$. Из многомерной основной теоремы топологии следует, что для расстановки $\gamma(f)$

сумма чисел на границе любой $(n+1)$ -мерной грани равна 0.

Расстановки с этим условием называются *коциклами*. *Кограница* ($n-1$)-мерной грани, отношение *когомологичности* *коциклов* и группа $H^n(K; \mathbb{Z})$ определяются как и в (одномерной) теореме Хопфа. Ввиду важности этого определения приведем его.

Определение групп когомологий. (Ср. с определением групп гомологий в начале главы 4; $C^n(X; \mathbb{Z}) = C_n(X; \mathbb{Z})$.) Введем ориентации на симплексах (некоторой триангуляции) полиэдра X . Обозначим через $C^n = C^n(X; \mathbb{Z})$ группу расстановок целых чисел на ориентированных n -симплексах (с операцией покомпонентного сложения). Для n -мерного симплекса σ определим его *элементарную кограницу* $\partial\sigma$ как расстановку плюс или минус единиц на $(n+1)$ -симплексах, содержащих σ , и нулей на остальных $(n+1)$ -симплексах. Уточните знаки, исходя из предыдущих примеров, мотивирующих это определение. Элементарные кограницы определяют линейное отображение $\delta = \delta_{n+1} : C^n \rightarrow C^{n+1}$.

8.6. $\delta_{n+1}\delta_n = 0$.

Положим

$$H^n(X; \mathbb{Z}) := \delta_{n+1}^{-1}(0)/\delta_n(C^{n-1}) \quad \text{для } n \geq 1 \quad \text{и} \quad H^0(X; \mathbb{Z}) := \delta_1^{-1}(0).$$

8.7. Для полиэдра K произвольной размерности и любого клеточного отображения $f : K \rightarrow S^n$ отображение $\deg : [K, S^n] \rightarrow H^n(K; \mathbb{Z})$ определяется как и в (одномерной) теореме Хопфа (ср. с доказательством теоремы Брушлинского).

- (a) Отображение \deg по-прежнему корректно определено.
- (b) Если $\dim K = n + 1$, то \deg сюръективно.
- (c) Приведите пример не инъективности отображения \deg для $n = 2$. Указание. $S^3 \rightarrow S^2$.

8.6 Отображения полиэдра в сферу меньшей размерности

8.8. Пусть A — подполиэдр полиэдра X и $f : A \rightarrow S^n$ — непрерывное отображение. Определите группу $H^{n+1}(X, A; \mathbb{Z})$ (аналогично вышеприведенному определению групп когомологий) и постройте препятствие $o(f) \in H^{n+1}(X, A; \mathbb{Z})$ к продолжению f на X .

Теорема Стинрода. Для любых $n \geq 3$ и $(n+1)$ -полиэдра K существует биекция

$$[K, S^n] \xrightarrow{\deg \times St} H^n(K; \mathbb{Z}) \times H^{n+1}(K) / \text{Sq}^2 \rho_2 H^{n-1}(K; \mathbb{Z}).$$

Здесь $\rho_2 : H^n(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(K)$ — приведение по модулю 2. Операция $\text{Sq}^2 : H^{n-1}(K) \rightarrow H^{n+1}(K)$ определяется тем условием, что для отображения $f : K^{(n-1)} \rightarrow S^{n-1}$, продолжаемого на $K^{(n)}$, элемент $\text{Sq}^2 \rho_2(\deg f) \in H^{n+1}(K)$ является препятствием $o(f)$ к продолжению отображения f на все K .

8.9. * (a) Это определение корректно, т.е. препятствие $o(f)$ действительно пропускается через ρ_2 и зависит только от $\deg f$.

(b) Операция Sq^2 естественна по K .

(c) Для 4-полиэдра K и отображения $f : K^{(2)} \rightarrow S^2$, продолжаемого на $K^{(3)}$, постройте препятствие $\text{Sq}^2(\deg f) \in H^4(K; \pi_3(S^2))$ к продолжению отображения f на все K (аналогично задаче 8.8). Получится отображение Sq^2 , для которого последовательность $[K, S^2] \xrightarrow{\deg} H^2(K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Sq}^2} H^4(K; \mathbb{Z})$ множеств с отмеченными точками точна.

