

Оценки линейных форм от значений полилогарифмов

Ю.В. Нестеренко

Конференция памяти Е.М. Никишина
Москва, МГУ-МИАН, 11-14 сентября 2015

Полилогарифмические функции определяются рядами

$$L_k(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu^k}, \quad k \geq 1.$$

$$L_1(z) = -\operatorname{Log}(1 - z), \quad L_k(1) = \zeta(k), \quad k \geq 2,$$

Полилогарифмические функции определяются рядами

$$L_k(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu^k}, \quad k \geq 1.$$

$$L_1(z) = -\operatorname{Log}(1-z), \quad L_k(1) = \zeta(k), \quad k \geq 2,$$

Теорема (Е.М. Никишин, 1979)

Пусть a, b целые, $a/b < 0$, удовлетворяющие неравенству

$$b > |a|^{m+1} \cdot e^{(m-1)(m \ln m + 2m \ln 2)} > 0.$$

Тогда числа

$$1, L_1(a/b), \dots, L_m(a/b) \tag{1}$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Предложение

Пусть $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathbb{C}^m, \bar{\omega} \neq \bar{0}$. Предположим, что для каждого достаточно большого n , существуют такие линейные формы

$$M_i(\bar{X}) = \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

что

- ▶ $M_1, \dots, M_m$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$,
- ▶ $|a_{i,j}| \leq \sigma(n)$ с $\sigma(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$,
- ▶ $|M_i(\bar{\omega})| \leq \sigma(n)^{1-\lambda}$, для некоторого фиксированного числа $\lambda > 1$,

Тогда среди чисел $\omega_1, \dots, \omega_m$ имеется не менее λ линейно независимых над $\mathbb{Q}$.

Пусть

$$R(s) = \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m \frac{B_{\ell,k}}{(s + \ell)^k}, \quad B_{\ell,k} \in \mathbb{Q},$$

где $\mathcal{P}$ - множество различных положительных целых чисел, d - натуральное число.

Пусть

$$R(s) = \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m \frac{B_{\ell,k}}{(s + \ell)^k}, \quad B_{\ell,k} \in \mathbb{Q},$$

где $\mathcal{P}$ - множество различных положительных целых чисел, d - натуральное число.

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu) z^{\nu} = \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m B_{\ell,k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{(\nu + \ell)^k} =$$

Пусть

$$R(s) = \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m \frac{B_{\ell,k}}{(s+\ell)^k}, \quad B_{\ell,k} \in \mathbb{Q},$$

где $\mathcal{P}$ - множество различных положительных целых чисел, d - натуральное число.

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu) z^{\nu} = \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m B_{\ell,k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{(\nu+\ell)^k} = \\ &= \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m B_{\ell,k} z^{-\ell} \sum_{\nu=\ell}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu^k} = \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m B_{\ell,k} z^{-\ell} \left(L_k(z) - \sum_{\nu=1}^{\ell-1} \frac{z^{\nu}}{\nu^k} \right) = \end{aligned}$$

Пусть

$$R(s) = \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m \frac{B_{\ell,k}}{(s+\ell)^k}, \quad B_{\ell,k} \in \mathbb{Q},$$

где $\mathcal{P}$ - множество различных положительных целых чисел, d - натуральное число.

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu) z^{\nu} = \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m B_{\ell,k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{(\nu+\ell)^k} = \\ &= \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m B_{\ell,k} z^{-\ell} \sum_{\nu=\ell}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu^k} = \sum_{\ell \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m B_{\ell,k} z^{-\ell} \left(L_k(z) - \sum_{\nu=1}^{\ell-1} \frac{z^{\nu}}{\nu^k} \right) = \\ &= A_0(z^{-1}) + A_1(z^{-1})L_1(z) + \dots + A_m(z^{-1})L_m(z). \\ A_k(x^{-1}) &= \sum_{\ell \in \mathcal{P}} B_{\ell,k} z^{-\ell}. \end{aligned}$$

