Обратные задачи в проблеме экономических измерений

Шананин А.А.

Содержание доклада

- Введение. Новые проблемы математической экономики в условиях глобализации.
- Проблема интегрируемости в теории экономических индексов. Непараметрический метод анализа структуры потребительского поведения.
- Проблема моделирования замещения производственных факторов. Модель распределения ресурсов с замещением производственных факторов на макро уровне. Агрегирование и постановка обратной задачи. Теоремы Бернштейна о характеризации преобразования Радона неотрицательных мер с носителем в конусе.
- Модель распределения ресурсов с замещением производственных факторов на микро уровне. Новые задачи интегральной геометрии.
- Задача об оценке эластичности замещения производственных факторов на микро уровне и её связь с исследованием комбинаторных структур.

Задача о рационализируемости

$X = (X_1, ..., X_m)$ – объемы потребления товаров

$P = (P_1, ..., P_m)$ – цены на эти товары

$P(X) = (P_1(X), ..., P_m(X))$ – обратные функции спроса

Φ_0 – класс непрерывных, вогнутых, положительно-однородных и положительных в $\operatorname{int} R_+^m$ функций

Определение. $P(X)$ *рационализируемы в классе* Φ_0*, если* $\exists$ *такая функция полезности* $F(X) \in \Phi_0$*, что*

$$X \in \operatorname{Argmax}\left\{F(Y) \mid \left\langle P(X), Y \right\rangle \le \left\langle P(X), X \right\rangle, Y = (Y_1, ..., Y_m) \ge 0\right\}$$

Постановки задачи о рационализируемости

Предложение 1.

Пусть $\forall X > 0$ выполнено $\langle P(X), X\rangle > 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- Существуют $F(X) \in \Phi_0, Q(P) \in \Phi_0$, такие что
$$\forall X > 0,\ \forall P \geq 0 \quad Q(P)F(X) \leq \langle P, X\rangle;$$
$$\forall X > 0 \qquad\qquad Q(P(X))F(X) = \langle P(X), X\rangle;$$
- Существует функция $F(X) \in \Phi_0$, такая что $\forall X > 0$ справедливо
$$P(X) \in Q(P(X))\partial F(X)$$
где *Q(P)* – преобразование Янга[1)] функции *F(X)*
$$Q(P) = \inf\left\{\frac{\langle P, X\rangle}{F(X)}\ \middle|\ X \geq 0, F(X) > 0\right\};$$
- Существует $F(X) \in \Phi_0$, рационализирующая обратные функции спроса $P(X)$

[1)] Преобразование Янга инволютивно в классе Φ_0, т.е. двукратное применение переводит функцию в себя

Критерий рационализируемости – I

Определение. $F(X)$ *принадлежит классу* U_m *, если* $F(X) \in C(\mathbb{R}^m_+)$ *и в* $\operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$ *выполнены следующие условия:*

1. $F(X) > 0 \quad \forall X > 0;$

2. $F(X) \in C^1(\operatorname{int} \mathbb{R}^m_+);$

3. $F(\lambda X) = \lambda F(X) \quad \forall \lambda > 0, X > 0;$

4. $F'(X) > 0 \quad \forall X > 0;$

5. $F(X)$ *строго квазивогнута;*

6. $\forall Y > 0 \ \exists$ *хотя бы одно оптимальное на* $\operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$ *решение*

$$\frac{\langle X, Y \rangle}{F(X)} \to \inf_{X>0}$$

Критерий рационализируемости – II

Утверждение 1.

Пусть $P(X) \in C^1(\mathbb{R}_+^m)$. *Обозначим* $M = \{1, \dots, m\}$.

$P(X)$ *рационализируемы в* U_m *тогда и только тогда, когда:*

1. $P(X) > 0 \quad \forall X > 0;$
2. $\forall i, j \in N, \quad \forall \lambda > 0, \ \forall X > 0 \qquad \dfrac{P_i(\lambda X)}{P_j(\lambda X)} = \dfrac{P_i(X)}{P_j(X)};$
3. $\forall X_1, X_2 > 0: \ X_1 \neq \lambda X_2$ *ни при каких* $\lambda > 0$

$$\langle P(X_1), X_2 \rangle \langle P(X_2), X_1 \rangle > \langle P(X_1), X_1 \rangle \langle P(X_2), X_2 \rangle;$$

4. $\forall$ *различных* $i, j, k \in M \quad \forall X > 0$

$$P_i(X)\left(\frac{\partial P_j}{\partial X_k}(X) - \frac{\partial P_k}{\partial X_j}(X)\right) + P_j(X)\left(\frac{\partial P_k}{\partial X_i}(X) - \frac{\partial P_i}{\partial X_k}(X)\right) + P_k(X)\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(X) - \frac{\partial P_j}{\partial X_i}(X)\right) = 0;$$

5. $\forall X \in \partial \mathbb{R}_+^m \quad (M \setminus \{i \in M \mid X_i = 0\}) \cap \{j \in M \mid P_j(X) = 0\} \neq \varnothing.$

Индекс потребления и индекс цен Теория выявленного предпочтения

Функция полезности $F(X)$ – *индекс потребления*

$$Q(P) = \inf_{X>0, F(X)>0} \left\{ \frac{<P, X>}{F(X)} \right\}$$ – *индекс цен*

$$Q(P(X))F(X) = \langle P(X), X \rangle$$

Определение. $X^1 \in \mathbb{R}_+^m$ *выявленно предпочтительнее чем* $X^2 \in \mathbb{R}_+^m$ *(обозначается* $X^1 \succ X^2$*), если и только если*

$$\langle P(X^1), X^1 \rangle \geq \langle P(X^1), X^2 \rangle, \quad X^1 \neq X^2.$$

Слабая аксиома. *Если* $X^1, X^2 \in \mathbb{R}_+^m$, $\langle P(X^1), X^1 \rangle \geq \langle P(X^1), X^2 \rangle$, $P(X^1) \neq P(X^2)$, *то* $\langle P(X^2), X^1 \rangle > \langle P(X^2), X^2 \rangle$.

Сильная аксиома и однородная сильная аксиома теории выявленного предпочтения

Определение. $X \geq 0$ *косвенно выявленно предпочтительнее, чем* $Y \geq 0$ *(обозначается* XRY*), если и только если* $\exists X^1 \geq 0, \ldots, X^k \geq 0$, *что*

$$X = X^1 \succ X^2, X^2 \succ X^3, \ldots, X^{k-1} \succ X^k = \mathrm{Y}.$$

Сильная аксиома. *Если* $X \geq 0, Y \geq 0$, $X R Y$, *то* $\langle \mathrm{P}(\mathrm{Y}), \mathrm{X} - \mathrm{Y} \rangle \geq 0$

Определение. $P(X)$ *удовлетворяют однородной сильной аксиоме теории выявленного предпочтения (ОСА), если* $\forall \{X^1, \ldots, X^T\} \in \mathbb{R}_+^m$

$$\langle P(X^1), X^2 \rangle \langle P(X^2), X^3 \rangle \ldots \langle P(X^T), X^1 \rangle \geq$$

$$\geq \langle P(X^1), X^1 \rangle \langle P(X^2), X^2 \rangle \ldots \langle P(X^T), X^T \rangle$$

Рационализируемость обратных функций спроса

Утверждение 2

Пусть $P(X) \geq 0,\ P(X) \in C(\mathbb{R}_+^m),\ \langle P(X), X \rangle > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$

Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. $P(X)$ *рационализируемы в классе* Φ_0.

2. $\exists$ *решение* $\lambda(X) > 0,\ \lambda(X) \in C(\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m)$ *системы*

$$\lambda(Y)\langle P(Y), X \rangle \geq \lambda(X)\langle P(X), X \rangle, \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}_+^m$$

3. $P(X)$ *удовлетворяют ОСА.*

Рационализируемость торговой статистики

$\left\{P^t, X^t\right\}_{t=0}^{T}$ – торговая статистика

$X^t = (X_1^t, \ldots, X_m^t)$ – объемы потребления товаров

$P^t = (P_1^t, \ldots, P_m^t)$ – цены на эти товары

Торговая статистика – значения обратных функций спроса в точках $X^t = (X_1^t, \ldots, X_m^t)$

Определение. *Торговая статистика называется рационализируемой, если ее можно продолжить до обратных функций спроса, рационализируемых в классе* Φ_0

Теорема Африата – Вериана

Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\exists$ *функция полезности вида* $F(X)=\min \lambda_t \langle P^t, X\rangle$ *рационализирующая торговую статистику* $\{P^t, X^t\}_{t=0}^{T}$, *т.е.*

$$X^t \in \operatorname{Argmax}\left\{ F(X) \,|\, \langle P^t, X\rangle \le \langle P^t, X^t\rangle,\ X \ge 0\right\}, \quad t=\overline{0,T}$$

2) $\exists$ *решение* $(\lambda_0,\dots,\lambda_T)$ *системы линейных неравенств*

$$\lambda_\tau \langle P^\tau, X^t\rangle \ge \lambda_t \langle P^t, X^t\rangle, \lambda_t > 0, \quad \tau, t = \overline{0,T} \qquad (I)$$

3) $\{P^t, X^t\}_{t=0}^{T}$ *удовлетворяет однородной сильной аксиоме теории выявленного предпочтения (ОСА):* $\forall \{t_1,\dots,t_k\} \subset \{\overline{0,T}\}$

$$\langle P^{t_1}, X^{t_2}\rangle \langle P^{t_2}, X^{t_3}\rangle \dots \langle P^{t_k}, X^{t_1}\rangle \ge \langle P^{t_1}, X^{t_1}\rangle \langle P^{t_2}, X^{t_2}\rangle \dots \langle P^{t_k}, X^{t_k}\rangle$$

Непараметрический метод построения индекса Конюса-Дивизиа

Предложение 2

Пусть $F(X)=\min\limits_{\tau=\overline{0,T}} \lambda_\tau \left\langle P^\tau, X \right\rangle$, где $\lambda_0>0,\ldots,\lambda_T>0$ удовлетворяют (I), а

$$Q(P)=\inf\left\{\frac{\left\langle P,Y\right\rangle}{F(Y)}\ \middle|\ Y\geq 0, F(Y)>0\right\}$$

Тогда

$$Q(P^t)=1/\lambda_t \qquad F(X^t)=\lambda_t\left\langle P^t, X^t\right\rangle$$

Такой метод вычисления индексов называется **непараметрическим методом**.

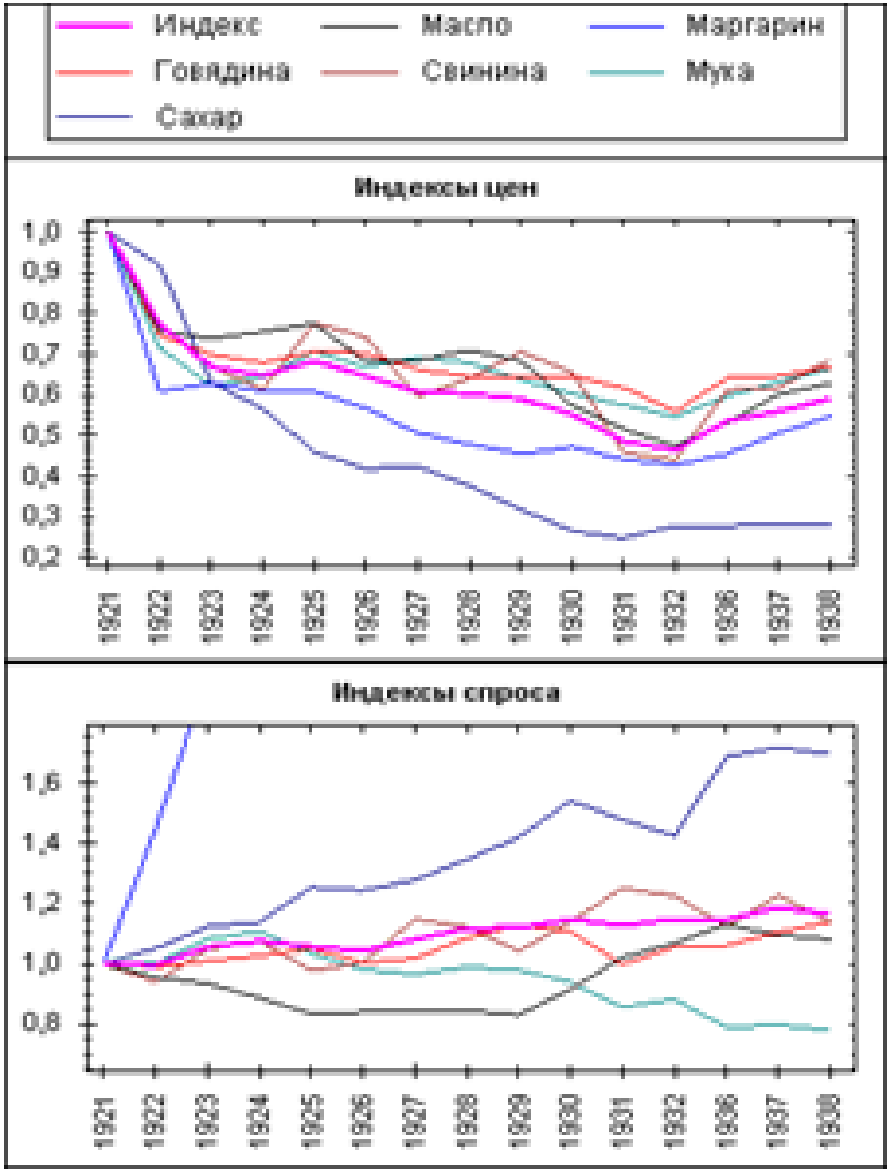
Шведская статистика 1921-1938 гг.