(d) Для коцикла $a \in Z^2(K; \mathbb{Z})$ элемент $\text{Sq}^2[a]$ представляется коциклом $b \in Z^4(K, \mathbb{Z})$, определенным по формуле $b(\sigma_{01234}) = a(\sigma_{012})a(\sigma_{234})$.

(e) Пусть K — ориентируемое четырехмерное многообразие и класс $a \in H^2(K; \mathbb{Z})$ двойственен по Пуанкаре классу $Da \in H_2(K; \mathbb{Z})$, представляющемуся вложением $h : N \rightarrow K$ замкнутого ориентируемого 2-многообразия (т.е. сферы с ручками) N . Тогда $\text{Sq}^2 a$ есть сумма точек (со знаком) в $hN \cap h'N$, где h' — погружение, близкое к h .

(f) Если $\alpha \in H^2(K; \mathbb{Z})$, то $f_{\text{Sq}^2 \alpha} = f_1 \circ f_\alpha$, где $1 \in H^4(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z}) \cong H_2(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ — образующая и отображения $f_{\text{Sq}^2 \alpha} : K \rightarrow K(\mathbb{Z}, 4)$, $f_1 : \mathbb{C}P^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 4)$ и $f_\alpha : K \rightarrow \mathbb{C}P^3$ соответствуют классам $\text{Sq}^2 \alpha$, 1 и α при изоморфизмах $H^4(K; \mathbb{Z}) \cong [K, K(\mathbb{Z}, 4)]$, $H^4(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z}) \cong [\mathbb{C}P^3, K(\mathbb{Z}, 4)]$ и $H^2(K; \mathbb{Z}) \cong [K, \mathbb{C}P^3]$ из теоремы Эйленберга-Маклейна ниже.

Теорема Понтрягина. (a) Для 3-полиэдра N имеется сюръекция $\deg : [N; S^2] \rightarrow H^2(N; \mathbb{Z})$ и биекция $\deg^{-1}(0) \rightarrow H^3(N; \mathbb{Z})$.

(b) Для любого $\gamma \in H^2(N; \mathbb{Z})$ имеется биекция $\deg^{-1}(\gamma) \rightarrow \frac{H^3(N; \mathbb{Z})}{2\gamma \cup H^1(N; \mathbb{Z})}$.

‘Определение’ произведения $\cup : H^1(N; \mathbb{Z}) \times H^2(N; \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(N; \mathbb{Z})$: число на симплексе 1234 равно произведению чисел на симплексе 12 и на симплексе 234. Впрочем,

это определение естественно появляется при изучении множества $[N, S^2]$, поэтому его можно придумать, и не зная определения.

Как по γ быстро описать $2\gamma \cup H^1(N; \mathbb{Z})$?

8.7 Отображения в пространства Эйленберга-Маклейна

Попытавшись обобщить наше вычисление множества $[K, \mathbb{R}P^2]$ на 2-полиэдр K , легко найти такой 2-полиэдр K , что $[K, \mathbb{R}P^2] \neq H^1(K)$. Например, $K = S^2$. Однако, теорему Хопфа по модулю 2 все-таки можно обобщить на многомерный случай.

Пусть полиэдр K (например, 2-многообразие) расположен в \mathbb{R}^m . Назовем непрерывным отображением $f : K \rightarrow \mathbb{R}P^n$ семейство прямых $f(x)$ в точках $x \in K$, параллельных фиксированному подпространству $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^m$ и непрерывно зависящих от x . Гомотопность таких отображений и множество $[K, \mathbb{R}P^n]$ определяются аналогично предыдущему.

Теорема Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{R}P^{n+1}$. Для n -полиэдра K существует биекция $\deg : [K, \mathbb{R}P^{n+1}] \rightarrow H^1(K)$.

Случай $n = 1$ есть теорема Хопфа по модулю 2. Теорема Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{R}P^n$ интересна даже для $n = 2$ (и даже для 2-многообразий).