• Колебания индекса Конюса-Дивизиа сглажены по сравнению с исходными данными;

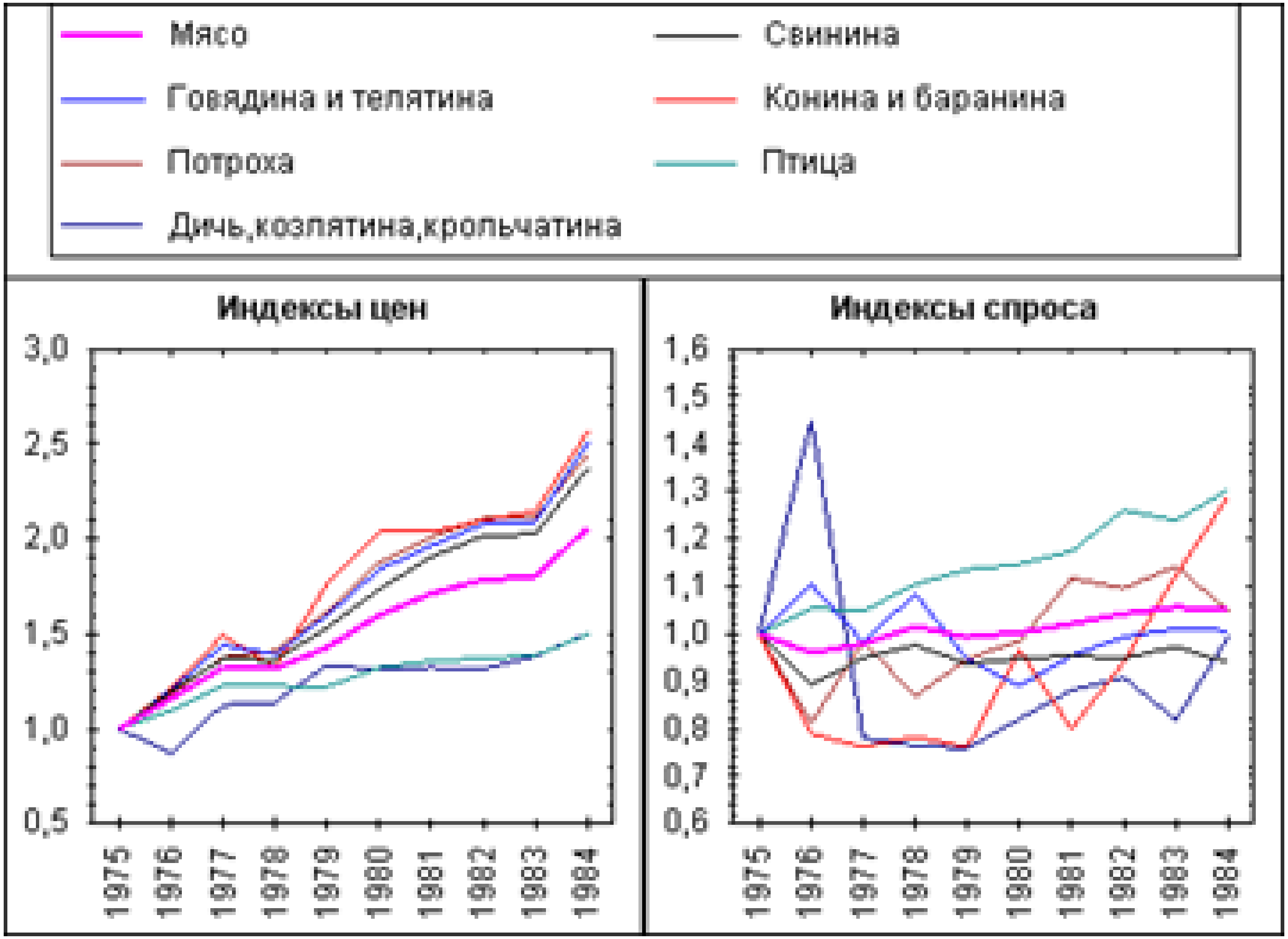
• 1933-1935: нарушение условий рационализируемости;

• Последствия Великой Экономической Депрессии: появление новых потребностей и товаров (холодильники);

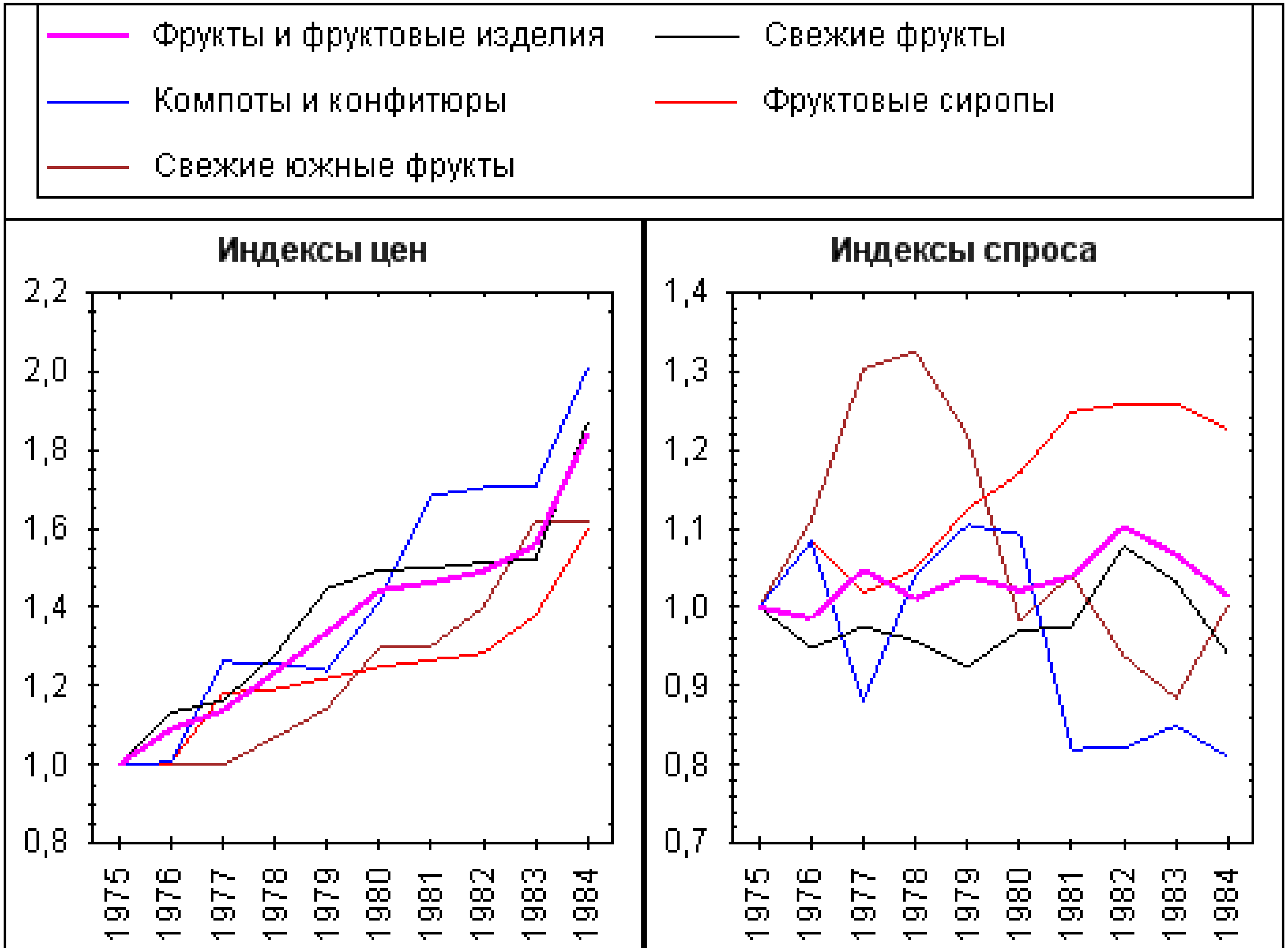
• Связь системных перестроек экономики и нарушения условий рационализируемости выявлена непараметрическим методом.



Индексы цен и потребления. Пример: Венгрия 1975-1984.



Индексы цен и потребления. Пример: Венгрия 1975-1984.



Венгрия: классификация товаров

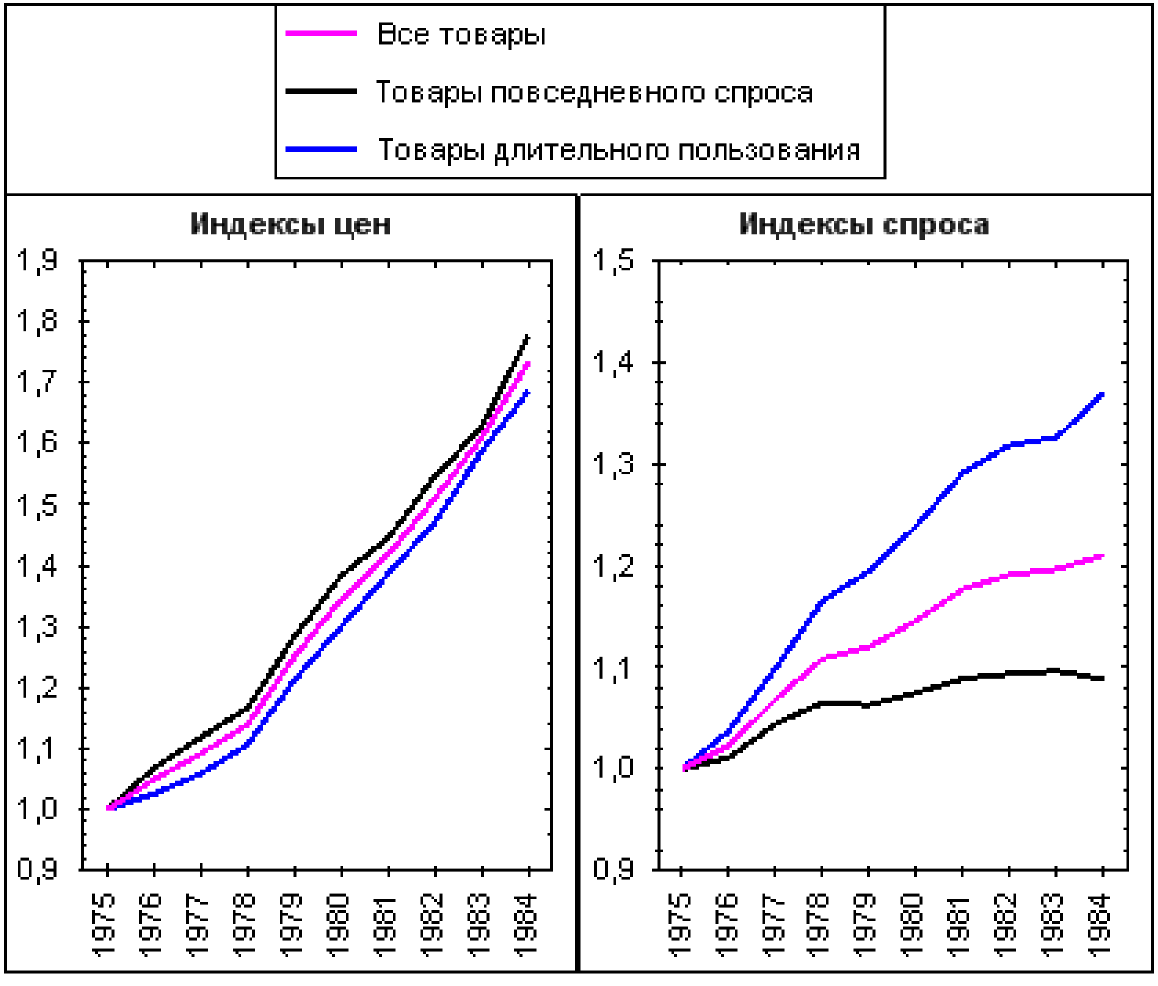
Номер	Группа	Кол-во товаров
1	Продовольственные товары	49
2	Напитки	15
3	Табачные изделия	3
4	Одежда	31
5	Жилищное обслуживание	5
6	Отопление, энергия в быту	12
7	Бытовое оснащение	30
8	Здравоохранение, гигиена	7
9	Транспорт, информация	11
10	Образование, культура, спорт, отдых	23
11	Прочие статьи потребления	10

Товарные группы различаются длительностью службы товаров. Первые три класса – товары повседневного спроса – имеют время потребления месяц, «Одежда» – около года, оставшиеся классы – 5-10 лет (товары и услуги длительного пользования).

Изменение структуры потребления

- Появление рыночных отношений на потребительском рынке;

- Сдвиг потребления в пользу товаров длительного пользования;



Дерево экономических индексов.

Сегментация рынков.

$$\mathbf{X} = (\chi_1, \ldots, \chi_k, \varsigma) \geq 0$$

$$\chi_i = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_{k_i}}) : \exists\ F_i(\chi_i) \in \Phi_0$$

$\varsigma = (X_{j_1}, \ldots, X_{j_z})$ – все остальные товары

$$\mathbf{F(X)} = \mathbf{F}\big(F_1(\chi_1), \ldots, F_k(\chi_k), \varsigma\big)$$

$$// \ F_i(\chi_i) = F_i\big(F_{i1}(\chi_{i1}), \ldots, F_{il}(\chi_{il}), \varsigma_i\big)$$

- Все товары
  - Товары повседневного спроса
    - Прод товары
      - Фрукты и фруктовые изделия
      - Мясо
    - Напитки
  - Товары длительного пользования

Статистика Венгрии. Отделимость

- Классификация, используемая товароведами, оказалась неадекватной;
- Процессам, которые происходили в стране, соответствует другая классификация, основанная на характерном времени потребления;

- Группа товаров "Одежда" не удовлетворяет ОСА, но удовлетворяет ОСА, если добавить еще один агрегированный товар "Продукты питания".

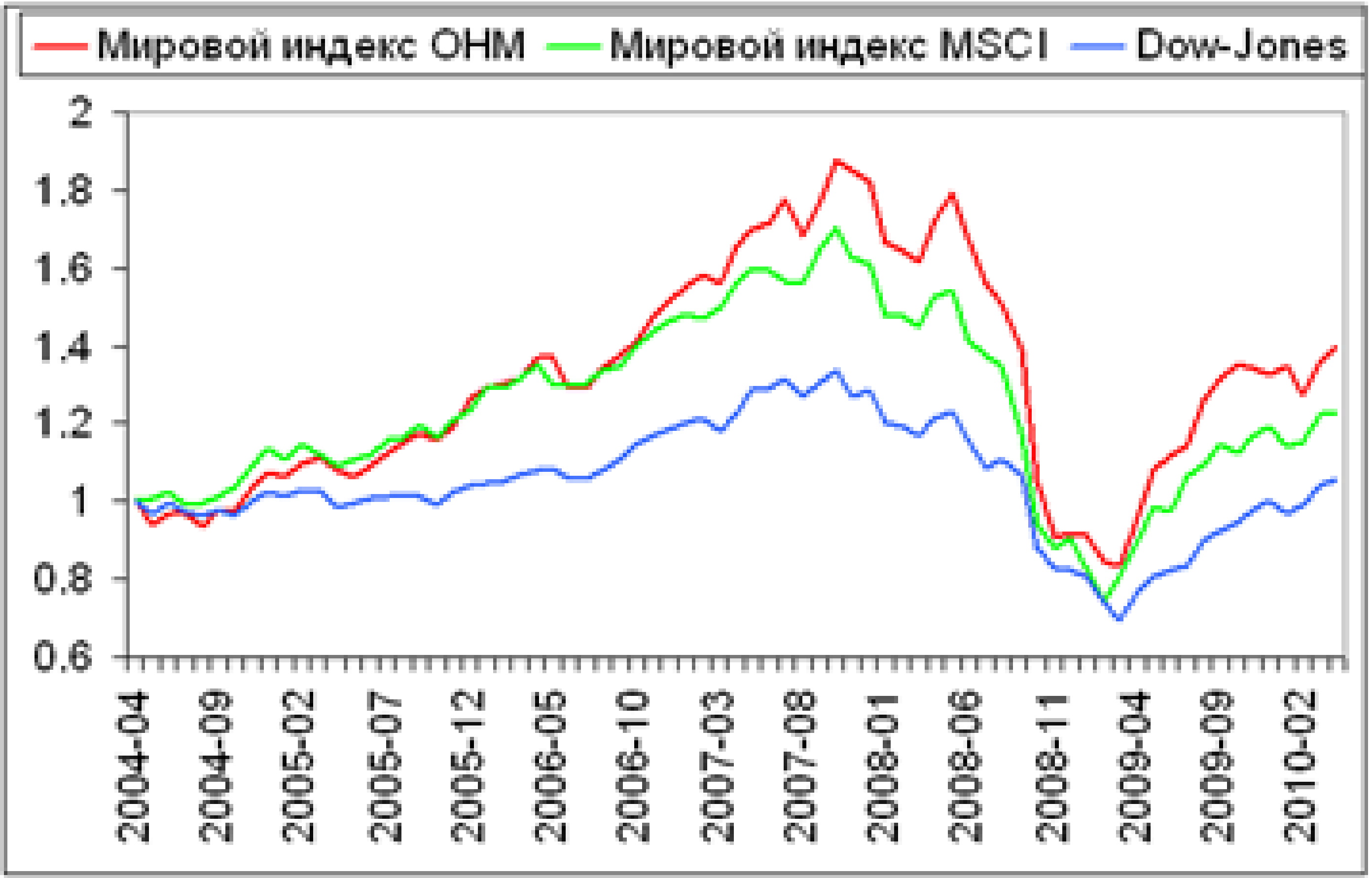
Статистика фондового рынка

- P_t - цены акций, X_t - объемы торгов в штуках
- 21 крупнейшая мировая биржа:
  - Нью-Йорксая фондовая биржа, Лондонская фондовая биржа,
  - Фондовая биржа Токио,
  - Фондовая биржа Франкфурта,
  - Фондовая биржа Гонконга,
  - Фондовая биржа Шанхая...

Проблемы:

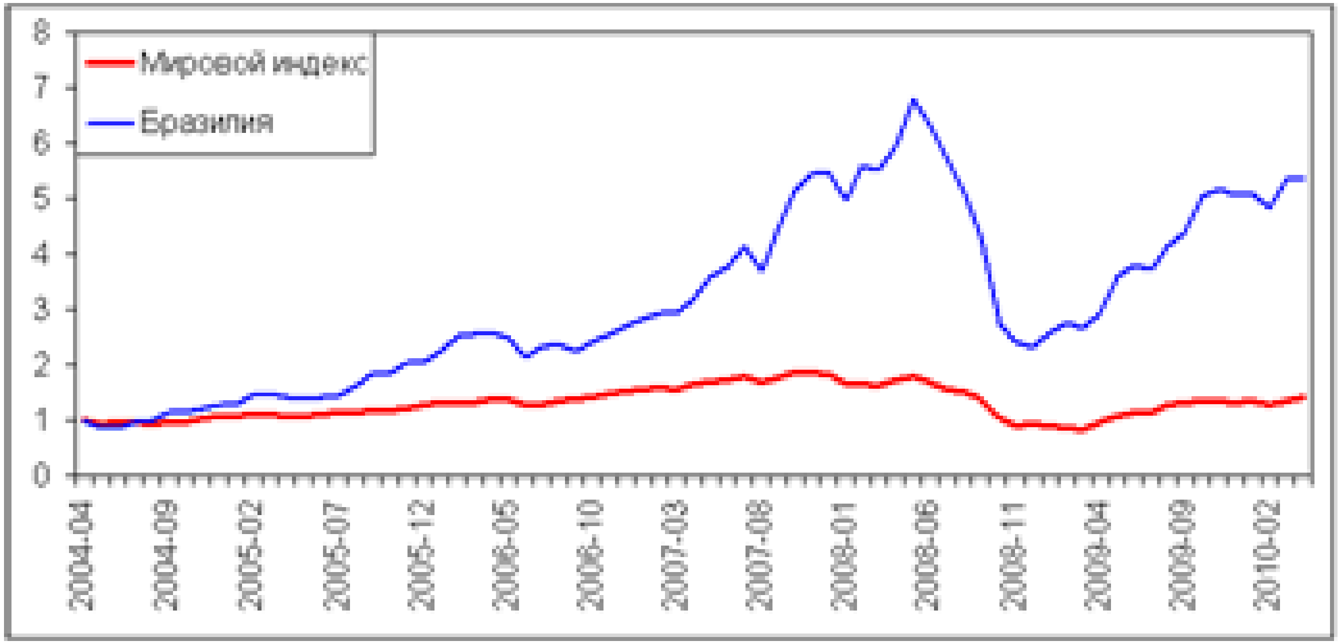
- Разное число перепродаж крупных пакетов акций, различная активность спекулянтов влияет на рационализируемость;
- Биржи торгуются в разных валютах.

Мировой индекс



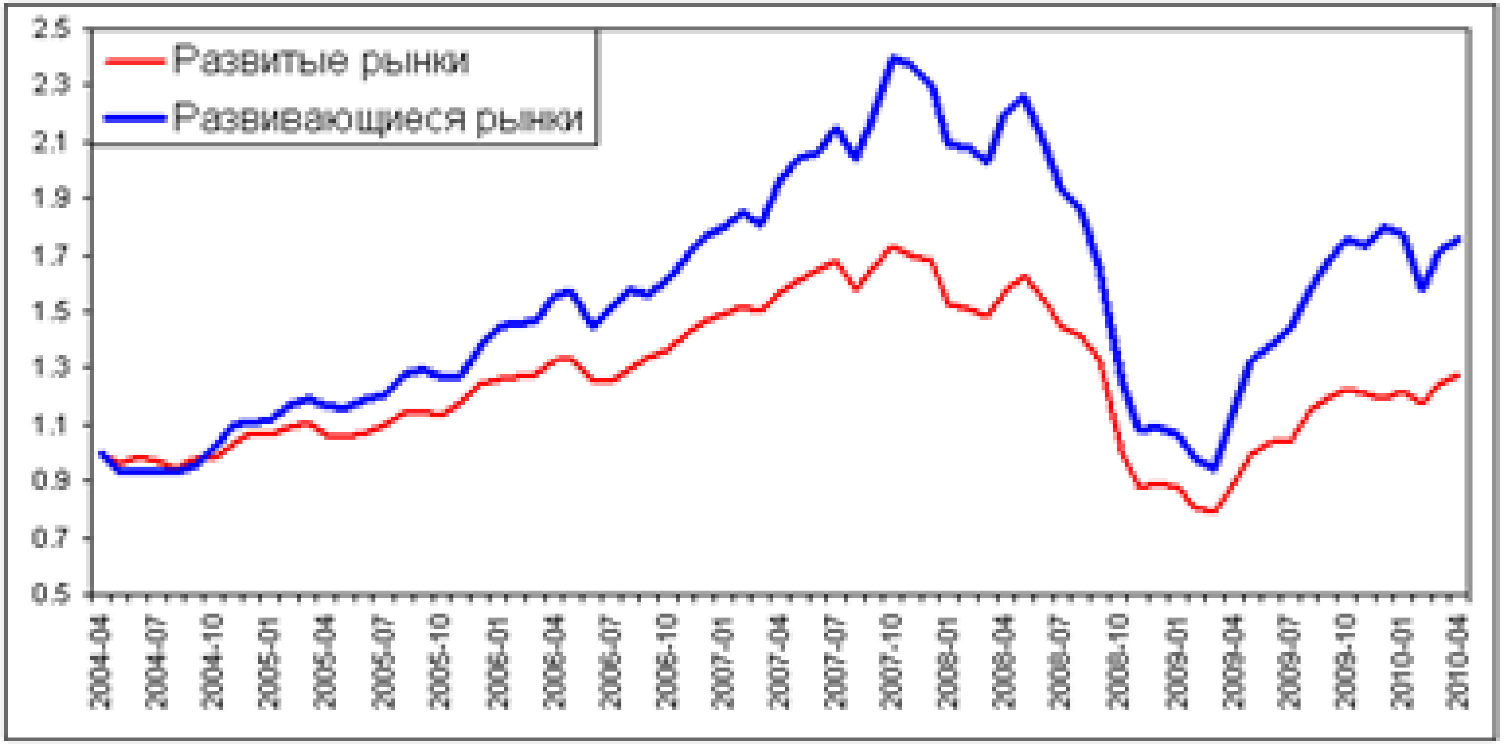
Бразилия

Бразильский рынок обладает очень высокой волатильностью. Например, по сравнению с мировым индексом.