Набросок определения одномерной группы когомологий $H^1(K)$ и доказательства теоремы Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{R}P^3$. Фиксируем разложение $\mathbb{R}P^0 \in \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$. Как и раньше, будем классифицировать только *клеточные* отображения, т.е. переводящие вершины 2-полиэдра K в точку $\mathbb{R}P^0$, ребра в $\mathbb{R}P^1$ и грани в $\mathbb{R}P^2$. Для клеточного отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}P^3$, как и в теореме Хопфа по модулю 2 определим *препятствующий коцикл* $\gamma(f)$ (расстановку целых чисел на ребрах, для которой сумма чисел по границе любой грани равна нулю) и кограницу δa вершины a . Так как $\pi_2(\mathbb{R}P^3) = 0$, то $\gamma(f) = \gamma(g)$ влечет $f \simeq g$.

Как и раньше, любая гомотопия клеточного отображения f может быть заменена на *клеточную*, т.е. такую, для которой образы вершин полиэдра K находятся на $\mathbb{R}P^1$, а ребер — на $\mathbb{R}P^2$. Так как $\pi_2(\mathbb{R}P^3) = 0$, то $f \simeq g$ тогда и только тогда, когда $\gamma(f) - \gamma(g) = \delta a_1 + \dots + \delta a_s$ для некоторых вершин $a_1, \dots, a_s \in K$. Назовем такие расстановки $\gamma(f)$ и $\gamma(g)$ *когомологичными*.

Определим группу $H^1(K)$ и отображение \deg как и в доказательстве теоремы Хопфа по модулю 2. Тогда отображение \deg определено корректно. Инъективность этого отображения доказывается аналогично инъективности отображения \deg из теоремы Хопфа по модулю 2. Сюръективность доказывается аналогично теореме Брушлинского с использованием $\pi_2(\mathbb{R}P^3) = 0$ и заменой \mathbb{Z} на \mathbb{Z}_2 . QED

Доказательство теоремы Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{R}P^{n+1}$ аналогично предыдущему, поскольку в силу условия $\pi_k(\mathbb{R}P^{n+1}) = 0$ любое отображение $K^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ можно продолжить на все K и любую гомотопию на $K^{(1)}$ можно продолжить на все K .

Теорема Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{C}P^n$. Для n -полиэдра K существует биекция $\deg : [K, \mathbb{C}P^n] \rightarrow H^2(K; \mathbb{Z})$.

Случай $n = 1$ очевиден. Случай $n = 2$ фактически был рассмотрен в двумерной теореме Хопфа: $[K; \mathbb{C}P^2] = [K; S^2] = H^2(K; \mathbb{Z})$, поскольку любое отображение 2-полиэдра K в $\mathbb{C}P^2$ и любая его гомотопия вытесняются на $S^2 = \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$.

8.10. (a) Докажите теорему Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{C}P^3$ (доказательство общего случая аналогично).

(b) Найдите $[K, (S^1)^n]$.

Далее мы используем понятия непрерывного отображения в более общие пространства и гомотопий таких отображений, см. [FF89]. Напомним, что для любого n существует такой (как правило, бесконечномерный) полиэдр

$$K(\mathbb{Z}, n), \text{ что } [S^n, K(\mathbb{Z}, n)] \cong \mathbb{Z} \text{ и } [S^i, K(\mathbb{Z}, n)] = 0 \text{ для любого } i \neq n.$$

Например, $K(\mathbb{Z}, 1) \cong S^1$ и $K(\mathbb{Z}, 2) \cong \mathbb{C}P^\infty$.

Теорема Эйленберга-Маклейна. Для любого полиэдра K существует биекция $\deg : [K, K(\mathbb{Z}, n)] \rightarrow H^n(K; \mathbb{Z})$.

8.11. (a) Докажите теорему Эйленберга-Маклейна для $n = 3$ (доказательство общего случая аналогично).

(b) Для полиэдра K и абелевой группы π определите (вообще говоря, бесконечномерный) полиэдр $K(\pi, n)$ и группу $H^n(K; \pi)$ так, чтобы существовала биекция $\deg : [K, K(\pi, n)] \rightarrow H^n(K; \pi)$.

Указание к 8.10. Рассмотрим точку $v = \mathbb{C}P^0 \in \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{C}P^3$. Как и выше, $[K, \mathbb{C}P^3]$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством *клеточных* отображений $f : K \rightarrow \mathbb{C}P^3$ (таких, что $f(K^{(1)}) = v$ и $f(K^{(3)}) \subset \mathbb{C}P^2$) с точностью до *клеточных* гомотопий f_t (таких, что $f_t(K^{(0)}) = v$, $f_t(K^{(2)}) \subset \mathbb{C}P^1$ и $f_t(K^{(3)}) \subset \mathbb{C}P^2$ для любого t). В частности, $[K, \mathbb{C}P^3] = [K, \mathbb{C}P^2]$. Дальнейшее аналогично доказательству теоремы Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{R}P^{n+1}$. Используйте $\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_k(\mathbb{C}P^n) = 0$ для $k = 1, 3, 4, 5, \dots, 2n$.

Список литературы

- [Ak00] **P. M. Ахметьев*. Вложения компактов, стабильные гомотопические группы сфер и теория особенностей // Успехи Мат. Наук. 2000. 55:3. С. 3-62.
- [ARS01] *P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov*. P. Akhmetiev, D. Repovs and A. Skopenkov, Embedding products of low-dimensional manifolds in \mathbb{R}^m // Topol. Appl. 2001. 113. P. 7-12.
- [ARS02] *P. Akhmetiev, D. Repovs and A. Skopenkov*. Obstructions to approximating maps of n -manifolds into R^{2n} by embeddings, Topol. Appl., 123 (2002), 3–14.
- [Bi83] **R. H. Bing*. The Geometric Topology of 3-Manifolds. Providence, R. I. 1983. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 40).
- [BE82] **B. Г. Болтынский и B. A. Ефремович*. Наглядная топология, Наука, Москва, 1982. <http://ilib.mccme.ru/djvu/geometry/boltiansky-nagl-topo.htm>
- [BM] **И. Богданов и A. Матушкин*, Алгебраическое доказательство линейных теорем Конвея-Гордона-Закса и ван Кампена-Флореса.
- [BP97] **R. Benedetti and C. Petronio*. Branched standard spines of 3-manifolds // Lecture Notes in Math. 1653, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.
- [Br72] *J. L. Bryant*. Approximating embeddings of polyhedra in codimension 3, Trans. Amer. Math. Soc., 170 (1972) 85–95.
- [BRS99] *D. Repovš, N. Brodsky and A. B. Skopenkov*. A classification of 3-thickenings of 2-polyhedra // Topol. Appl. 1999. 94. P. 307-314.
- [C11] *M. Čadek, M. Krcal, J. Matoušek, F. Sergeraert, L. Vokrinek, U. Wagner*. Computing all maps into a sphere, <http://arxiv.org/abs/1105.6257>.
- [CG83] *J. H. Conway and C. M. A. Gordon*, Knots and links in spatial graphs, J. Graph Theory 7 (1983), 445–453.
- [CRS98] *A. Cavicchioli, D. Repovš and A. B. Skopenkov*. Open problems on graphs, arising from geometric topology // Topol. Appl. 1998. 84. P. 207-226.
- [Cu81] *M. Culler*. Using surfaces to solve equations in free groups // Topology. 1981. 20. P. 133-145.
- [Fo04] * *R. Fokkink*. A forgotten mathematician, European Mathematical Society Newsletter 52 (2004) 9–14, Available at: <http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2004-06-52.pdf>
- [Fl34] *A. Flores*, Über n -dimensionale Komplexe die im E^{2n+1} absolut selbstverschlungen sind, Ergeb. Math. Koll. 6 (1934) 4–7.
- [Fr15] *F. Frick*, Counterexamples to the topological Tverberg conjecture, <http://arxiv.org/abs/1502.00947>
- [FF89] **A. T. Фоменко и Д. Б. Фукс*. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