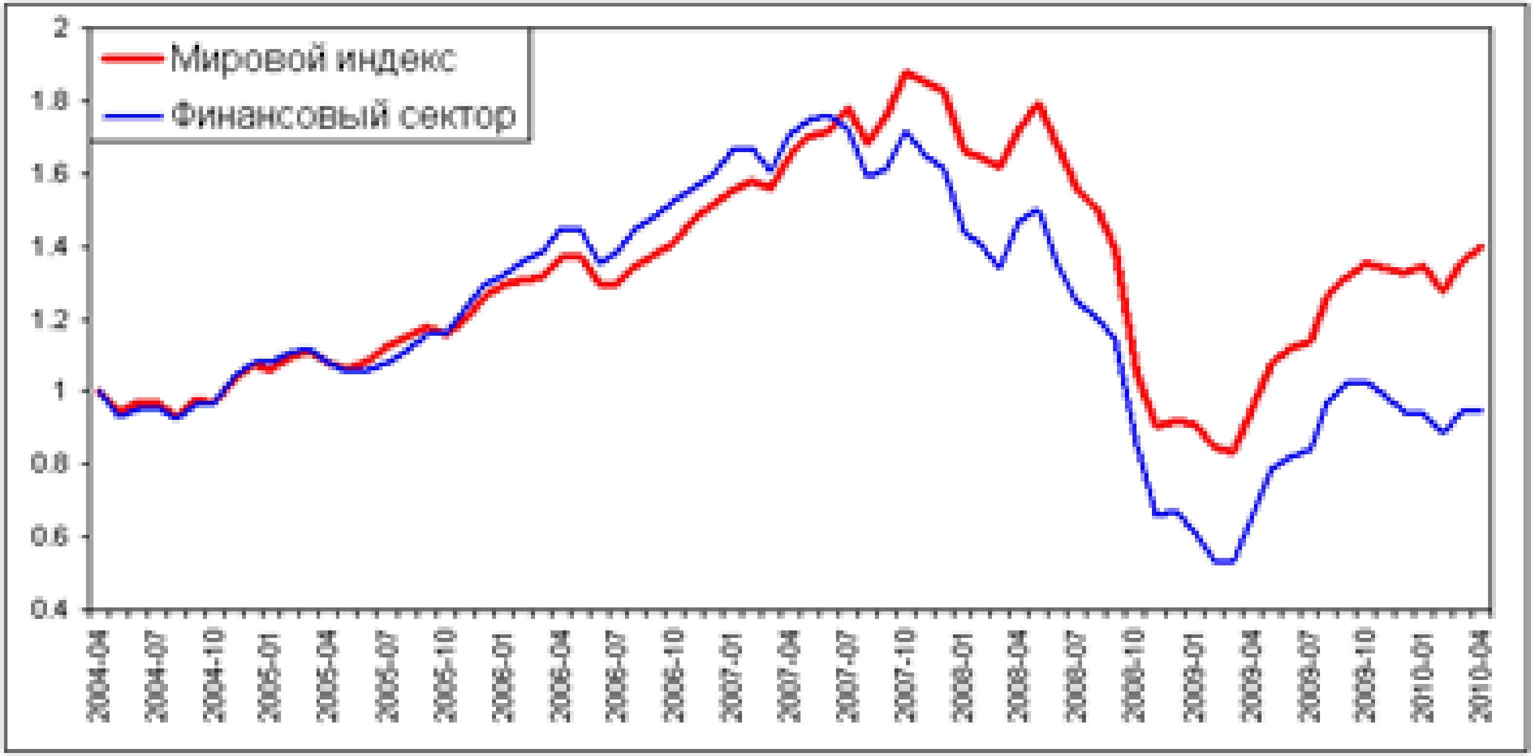
Развитые и развивающиеся рынки

В целом развивающиеся рынки более волатильны.



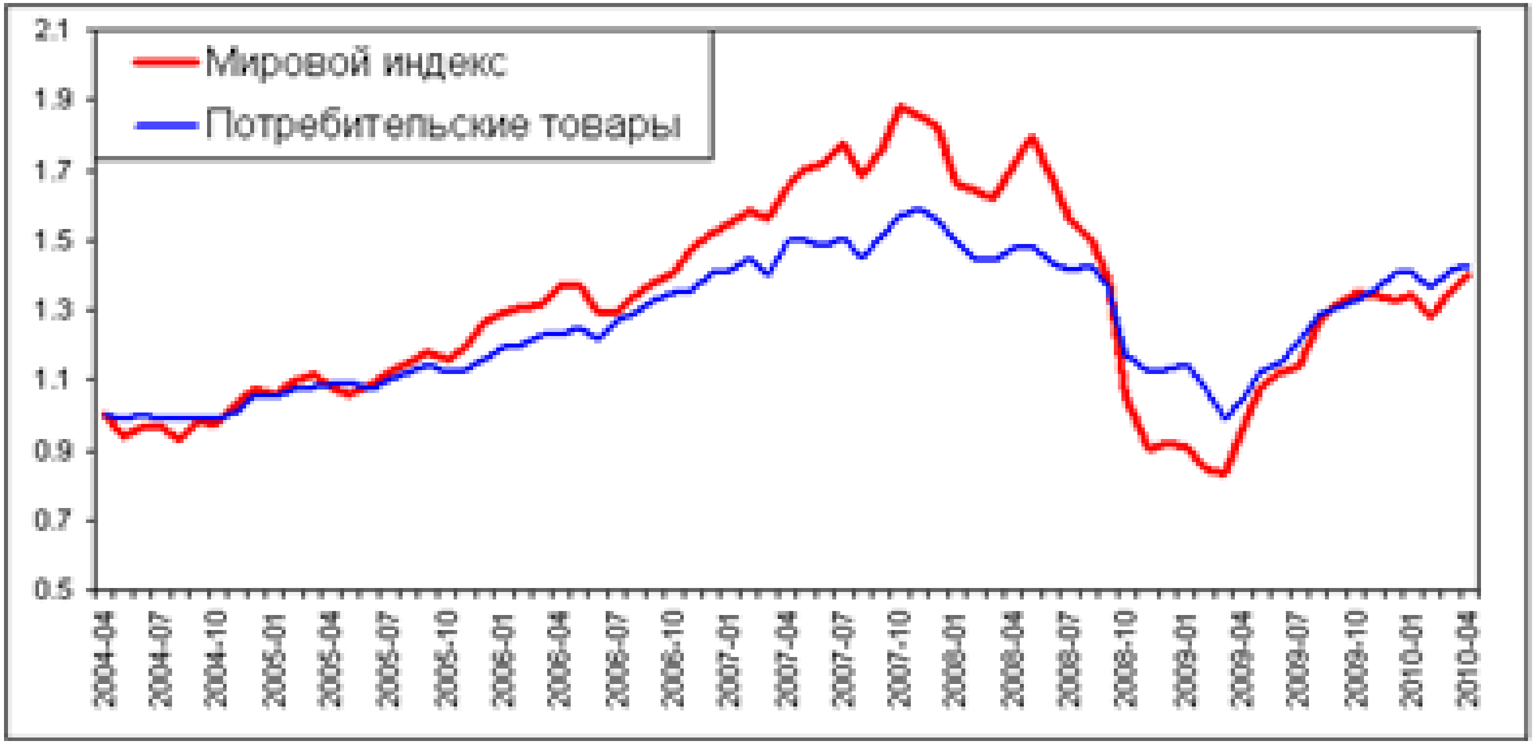
Финансовый сектор

ОНМ позволяет строить индексы по отраслям. Анализ показал, что наиболее сильно от кризиса 2008 года пострадал финансовый сектор.



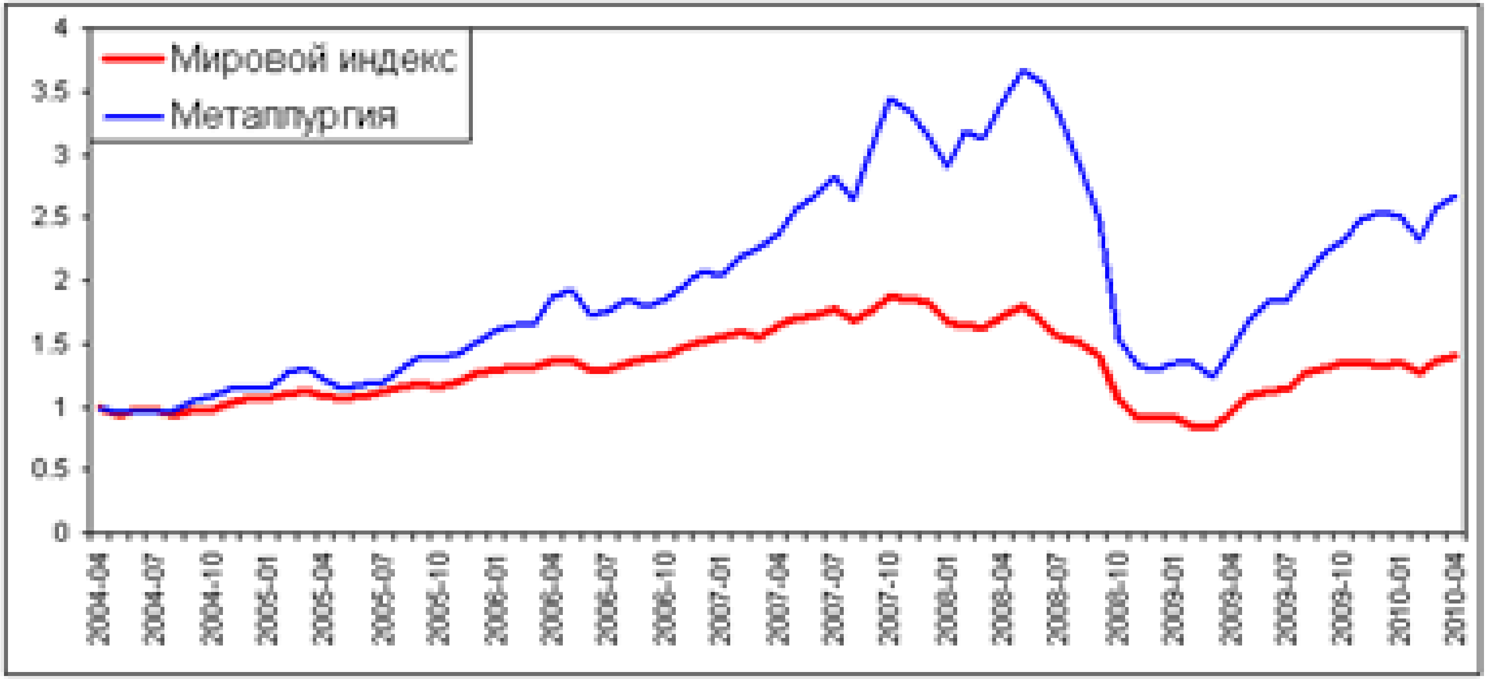
Компании-производители потребительских товаров

Компании-производители потребительских товаров оказали стабилизирующее влияние на рынок.



Металлургия

Металлургические компании продемонстрировали наибольший рост перед кризисом.



Нарушение условий интегрируемости

$$F(X) = \left(F_1(X), \ldots, F_k(X)\right);\ Q(p) = \left(Q_1(p), \ldots, Q_k(p)\right)$$

$$\forall X \geq 0, p \geq 0 \qquad \sum_{j=1}^{k} Q_j(p) F_j(X) \leq pX;$$

$$\forall X \geq 0 \qquad \sum_{j=1}^{k} Q_j\left(P(X)\right) F_j(X) = P(X) X;$$

Нарушение условий интегрируемости

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j\left(P(X)\right)\frac{\partial F_j(X)}{\partial X_i} = P_i(X) \quad (i = 1,\ldots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(X)\,dX_i = \sum_{j=1}^{k} Q_j\left(P(X)\right)dF_j(X)$$

Агрегированные обратные функции спроса

$$R(F) = (R_1(F), \dots, R_k(F))$$

$$\forall X \geq 0 \qquad Q(P(X)) = R(F(X))$$

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(X)\,dF_i(X) = \sum_{j=1}^{k} R_j(F(X))\,dF_j(X)$$

Класс дифференциальной формы

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} P_i(X)\, dX_i$$

$$\omega_1 = \alpha, \omega_2 = d\alpha, \omega_3 = \alpha \wedge d\alpha, \dots, \omega_{2k} = (d\alpha)^k, \omega_{2k+1} = \alpha \wedge (d\alpha)^k, \dots$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} P_i(X)\, dX_i = 0, \\ \sum_{j=1}^{m} \left(\dfrac{\partial P_i(X)}{\partial X_j} - \dfrac{\partial P_j(X)}{\partial X_i} \right) dX_j = 0 \, (i = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

Закон Хикса

$$\forall \left(v_1, \ldots, v_m\right) \neq 0, \textit{ такого что} \sum_{i=1}^{m} P_i\left(X\right) v_i = 0,$$

$$\textit{справедливо неравенство} \quad \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial P_i\left(X\right)}{\partial X_j} v_i v_j < 0.$$

Определение класса функций

$F(X) \in A_m$ *в точке* X^0, *если* $\exists$ *окрестность* $U(X^0)$ *точки* X^0, *такая что*

1. $F(X^0) > 0$,

2. $F(X) \in C^2(U(X^0))$,

3. $\forall \lambda > 0, X \in U(X^0)$, *таких что* $\lambda X \in U(X^0)$ *справедливо* $F(\lambda X) = \lambda F(X)$,

4. $\dfrac{\partial F(X^0)}{\partial X_i} > 0$,

5. $\forall (v_1, \dots, v_m) \neq 0$ *такого, что* $\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial F(X^0)}{\partial X_i} v_i = 0$,

справедливо неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 F(X^0)}{\partial X_i \partial X_j} v_i v_j < 0$.