- [GT87] **J. L. Gross and T. W. Tucker*. Topological graph theory. New York: Wiley-Interscience, 1987.
- [Ha] **F. Harary*. Graph theory. Рус. пер.: Ф. Харари. Теория графов. М., Мир, 1973.
- [HMS93] **C. Hog-Angeloni, W. Metzler and A. J. Sieradski*. Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. (London Math. Soc. Lecture Notes, 197).
- [Ka41] *E. R. van Kampen*, Remark on the address of S. S. Cairns, in Lectures in Topology, 311–313, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1941.
- [KPS] **A. Kaibkhanov, D. Permyakov and A. Skopenkov*. Realization of graphs with rotation // <http://www.turgor.ru/lktg/2005/3/index.htm>.
- [KS99] **П. Кожевников и А. Скопенков*. Узкие деревья на плоскости // Мат. Образование. 1999. 2-3. С. 126–131.
- [Ku68] **K. Kuratowski*. Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1969.
- [LZ] **S. Lando and A. Zvonkin*. Embedded Graphs. Springer
- [MA] * http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Links,_i.e._embeddings_of_non-connected_manifolds#The_Zeeman_construction_and_linking_coefficient, Manifold Atlas Project (unrefereed page)
- [FR86] *R. Fenn, D. Rolfsen*. Spheres may link homotopically in $4\mathbb{H}\text{space}$, J. London Math. Soc. 34 (1986) 177–184.
- [MT01] **B. Mohar and C. Thomassen*. Graphs on Surfaces. The John Hopkins University Press, 2001.
- [MTW08] *J. Matoušek, M. Tancer, U. Wagner*. Hardness of embedding simplicial complexes in \mathbb{R}^d , <http://arxiv.org/abs/0807.0336>.
- [MSTW14] *J. Matoušek, E. Sedgwick, M. Tancer, U. Wagner*, Embeddability in the 3-sphere is decidable, <http://arxiv.org/abs/1402.0815>
- [MW14] *I. Mabillard and U. Wagner*, *Eliminating Tverberg Points, I. An Analogue of the Whitney Trick*. Proceedings of the Thirtieth Annual Symposium on Computational Geometry (New York, NY, USA), SOCG’14, ACM, 2014, pp. 171–180.
- [MW15] *I. Mabillard and U. Wagner*, *Eliminating Tverberg Points, I. An Analogue of the Whitney Trick and the Van Kampen Shapiro-Wu Theorem*.
- [No76] **С. П. Новиков*. Топология-1. М.: Наука, 1976. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Основные направления, 12).
- [Oz87] *M. Özaydin*, Equivariant maps for the symmetric group, unpublished, <http://minds.wisconsin.edu/handle/1793/63829>.
- [Pr95] **B. B. Прасолов*. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995. См. <http://www.mccme.ru/prasolov/>.
- [Pr04] **B. B. Прасолов*. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. См. <http://www.mccme.ru/prasolov/>.

- [Pr06] **B. B. Прасолов*. Элементы теории гомологий. М.: МЦНМО, 2006. См. <http://www.mccme.ru/prasolov/>.
- [PS96] **V. V. Prasolov, Sossinsky A.B.* Knots, Links, Braids, and 3-manifolds. Amer. Math. Soc. Publ., Providence, R.I., 1996. Russian version: <http://www.mccme.ru/prasolov>
- [PS05] **B. B. Прасолов и М. Скопенков*. Рамсеевская теория зацеплений // Мат. Пространство. 2005. 9. С. 108-115.
- [PS11] *Y. Ponty, C. Saule.* A combinatorial framework for designing (pseudoknotted) RNA algorithms, WABI'11 Proceedings of the 11th international conference on Algorithms in bioinformatics, pp. 250-269, <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2039967>
- [PW] *I. Pak, S. Wilson*, GEOMETRIC REALIZATIONS OF POLYHEDRAL COMPLEXES, <http://www.math.ucla.edu/~pak/papers/Fary-full31.pdf>
- [R13] *A. Rukhovich, A. Skopenkov, M. Skopenkov, A. Zimin*, Realizability of hypergraphs, <http://www.turgor.ru/lktg/2013/1/index.htm>
- [RS96] **D. Repovš and A. B. Skopenkov*. Embeddability and isotopy of polyhedra in Euclidean spaces // Труды МИРАН. 1996. 212; Proc. of the Steklov Inst. Math. 1996. 212. P. 173-188.
- [RS98] *D. Repovš and A. B. Skopenkov*. A deleted product criterion for approximability of a map by embeddings // Topol. Appl. 1998. 87 P. 1-19.
- [RS99] **Д. Реповш и А. Скопенков*. Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства // УМН. 1999. 54:6. С. 61-109.
- [RS99'] **Д. Реповш и А. Скопенков*. Кольца Борромео и препятствия к вложимости // Труды МИРАН. 1999. 225. С. 331-338.
- [RS00] *D. Repovš and A. Skopenkov*. Cell-like resolutions of polyhedra by special ones // Colloq. Math. 2000. 86:2. P. 231-237.
- [RS01] *D. Repovš and A. Skopenkov*. On contractible n -dimensional compacta, non-embeddable into \mathbb{R}^{2n} // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. 129. P. 627-628.
- [RS02] **Д. Реповш и А. Скопенков*. Теория препятствий для начинающих // Мат. Просвещение. 2002. 6. С. 60-77.
- [RSS95] *D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin*. On uncountable collections of continua and their span // Colloq. Math. 1995. 69:2. P. 289-296.
- [RSS95'] *D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin*. On embeddability of $X \times I$ into Euclidean space // Houston J. Math. 1995. 21. P. 199-204.
- [Sa81] *H. Sachs*. On spatial representation of finite graphs, in: Finite and infinite sets, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, North Holland, Amsterdam (37) 1981.
- [Sk94] *А. Скопенков*. Геометрическое доказательство теоремы Нойвирта об утолщаемости 2-мерных полиэдров // Мат. заметки. 1994. 56:2. С. 94-98.

- [Sk98] *A. B. Skopenkov.* On the deleted product criterion for embeddability in \mathbb{R}^m // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. 126:8. P. 2467-2476.
- [Sk02] *A. Skopenkov.* On the Haefliger-Hirsch-Wu invariants for embeddings and immersions // Comment. Math. Helv. 2002. 77. P. 78-124.
- [Sk03] *M. Skopenkov.* Embedding products of graphs into Euclidean spaces // Fund. Math. 2003. 179. P. 191-198.
- [Sk03'] *M. Skopenkov.* On approximability by embeddings of cycles in the plane // Topol. Appl. 2003. 134. P. 1-22.
- [Sk05] **A. Скопенков.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов // Мат. Просвещение. 2005. 9. С. 116-128. <http://www.mccme.ru/free-books/matprosc.html>
- [Sk08] **A. Skopenkov.* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces // London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248-342; arxiv:math/0604045.
- [Sk10] **A. Скопенков.* Вложения в плоскость графов с вершинами степени 4, <http://arxiv.org/abs/1008.4940>
- [Sk] **A. Скопенков.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, в печати, <http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combttop13.htm#photo>
- [SS] **A. Skopenkov and M. Skopenkov.* Some short proofs of the nonrealizability of hypergraphs, <http://arxiv.org/abs/1402.0658>
- [ST07] **A. Скопенков и A. Телишев.* И вновь о критерии Куратовского планарности графов // Мат. Просвещение, 11 (2007), 159-160, <http://www.mccme.ru/free-books/matprosc.html>
- [SZ] **A. Skopenkov and A. Zimin,* Realizability of hypergraphs in Euclidean spaces, <http://www.mccme.ru/circles/oim/exalong.pdf>
- [To11] *Tonkonog D.* Embedding 3-manifolds with boundary into closed 3-manifolds, Topology and its Applications 158 (2011), 1157-1162. <http://arxiv.org/abs/1003.3029>.
- [vK32] *E. R. van Kampen,* Komplexe in euklidische Räumen, Abh. Math. Sem. Hamburg, 9 (1932) 72-78; Berichtigung dazu, 152-153.
- [VINH07] **O. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Неуцветаев и В. М. Харламов.* Элементарная топология // МЦНМО. 2007.
- [Wu65] **W. T. Wu.* A Theory of Embedding, Immersion and Isotopy of Polytopes in an Euclidean Space. Peking: Science Press, 1965.
- [Z] * http://zakuski.math.utsa.edu/gokhman/ecz/l_ht.html
- [Z13] **A. Zimin.* Alternative proofs of the Conway-Gordon-Sachs Theorems, <http://arxiv.org/abs/1311.2882>