Теорема А

Предположим, что класс α *в окрестности* X^0 *равен k,*
функции $P(X)$ *n раз непрерывно дифференцируемы* $(n \geq 3)$
и удовлетворяют закону Хикса. Тогда существуют функции
$F(X) = (F_1(X), \ldots, F_k(X))$ *из класса* A_m *в окрестности* X^0 *такие, что*

1. *в окрестности* X^0 *выполняется* $\alpha = \sum_{j=1}^{m} R_j(F(X))\, dF_j(X)$,

2. *агрегированные обратные функции спроса* $R(F)$ $(n-2)$ *раза непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $F(X^0)$, $R(F(X^0)) > 0$, *удовлетворяют закону Хикса и условиям отделимости*

$$\left(\forall \lambda > 0,\ F \text{ и } \lambda F \text{ из окрестности } F(X^0) \text{ справедливо } \frac{R_i(\lambda F)}{R_j(\lambda F)} = \frac{R_i(F)}{R_j(F)}\ (i, j = 1, \ldots, m) \right).$$

Следствие

Пусть $R(F)$ *функции, построенные в теореме и* $P(Y(p)) \equiv p$.

Положим $Q(p) = R(F(Y(p)))$.

Тогда существует окрестность U *точки* $P(X^0)$, *в которой* $Q(p)$ *положительны, непрерывно дифференцируемы и* $Q(\lambda p) = \lambda Q(p)$ *для* $\lambda > 0$, $p \in U$, $\lambda p \in U$.

Теорема В

Пусть в некоторой окрестности X^0 *класс* α *равен* ρ, *обратные функции* $P(X)$ *спроса бесконечнодифференцируемы и удовлетворяют закону Хикса. Тогда в некоторой окрестности* $P(X^0)$ *справедливо*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{s} Q_j(P(X))dF_j(X),$$

где $s = \left[\frac{\rho+1}{2}\right]$, *а функции* $Q_1(p),\ldots,Q_s(p)$ *и* $F_1(X),\ldots,F_s(X)$ *принадлежат классу* A_m *в окрестности точек* $P(X^0)$ *и* X^0 *соответственно.*

Вариационные неравенства

$X^0 \in E$ *является решением вариационного неравенства* $(E, P(X))$, *если* $\forall X \in E$ *справедливо*

$P(X^0)X^0 \geq P(X^0)X$.

Агрегирование вариационных неравенств (с критериями теоремы В)

Пусть

1. E *выпуклое подмножество* R_+^m,

такое что если $X \in E, 0 \le Y \le X$, *то* $Y \in E$;

2. X^0 *решение вариационного неравенства* $(E, P(X))$;

3. $Q_1(p), \ldots, Q_s(p)$ *и* $F_1(X), \ldots, F_s(X)$ *функции,*

построенные в теореме B *и определённые в* R_+^m,

4. $Q(P(X^0)) > 0$;

5. $\Gamma = \{Z \in R_+^s \mid \exists X \in E : Z \le F(X)\}$.

Тогда $F(X^0)$ *оптимальная по Парето точка* Γ.

Агрегирование вариационных неравенств (с критериями теоремы А)

Пусть

1. E *выпуклое подмножество* R_+^m,
такое что если $X \in E, 0 \le Y \le X$, *то* $Y \in E$;

2. X^0 *решение вариационного неравенства* $\left(E, P(X)\right)$;

3. $F_1(X), \ldots, F_k(X)$ *функции*,
построенные в теореме А и определённые в R_+^m,

4. $R\left(F\left(X^0\right)\right)$ *агрегированные обратные функции спроса*,
удовлетворяющие закону Хикса, условиям отделимости и
$R\left(F\left(X^0\right)\right) > 0$;

5. $\Gamma = \left\{Z \in R_+^k \middle| \exists X \in E : Z \le F(X)\right\}$.

Тогда $F\left(X^0\right)$ *оптимальная по Парето точка* Γ.

Неоклассическая модель потребительского поведения

M *– количество социальных групп*

$u_\alpha(X) \in U_m, \ \alpha = \overline{1, M}$ *– функции полезности этих групп*

$\varphi_\alpha(P)$ *– доходы групп,* $I(P) = \sum_{\alpha=1}^{M} \varphi_\alpha(P)$

Утверждение 3. *Пусть* $X^\alpha(P) = (X_1^\alpha(P), \ldots, X_m^\alpha(P))$

$$X_i^\alpha(P) = \operatorname{Arg\,max}\left(u_\alpha(X) : \langle P, X \rangle \le \varphi_\alpha(P), X \ge 0\right)$$

Тогда

$$X_i^\alpha(P) = \frac{\varphi_\alpha(P)}{q_\alpha(P)} \frac{\partial q_\alpha(P)}{\partial P_i} \left(i = \overline{1, m}\right)$$

где $q_\alpha(P) = \inf\limits_{\{X \ge 0 | u_\alpha(X) > 0\}} \dfrac{\langle P, X \rangle}{u_\alpha(X)}$ *– индекс цены с точки зрения группы* α

Интегрируемость и распределение доходов

$$X(P) = \sum_{\alpha} X^{\alpha}(P)$$

$$\omega = \sum_{i} X_i(P)\, dP_i = \sum_{\alpha=1}^{M} \frac{\varphi_{\alpha}(P)}{q_{\alpha}(P)}\, dq_{\alpha}(P)$$

Утверждение 4. *Если* $\omega = F(X(P))dQ(P)$, *где* $F(X) \in U_m, Q(P) \in U_m$

$$Q(P) = \inf_{\{X \geq 0 | F(X) > 0\}} \frac{\langle P, X \rangle}{F(X)},$$

то существует $\Phi(q) \in U_M$, *такая что* $Q(P) = \Phi(q(P))$

$$\varphi_{\alpha}(P) = I(P)\frac{q_{\alpha}(P)}{\Phi(q(P))} \frac{\partial \Phi(q(P))}{\partial q_{\alpha}}.$$

Функция общественного благосостояния Бергсона

$$W\left(u_1,\dots,u_M\right)=\inf_{\left\{q\geq 0\,\middle|\,\Phi(q)>0\right\}}\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{M}q_\alpha u_\alpha}{\Phi(q)}$$

Связь функции благосостояния Бергсона с индексом продукта

Утверждение 5. *Пусть* $\Phi(q) \in U_M$, $\varphi_\alpha(P) = I(P)\psi_\alpha(q(P))$, *где*

$$\psi_\alpha(P) = \frac{q_\alpha(P)}{\Phi(q)} \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_\alpha}, \ \ \alpha = \overline{1, M}.$$

Тогда индекс продукта $F(X)$ *не меньше, чем оптимальное значение функционала в задаче*

$$\begin{cases} W\left(u_1(X^1), \ldots, u_M(X^M)\right) \to \max, \\ X^1 + \ldots + X^M = X, \ \ X^\alpha \geq 0 \ \ (\alpha = \overline{1, M}) \end{cases} \qquad (\#)$$

Если $X_i = \sum_\alpha \frac{\psi_\alpha(q)}{q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ *и* $X^1(X), \ldots, X^M(X)$ *- решение (#), то*

$$F(X) = W(u_1(X^1(X)), \ldots, u_M(X^M(X))) \ \ \text{и} \ \ u_\alpha = \frac{1}{\Phi(q)} \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} = \frac{\psi_\alpha(q)}{q_\alpha}, \ q_\alpha = \Phi(q) \frac{\partial W(u(q))}{\partial u_\alpha}$$

$$\gamma = \sum_{\alpha=1}^{M} u_\alpha(q) dq_\alpha = W(u(q)) d\Phi(q), \ \varepsilon = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha(u) du_\alpha = \Phi(q(u)) dW(u)$$

Нарушение условий интегрируемости и социальная структура общества

$$\gamma = \sum_{\alpha=1}^{M} u_\alpha(q)dq_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\kappa} W_\beta(u(q))dV_\beta(q),$$

$$u_\alpha(q) = \sum_{\beta=1}^{\kappa} W_\beta(u(q))\frac{\partial V_\beta(q)}{\partial q_\alpha}$$

$$\varepsilon = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha(u)du_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\kappa} V_\beta(q(u))dW_\beta(u)$$

$$q_\alpha(u) = \sum_{\beta=1}^{\kappa} V_\beta(q)\frac{\partial W_\beta(u(q))}{\partial u_\alpha}$$

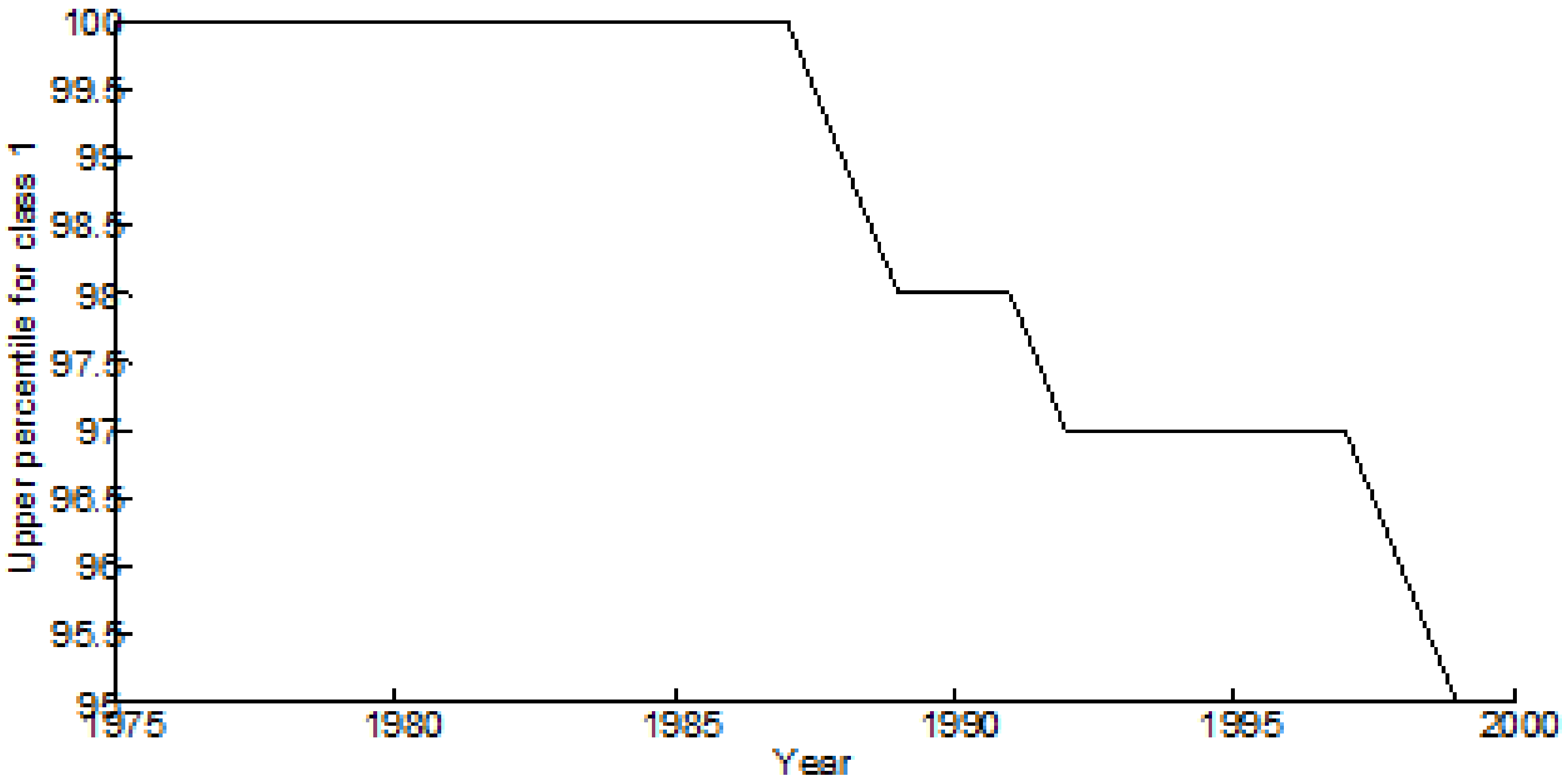
Описание данных (расчёты Н.Н.Клемашева)

- Бюджетная статистика расходов домашних хозяйств в Великобритании за 1975 – 1999 годы;
- Номенклатура содержит 68 товарных групп;
- Отчеты от 6441 до 7525 домашних хозяйств;
- Источник информации о расходах и ценах – дополнительные материалы к статье Blundell R., Browning M., Crawford I. (Econometrica, 2008).