- [Z'] *J. Zung. A non-general-position Parity Lemma,
<http://www.turgor.ru/lktg/2013/1/parity.pdf>
- [FKT94] M. H. Freedman, V. S. Krushkal and P. Teichner. Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in \mathbb{R}^4 // Math. Res. Letters. 1994. 1. P. 167-176.
- [Fr] T. Friesen. A generalization of Vassiliev's planarity criterion,
<http://arxiv.org/abs/1210.1539>
- [FM] T. Friesen and V. Manturov. Embeddings of $*$ -graphs into 2-surfaces,
<http://arxiv.org/abs/1212.5646>
- [GS] M. Гортников и О. Скрябин. Критерий вложимости графов в плоскость вдоль прямой // препринт.
- [HJ64] R. Halin and H. A. Jung. Karakterisierung der Komplexe der Ebene und der 2-Sphäre // Arch. Math. 1964. 15. P. 466-469.
- [La00] F. Lasheras. An obstruction to 3-dimensional thickening // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. 128. P. 893-902.
- [LS69] W. B. R. Lickorish and L. C. Siebenmann. Regular neighborhoods and the stable range // Trans. AMS. 1969. 139. P. 207-230.
- [Ma73] C. B. Матвеев. Специальные оставы кусочно-линейных многообразий // Мат. Сборник. 1973. 92. С. 282-293.
- [Ma05] V. Manturov. A proof of the Vasiliev conjecture on the planarity of singular links // Izv. RAN 2005.
- [Me29] K. Menger.
- [Me04] S. Melikhov. Sphere eversions and realization of mappings, Trudy MIAN 247 (2004) 159-181 (in Russian) <http://front.math.ucdavis.edu/math.GT/0305158>
- [Mi97] P. Minc. Embedding simplicial arcs into the plane // Topol. Proc. 1997. 22. 305–340.
- [OS74] R. P. Osborne and R. S. Stevens. Group presentations corresponding to spines of 3-manifolds, I // Amer. J. Math. 1974. 96. P. 454-471; II // Amer. J. Math. 1977. 234. P. 213-243; III // Amer. J. Math. 1977. 234 P. 245-251.
- [Pe] D. Permyakov. On embedding of graphs with rotations into the Moebius strip //Preprint. 2005.
- [Pe08] Д. Пермяков. Классификация погружений графов в плоскость, Вестник МГУ, сер.1, 2008, N5, 55-56.
- [SSS98] J. Segal, A. Skopenkov and S. Spiez. Embeddings of polyhedra in \mathbb{R}^m and the deleted product obstruction // Topol. Appl. 1998. 85. P. 225-234.
- [Sa91] K. S. Sarkaria. A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion // Israel J. Math. 1991. 73. P. 79-89.

- [SS83] *E. B. Шепин, М. А. Штанико.* Спектральный критерий вложимости компактов в евклидовы пространства // Труды Ленинградской Международной Топологической конференции. Л.: Наука, 1983. С. 135-142.
- [Si69] *K. Sieklucki.* Realization of mappings // Fund. Math. 1969. 65. P. 325-343.
- [Um78] *B. Ummel.*
- [Vd95] *A. Vdovina.* Construction of orientable Wicks forms and estimation of their number, Comm. Algebra 23 (1995), 3205-3233.
- [Vd96] *A. Vdovina.* On the number of nonorientable Wicks forms in a free group, Proc. Royal Soc. Edinb. Sect. A 126 (1996), 113-116.
- [Vd97] *A. Vdovina.* Product of commutators in free products, Internat. J. Algebra Comput. 7 (1997), 471-485.
- [Wa67] *C. T. C. Wall.* Classification problems in differential topology, IV, Thickenings // Topology 1966. 5. P. 73-94.
- [Wa67] *F. Waldhausen.* Eine Klasse von 3-dimensional Mannigfaltigkeiten, I // Invent. Math. 1967. 3. P. 308-333.
- [Wr77] *P. Wright.* Covering 2-dimensional polyhedra by 3-manifolds spines // Topology. 1977. 16. P. 435-439.

В этом списке звездочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.