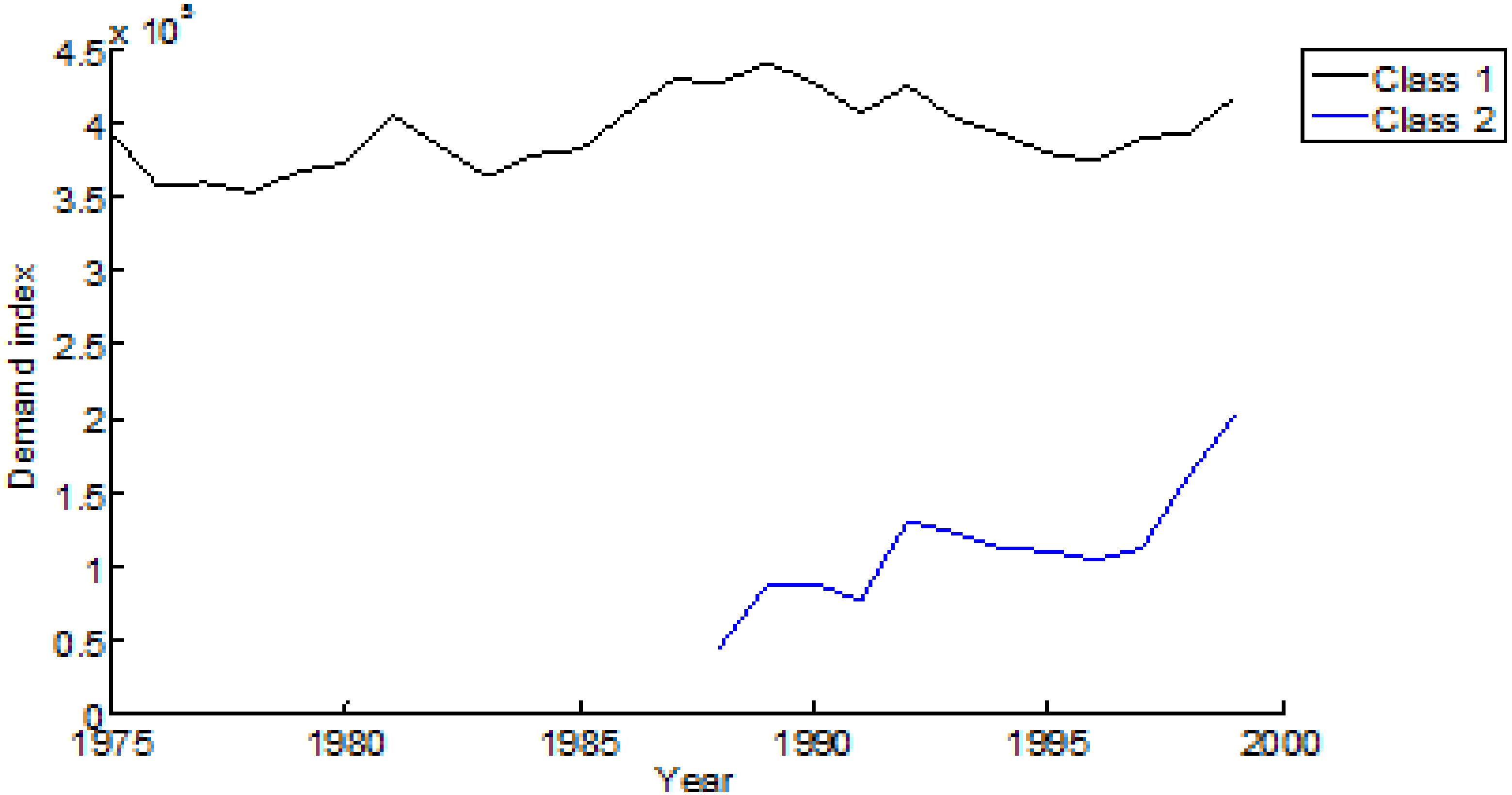
Пример – товарные группы

- Продукты питания (30 видов товаров)
- Одежда и обувь (5 видов товаров)
- Жильё и связь (16 видов товаров и услуг)
- Транспорт и развлечения (13 видов товаров и услуг)

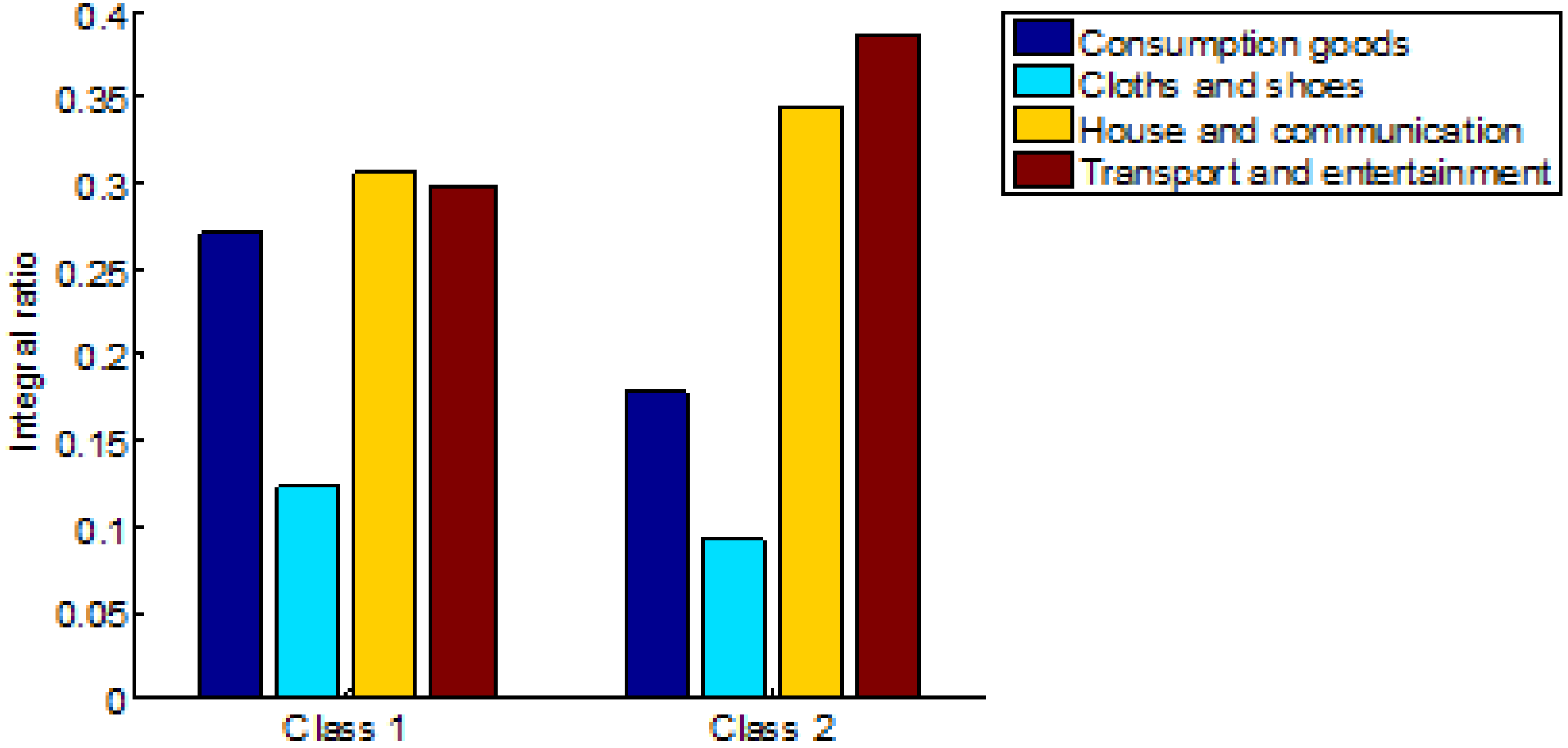
Пример – два класса



Пример – индексы потребления классов



Пример – структура потребления



Пример – структура потребления

Товарные группы	Класс 1	Класс 2
Продукты питания	0.2712	0.17835
Одежда и обувь	0.12304	0.092714
Жильё и связь	0.3067	0.34348
Транспорт и развлечения	0.29906	0.38546

Модель Хаутеккера-Йохансена

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ -технология;
- $\mu(dx)$ -неотрицательная мера, задающая распределение мощностей по технологиям;
- $l = (l_1, \ldots, l_n)$ - вектор производственных затрат текущего пользования;
- $u(x)$ - коэффициент загрузки мощности;
- $F(l)$ - производственная функция, т.е. зависимость выпуска от затрат производственных факторов.

Задача распределения ресурсов в модели Хаутеккера - Йохансена

$$
(2)\begin{cases}
\int\limits_{R_+^n} u(x)\,\mu(dx) \to \max \\
\int\limits_{R_+^n} xu(x)\,\mu(dx) \le l, \\
0 \le u(x) \le 1.
\end{cases}
$$

Обобщённая лемма Неймана - Пирсона

- Если $\boldsymbol{l} \geq \mathbf{O}$, то задача (2) имеет решение.
- Если $u_0(x)$ решение задачи (2), то существуют неравные нулю одновременно множители Лагранжа $p_0 \geq 0, p = (p_1, ..., p_n) \geq 0$ такие, что

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ } \textit{для почти всех по мере } \mu(\bullet) \text{ } x \textit{ таких, что } p_0 < px; \\ 1 \text{ } \textit{для почти всех по мере } \mu(\bullet) \text{ } x \textit{ таких, что } p_0 > px; \end{cases}$$

$$p_j \left(l_j - \int\limits_{R_+^n} x_j u_0(x) \mu(dx) \right) = 0 \quad (j = 1, ..., n).$$

- Если $p_0 > 0, p = (p_1, ..., p_n) \geq 0, l = \int\limits_{R_+^n} x\theta(x)\mu(dx)$, то

$u(x) = \theta(p_0 - px)$ является решением задачи (2).

Двойственность производственной функции и функции прибыли

- Функция прибыли

$$\Pi\left(p, p_0\right) = \int\limits_{R_+^n} \left(p_0 - px\right)_+ \mu\left(dx\right), \qquad (3)$$

- Производственная функция $F\left(l\right)$ является вогнутой, монотонно

, неубывающей, непрерывной на R_+^n.

$$\Pi\left(p, p_0\right) = \sup_{l \ge 0}\left(p_0 F\left(l\right) - pl\right),$$

$$F\left(l\right) = \frac{1}{p_0} \inf_{p \ge 0}\left(\Pi\left(p, p_0\right) + pl\right).$$

Агрегирование

- $F_0\left(X^0\right)$ положительно однородная, вогнутая, положительная, непрерывная на R_+^n функция полезности;
- $q_0\left(p\right)$ индекс цен.

$$q_0\left(p\right)=\inf_{\left\{X^0\geq 0\middle|F_0\left(X^0\right)>0\right\}}\frac{pX^0}{F_0\left(X^0\right)},$$

$$F_0\left(X^0\right)=\inf_{\left\{p\geq 0\middle|q_0\left(p\right)>0\right\}}\frac{pX^0}{q_0\left(p\right)}.$$

- $X^j=\left(X_1^j,...,X_m^j\right)$ - поставки в j отрасль продукции других отраслей,
- $l^j=\left(l_1^j,...,l_n^j\right)$ - поставки в j отрасль первичных ресурсов.
- $F_j\left(X^j,l^j\right)$ - производственная функция j отрасли.

Задача распределения ресурсов (нелинейный межотраслевой баланс)

$l = \left(l_1, \ldots, l_n \right)$ суммарные поставки первичных ресурсов.

$$
(4) \begin{cases}
F_0\left(X^0 \right) \to \max \\
F_j\left(X^j, l^j \right) \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i, \quad \left(j = 1, \ldots, m \right) \\
\sum_{j=1}^{m} l^j \leq l, \\
X^0 \geq 0, X^1 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0.
\end{cases}
$$

Равновесные рыночные механизмы

Пусть $l > 0$. Для того, чтобы набор векторов $X^0, X^1, ..., X^m, l^1, ..., l^m$, удовлетворяющий ограничениям задачи (4), являлся её решением необходимо и достаточно, чтобы существовали $p_0 > 0, p = \left(p_1, ..., p_m\right) \geq 0, s = \left(s_1, ..., s_n\right) \geq 0$ такие, что

$$X^0 \in Arg\max\left\{p_0 F_0\left(\tilde{X}\right) - p\tilde{X} \,\middle|\, \tilde{X} \geq 0\right\},$$

$$\left(X^j, l^j\right) \in Arg\max\left\{p_j F_j\left(\tilde{X}, \tilde{l}\right) - p\tilde{X} - s\tilde{l} \,\middle|\, \tilde{X} \geq 0, \tilde{l} \geq 0\right\}, \left(j = 1, ..., m\right)$$

$$p_j\left(F_j\left(X^j, l^j\right) - \sum_{i=0}^{m} X_j^i\right) = 0, \left(j = 1, ..., m\right)$$

$$s_k\left(l_k - \sum_{j=1}^{m} l_k^j\right) = 0\left(j = 1, ..., m\right).$$

Агрегированное макро описание

$$\Pi_j(s,p) = \sup_{\tilde{X}\geq 0, \tilde{l}\geq 0}\left(p_j F_j\left(\tilde{X},\tilde{l}\right) - p\tilde{X} - s\tilde{l}\right)$$ функция прибыли j отрасли.

$F^A(l)$ - агрегированная производственная функция.

Вариационный принцип (двойственная задача)

$$\Pi^A(s,p_0) = \min\left\{\sum_{j=1}^{m}\Pi_j(s,p)\middle| p\geq 0, s\geq 0, q_0(p)\geq p_0\right\}.$$

$\Pi^A(s,p_0)$ - агрегированная функция прибыли.

Постановка обратной задачи

$$\Pi^A(s, p_0) = \sup_{l \geq 0}\left(p_0 F^A(l) - sl\right),$$

$$F^A(l) = \frac{1}{p_0}\inf_{s \geq 0}\left(\Pi^A(s, p_0) + sl\right).$$

Найти неотрицательную меру $\mu_A(\bullet)$ с носителем в R_+^n, такую, что

$$\Pi^A(s, p_0) = \int_{R_+^n} (p_0 - sx)_+ \, \mu_A(dx).$$

Связь с задачами интегральной геометрии

$$\frac{\partial^2 \Pi^A(s, p_0)}{\partial p_0^2} = \int\limits_{sx=p_0} \mu_A(dx)$$

$$\int\limits_{R_+^n} e^{-sx}\mu(dx) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau} d_\tau\left(\frac{\partial \Pi^A(s,\tau)}{\partial \tau}\right)$$

Теорема единственности (Г.М.Хенкин, А.А.Шананин)**.**

Пусть заряд $\mu(\bullet)$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{R_+^n} e^{-A\|x\|}|\mu|(dx) < \infty \text{ для некоторого } A > 0, \qquad (5)$$

$$\int\limits_{R_+^n} (p_0 - sx)_+ \mu(dx) = 0 \text{ для любых } p_0 > 0, s \in K,$$

где K – открытый конус в R_+^n. Тогда $\mu(\bullet) = 0$.

Теорема о характеризации (Г.М.Хенкин, А.А.Шананин)

Функция $\Pi(s, p_0)$ представима в виде

$$\Pi(s, p_0) = \int_{R_+^n} (p_0 - sx)_+ \, \mu(dx) \text{ } \textit{при} \text{ } (s, p_0) \in R_+^{n+1},$$

где $\mu(\bullet)$ неотрицательная мера с носителем в R_+^n, удовлетворяющая условию (5) тогда и только тогда, когда

1) $\Pi(s, p_0)$ положительно однородная, выпуклая функция на R_+^{n+1}, причём при фиксированном $s \in R_+^n$ мера $\partial^2 \Pi(s, \tau) / \partial \tau^2$ экспоненциально убывает при $\tau \to +\infty$;

2) функция $G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} d_\tau \left(\dfrac{\partial \Pi^A(s, \tau)}{\partial \tau} \right) \in C^\infty(R_+^n)$ и для некоторого открытого конуса $\Gamma \subset \operatorname{int} R_+^n$ и некоторого $s \in \Gamma$ при любых $\lambda > 0$,

$$\xi^1 \in \Gamma, \dots, \xi^k \in \Gamma, k = 1, 2, \dots$$

$$(-1)^k D_{\xi^1} \dots D_{\xi^k} G(\lambda s) \ge 0, \textit{ где } D_\xi = \sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial s_j} \textit{ для } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Пример 1

Пусть *n=2*, производственная функция типа CES

$$F_{CES}\left(l_1,l_2\right)=\left(\alpha_1 l_1^{-\rho}+\alpha_2 l_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}},\ \textit{где}\ \alpha_1>0,\alpha_2>0,\rho\ge -1,0<\gamma<1.$$

Тогда функция прибыли равна

$$\Pi_{CES}\left(s_1,s_2,p_0\right)=\gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\left(1-\gamma\right)p_0^{\frac{1}{1-\gamma}}\left(\alpha_1^{\frac{1}{1+\rho}}s_1^{\frac{\rho}{1+\rho}}+\alpha_2^{\frac{1}{1+\rho}}s_2^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{\gamma(1+\rho)}{\rho(1-\gamma)}}$$

При $\rho>-1$ существует распределение мощностей по технологиям, соответствующее этим функциям.

Пример 2

Пусть $m=2, n=2, F_0\left(X_1^0, X_2^0\right)=\min\left(X_1^0, X_2^0\right),$

$$\mu_1(dx)=k_0\delta(x-z), z=(z_1, z_2),$$

$$\mu_2(dx)=k_1\delta\left(x-y^1\right)+k_2\delta\left(x-y^2\right), y^j=\left(y_1^j, y_2^j\right), j=1,2,$$

$$k_1+k_2>k_0, y_1^1>y_1^2, y_2^1>y_2^2.$$

Тогда

$$\Pi^A(s,p_0)=\max\left\{(k_0-k_2)_+\left(p_0-s\left(z+y^1\right)\right)_+ +\min(k_0,k_2)\left(p_0-s\left(z+y^2\right)\right)_+,\right.$$

$$\left.\min(k_0,k_1)\left(p_0-s\left(z+y^1\right)\right)_+ +(k_0-k_2)_+\left(p_0-s\left(z+y^2\right)\right)_+\right\}.$$

Обозначим $K_1=\left\{s\in R_+^2 \middle| sy^2\le sy^1\right\}, K_2=\left\{s\in R_+^2 \middle| sy^1\le sy^2\right\}.$

Получаем $\Pi^A(s,p_0)=\max\limits_j \Pi_j(s,p_0), \Pi_j(s,p_0)=\int\limits_{R_+^n}(p_0-sx)_+\,\mu_j(dx),$

$$\Pi^A(s,p_0)=\Pi_j(s,p_0)\ \text{при}\ s\in K_j;\ R_+^n=\bigcup_j K_j,$$

$$G(s)=\max_j G_j(s), G_j(s)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\tau}d_\tau\left(\frac{\partial\Pi_j(s,\tau)}{\partial\tau}\right).$$

Теорема о стабильных соответствиях (А.В.Карзанов, А.А.Шананин)

Пусть $X = \left\{x^1, ..., x^m\right\} \subset R_+^n, Y = \left\{y^1, ..., y^m\right\} \subset R_+^n$ и C конус в R_+^n.

Определение. Биекцию $\gamma : X \to Y$ назовём С-стабильным соответствием, если для любых $x^i \in X, x^j \in X, p \in C$ из $px^i < px^j$ следует, что $p\gamma\left(x^i\right) \le p\gamma\left(x^j\right)$.

Теорема. Для того, чтобы биекция $\gamma : X \to Y$ была С-стабильным соответствием необходимо и достаточно, чтобы для любых $x^i \in X, x^j \in X$

если $x^j \ne x^i, x^j - x^i \in C^*$, то $\gamma\left(x^j\right) - \gamma\left(x^i\right) \in C^*$;

если $x^j - x^i \notin C^*, x^i - x^j \notin C^*$, то существуют такие числа $\lambda \ge 0, \mu \ge 0, \lambda + \mu > 0,$ что $\lambda\left(x^j - x^i\right) = \mu\left(\gamma\left(x^j\right) - \gamma\left(x^i\right)\right)$.

Модель отрасли с замещением производственных факторов на микро уровне

$f(u)$ положительно однородная первой степени, вогнутая, непрерывная функция на R_+^n, положительная на $\operatorname{int} R_+^n$.
Параметры технологии задаются вектором $x = (x_1, ..., x_n)$.

Производственная функция на микро уровне $f\left(\frac{u_1}{x_1}, ..., \frac{u_n}{x_n}\right)$

Примеры: леонтьевская функция с постоянными пропорциями $f(u) = \min(u_1, ..., u_n)$ соответствует производственной функции на микро уровне в модели Хаутеккера – Йохансена;
CES функция

$$f(u) = \left(u_1^{-\rho} + ... + u_n^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} = u_1 \oplus_\rho ... \oplus_\rho u_n, \rho \geq -1.$$

Задача распределения ресурсов с замещением производственных факторов на микро уровне

(6) $$\begin{cases} \int\limits_{R_+^n} \min\left(1,\, f\left(\dfrac{u_1(x)}{x_1},\ldots,\dfrac{u_n(x)}{x_n}\right)\right)\mu(dx) \to \max\limits_{u(x)} \\ \int\limits_{R_+^n} u_j(x)\mu(dx) \le l_j,\; j=1,\ldots,n; \\ u(x) = \left(u_1(x),\ldots,u_n(x)\right) \ge 0. \end{cases}$$

Положим $q(p) = \inf\limits_{\{u\ge 0 | f(u)>0\}} \dfrac{pu}{f(u)}$,

$$p\circ x = (p_1x_1,\ldots,p_nx_n),\; \pi(x,p,p_0) = \left(p_0 - q(p\circ x)\right)_+ .$$

Исследование задачи (6)

- Если $l \geq 0,$ то задача (6) имеет решение в классе вектор – функций $u(x)$ с интегрируемыми по мере $\mu(\bullet)$ компонентами.
- Для того, чтобы распределение ресурсов $u(x) = (u_1(x), ..., u_n(x))$

удовлетворяющее ограничениям в задаче (6), было её оптимальным решением необходимо, а при $l > 0$ достаточно, чтобы существовали такие не равные нулю одновременно числа $p_0 \geq 0, p = (p_1, ..., p_n) \geq 0,$ что,

$$p_j \left(l_j - \int\limits_{R_+^n} u_j(x) \mu(dx) \right) = 0 \;\; (j = 1, ..., n),$$

$u(x) = 0$ при почти всех по мере $\mu(\bullet), x \in R_+^n,$ таких, что $p_0 < q(p \circ x),$

$f(u(x)), p_0 - pu(x) = \pi(x, p, p_0)$ при почти всех по мере $\mu(\bullet), x \in R_+^n$

таких, что $p_0 > q(p \circ x).$

Двойственность производственной функции и функции прибыли в модели с замещением

производственных факторов на микро уровне

- Функция прибыли

$$\Pi\left(p, p_0\right) = \int_{R_+^n} \left(p_0 - q\left(p \circ x\right)\right)_+ \mu(dx), \qquad (7)$$

- Производственная функция $F\left(l\right)$ является вогнутой, монотонно

,

неубывающей, непрерывной на R_+^n.

$$\Pi\left(p, p_0\right) = \sup_{l \geq 0}\left(p_0 F\left(l\right) - pl\right),$$

$$F\left(l\right) = \frac{1}{p_0} \inf_{p \geq 0}\left(\Pi\left(p, p_0\right) + pl\right).$$

Пример 3

Пусть $m=2, n=2, q\left(p_1, p_2\right)=p_1^{\nu} p_2^{1-\nu}, где\, 0<\nu<1,$

$$\mu_j\left(dx\right)=x_1^{\alpha_1^j-1}x_2^{\alpha_2^j-1}, \alpha_i^j>1\left(i, j=1,2\right).$$

Тогда $\Pi_j\left(s, p_j\right)=A_j\dfrac{p_j^{\alpha_1^j+\alpha_2^j+1}}{s_1^{\alpha_1^j}s_2^{\alpha_2^j}},\ A_j>0,\ \left(j=1,2\right),$

$$\Pi^A\left(s, p_0\right)=B\frac{p_0^{\alpha_1^A+\alpha_2^A+1}}{s_1^{\alpha_1^A}s_2^{\alpha_2^A}}, B>0,$$

где $\alpha_j^A=\dfrac{\nu\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+1\right)\alpha_j^1+\left(1-\nu\right)\left(\alpha_1^1+\alpha_2^1+1\right)\alpha_j^2}{\nu\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+1\right)+\left(1-\nu\right)\left(\alpha_1^1+\alpha_2^1+1\right)}, \left(j=1,2\right).$

Всегда существует $\mu^A\left(dx\right)=bx_1^{\alpha_1^A}x_2^{\alpha_2^A}, где\ b>0.$

Характеризация преобразования (7) (А.Д.Агальцов)

Обозначим

$$c=\left(c_1,\dots,c_n\right)\in\operatorname{int}R_+^n,\ z=\left(z_1,\dots,z_n\right),\ x^{z-I}=x_1^{z_1-1}\dots x_n^{z_n-1},\ x^{-z}=x_1^{-z_1}\dots x_n^{-z_n},$$

$$\rho_q\left(z\right)=\Gamma\left(z_1\right)\dots\Gamma\left(z_n\right)\Gamma\left(z_1+\dots+z_n\right)\Bigg/\left(\int\limits_{R_+^n}x^{z-I}e^{-q(x)}dx_1\dots dx_n\right).$$

Тогда

$$G\left(s\right)=\int\limits_{R_+^n}e^{-sx}\mu\left(dx\right)=\left(2\pi i\right)^{-n}\int\limits_{c+iR_+^n}s^{-z}\rho_q\left(z\right)\left(\int\limits_{R_+^n}p^{z-I}\Pi\left(p,1\right)dp_1\dots dp_n\right)dz_1\dots dz_n.$$

Задача об оценке эластичности замещения производственных факторов на микро уровне

Исходные данные: $\left\{p^t, p_0^t, y^t \,\middle|\, t=1,...,T\right\}$, где p^t вектор цен на производственные факторы, p_0^t цена на выпускаемую продукцию, y^t объём произведённой продукции в период времени t.

Пусть $q(p) = \left(p_1^{-\rho} + ... + p_n^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}, где\ \rho \geq -1.$

Постановка задачи: найти значения ρ при которых существует неотрицательная мера $\mu(dx)$, удовлетворяющая

(8) $$\int_{R_+^n} \theta\left(p_0^t - \left(\left(p_1^t x_1\right)^{-\rho} + ... + \left(p_n^t x_n\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\right)\mu(dx) = y^t,\ \left(t = 1,...,T\right).$$

Исследование проблемы моментов (8)

Гиперповерхности $\left(\left(p_1^t x_1\right)^{-\rho} + \ldots + \left(p_n^t x_n\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} = p_0^t,\ t = 0,\ldots,T$ разбивают множество R_+^n на конечное число областей. Сопоставим каждой области V булевский вектор (спектр области) $b\left(V\right) = \left(b_1\left(V\right),\ldots,b_T\left(V\right)\right),$ где

$$b_t\left(V\right) = \begin{cases} 1, если\ p_0^t > \left(\left(p_1^t x_1\right)^{-\rho} + \ldots + \left(p_n^t x_n\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\ при\ x \in \operatorname{int} V, \\ 0, если\ p_0^t < \left(\left(p_1^t x_1\right)^{-\rho} + \ldots + \left(p_n^t x_n\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\ при\ x \in \operatorname{int} V. \end{cases}$$

Обозначим через $B\left(\left(p^1, p_0^1\right),\ldots,\left(p^T, p_0^T\right)\right)$ спектр разбиения, т.е. множество векторов $b\left(V\right),$ построенных по всевозможным областям разбиения R_+^n гиперповерхностями $p_0^t = \left(\left(p_1^t x_1\right)^{-\rho} + \ldots + \left(p_1^t x_1\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}, t = 1,\ldots,T.$

Предложение. Проблема моментов (8) разрешима тогда и только тогда, когда вектор $\left(y^1,\ldots,y^T\right)$ принадлежит выпуклой конической оболочке спектра $B\left(\left(p^1, p_0^1\right),\ldots,\left(p^T, p_0^T\right)\right).$

Ромбические тайлинги

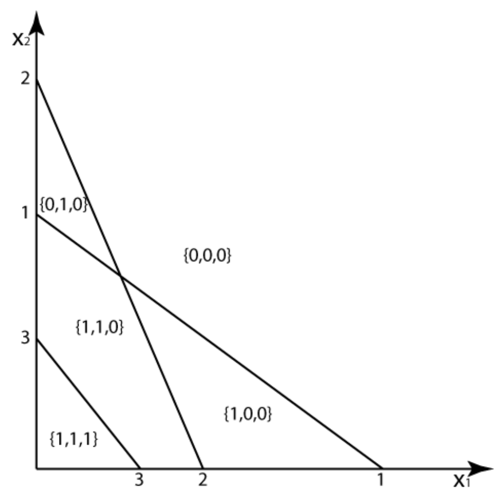
Рассмотрим случай, когда $n = 2$. Обозначим $e_t = \left(1; t - \left[\frac{T+1}{2}\right]\right), t = 1, \ldots, T$.

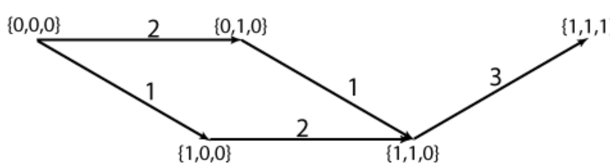
Области *V* поставим в соответствие точку $\xi(V) = \sum_{t=1}^{T} b_t(V) e_t$.

Точки, соответствующие соседним областям, соединим отрезками.

Полученная фигура будет являться ромбическим тайлингом, соответствующим разбиению.

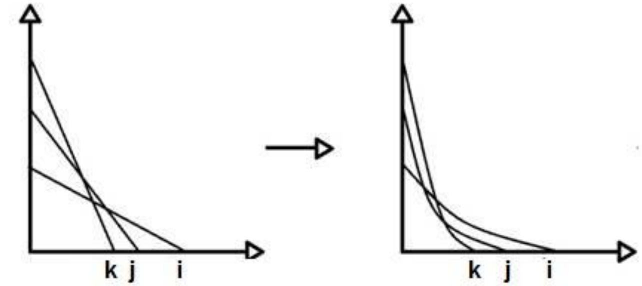
Точкам пересечения кривых разбиения соответствуют ромбы ромбического тайлинга





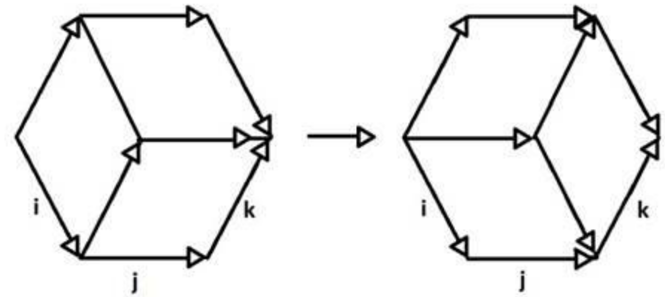
Деформации разбиений и флипы ромбических тайлингов

При изменении $\rho \in [-1; 0) \cup (0; +\infty)$ любые три кривые пересекаются в одной точке не более одного раза; при этом спектр разбиения изменяется в результате операции флипа.



Теорема (Леклерк Б., Зелевинский А.В.)

Любые два полных ромбических тайлинга можно перевести друг в друга путем последовательного применения конечного числа операций флипа.



Дополнение (Е.Г. Молчанов)

Теорема верна для ромбических тайлингов с одинаковыми верхней и нижней границей.

Литература

1. *Afriat S.N.* The construction of utility functions from expenditure data // International economic review, 1967, № 7, p. 67-77.
2. *Varian H.* Non-parametric tests of consumer behavior // The review of economic studies, 1983, v.L(1), № 160 (1), p.99-100.
3. *Шананин А.А.* Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса. // Мат. моделирование, № 9, 1993, с.3-16.
4. *Houtman M.* Nonparametric consumer and producer analysis // Dissertation № 95-32, 1995, University of Limburg, Maastricht, the Netherlands.
5. *Levin V.L.* Reduced cost function and their applications // J. of Math. Econ., 1997, v.28.
6. *Петров А.А., Шананин А.А.* Об условиях существования агрегированных функций спроса. М.:Докл. АН, 1997, Т. 356, \No2, с.170-172
7. *Поспелова Л.Я., Шананин А.А.* Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод // Мат. моделирование, № 4, 1998, с.105-116.

Литература

8. *Шананин А.А.* Агрегирование конечных продуктов и проблема интегрируемости функций спроса.// М.: ВЦ АН СССР, 1986, 66 с.
9. *Петров А.А., Шананин А.А.* Условия интегрируемости, распределение доходов и социальная структура общества. // Математическое моделирование, 1994, т.6, №8, с. 105-125.
10. *Шананин А.А.* Об агрегации функций спроса. // Экономика и математические методы, 1986, т. 25, №6, с.1095-1105.
11. *Тарасов С.П., Шананин А.А.* О гладкости функции полезности в теореме Африата - Вериана. // Докл. АН, 2003, т. 388, №1, с.19-22.
12. *Вратенков С.Д., Шананин А.А.* Анализ структуры потребительского спроса с помощью экономических индексов. // М.: ВЦ АН СССР, 1991, 62 с.
13. *Шананин А.А.* Проблема интегрируемости и обобщенный непараметрический метод анализа потребительского спроса. // Труды МФТИ, 2009, т.1, №4, с.84-98.

Литература

14. *Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Усанов Д.А., Шананин А.А.* Технологии анализа рынков на основе обобщенного непараметрического метода. // М.: ВЦ РАН, 2010, 67 с.
15. *Кондраков И.А. Шананин А.А.* Идемпотентные аналоги теорем о неотрицательных матрицах и их приложения к анализу экономической информации // Журнал вычислительной математики и математической физики 2011, том 51, № 2, с. 188–205.
16. *Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А.* Обобщенный непараметрический метод. Применение к анализу товарных рынков. // Труды МФТИ, 2010, т.2, №3, с.32-45.
17. *Кондраков И.А.* Программный комплекс анализа торговой статистики на основе обобщенного непараметрического метода "Индекс" // Системы управления и информационные технологии, 1.1(43), 2011, с. 198-203.
18. *Кондраков И.А. Поспелова Л.Я. Шананин А.А.* Программа исследования и сегментации потребительских рынков. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008615547. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 19 ноября 2008 г. Москва, реестр программ для ЭВМ, 2008, 50 с.

Литература

19. *Houthakker H.S.* The Pareto distribution and the Cobb-Douglas production function in activity analysis. // Rev. Econ. Studies, 1955-56, v. 23 (1), №60, p.27-31.

20. *Johansen L.* Production functions. Amsterdam-London: North Holland Co., 1972.

21*. Cornwall R.* A note on using profit functions. – Internat. Econ. Rev., 1973, v.14, №2, p.211-214.

22. *Hildenbrand W.* Short-run production functions based on micro-data. //Econometrica, 1981, v.49, №5, p.1095-1125.

23. *Шананин А.А.* Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем. // ЖВМ и МФ, 1984, т.24, №12, с.1799-1811.

Литература

24. *Шананин А.А*. Исследование одного класса функций прибыли, возникающих при макроописании экономических систем. // ЖВМ и МФ, 1985, т.25, №1, с.53-65.

25*. Henkin G.M., Shananin A.A.* Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions. // Translation of mathematical monographs, 1990, v.81, p.189-223.

26. *Henkin G.M., Shananin A.A.* C^n – capacity and multidimensional moment problem. // Proceedings Symposium on Value Theory in Several Complex Variables, ed. by W.Stoll, Notre Dame Mathematical Lectures, 1990, №12, p.69-85.

27. *Henkin G.M., Shananin A.A.* The Bernstein theorems for Fantappie indcatrix and their applications to mathematical economics. // Lecture notes in pure and applied mathematics, 1991, v. 132, p.221-227.

Литература

28. *Шананин А.А.* Обобщённая модель чистой отрасли производства. // Математическое моделирование, 1997, т.9, №9, с. 117-127.

29. *Шананин А.А.* Исследование обобщённой модели чистой отрасли производства.//Математическое моделирование,1997,т.9,№10, с.73-82.

30. *Шананин А.А.* Непараметрический метод анализа технологической структуры производства. // Математическое моделирование, 1999, т.11, №9, с.116-122.

31. *Карзанов А.В., Шананин А.А.* О стабильных соответствиях конечных множеств евклидова пространства и их приложениях. // Экономика и математические методы, 2005, т.41, №2, с.111-112.

32. *Молчанов Е.Г.* О модификациях ромбических тайлингов, возникающих в обратной задаче распределения ресурсов. // Труды МФТИ, 2913, т.5, №3, с.67-74.

Спасибо за внимание!