Пусть

$$R(s) = \frac{s(s-1) \cdots (s-N+1)}{(s+1)_{n_1} \cdots (s+1)_{n_m}}, \quad n_j \in \mathbb{Z},$$

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq n_1 - 1, \quad N+1 = \sum_{k=1}^m n_k,$$

$$(s+1)_n = (s+1)(s+2) \cdots (s+n).$$

Пусть

$$R(s) = \frac{s(s-1) \cdots (s-N+1)}{(s+1)_{n_1} \cdots (s+1)_{n_m}}, \quad n_j \in \mathbb{Z},$$

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq n_1 - 1, \quad N+1 = \sum_{k=1}^m n_k,$$

$$(s+1)_n = (s+1)(s+2) \cdots (s+n).$$

Имеем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu) z^{\nu+1} = A_0(z^{-1}) + A_1(z^{-1}) Li_1(z) + \dots + A_m(z^{-1}) Li_m(z),$$

с многочленами $A_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$, удовлетворяющими условиям

$$\deg A_0(x) \leq n_1 - 2, \quad \deg A_k(x) \leq n_k - 1, \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$\operatorname{ord}_{z=0} \sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu) z^{\nu+1} = N+1.$$

$$R(s) = \frac{s(s-1) \cdots (s-N+1)}{(s+1)_{n_1} \cdots (s+1)_{n_m}}, \quad n_j \in \mathbb{Z},$$

$$R(s) = \frac{s(s-1)\cdots(s-N+1)}{(s+1)_{n_1}\cdots(s+1)_{n_m}}, \quad n_j \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re s = -1/2} R(s) \frac{\pi}{\sin \pi s} (-z)^s ds = \\ & = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu) z^{\nu+1} = A_0(z^{-1}) + A_1(z^{-1})L_1(z) + \dots + A_m(z^{-1})L_m(z). \end{aligned}$$

$$R(s) = \frac{s(s-1)\cdots(s-N+1)}{(s+1)_{n_1}\cdots(s+1)_{n_m}}, \quad n_j \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re s = -1/2} R(s) \frac{\pi}{\sin \pi s} (-z)^s ds = \\ & = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu) z^{\nu+1} = A_0(z^{-1}) + A_1(z^{-1})L_1(z) + \dots + A_m(z^{-1})L_m(z). \end{aligned}$$

$$z = \frac{a}{b}.$$

$$R(s) = \left(\frac{(s-1) \cdots (s-n)}{s(s+1) \cdots (s+n)} \right)^2 = \sum_{k=0}^n \left(\frac{B_{k,2}}{(s+k)^2} + \frac{B_{k,1}}{(s+k)} \right)$$

$$R(s) = \left(\frac{(s-1) \cdots (s-n)}{s(s+1) \cdots (s+n)} \right)^2 = \sum_{k=0}^n \left(\frac{B_{k,2}}{(s+k)^2} + \frac{B_{k,1}}{(s+k)} \right)$$

$$R'(s) = \sum_{k=0}^n \left(-2 \frac{B_{k,2}}{(s+k)^3} - \frac{B_{k,1}}{(s+k)^2} \right)$$

$$R(s) = \left(\frac{(s-1) \cdots (s-n)}{s(s+1) \cdots (s+n)} \right)^2 = \sum_{k=0}^n \left(\frac{B_{k,2}}{(s+k)^2} + \frac{B_{k,1}}{(s+k)} \right)$$

$$R'(s) = \sum_{k=0}^n \left(-2 \frac{B_{k,2}}{(s+k)^3} - \frac{B_{k,1}}{(s+k)^2} \right)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Re s=1/2} R(s) \left(\frac{\pi}{\sin \pi s} \right)^2 ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} R'(\nu) = A_n \zeta(3) + B_n, \quad .$$

$$A_n \in \mathbb{Z}, B_n \in \mathbb{Q}, \quad \sum_{k=0}^n B_{k,1} = -\operatorname{Res}_{s=\infty} R(s) = 0.$$

(T. Rivoal, 2000)

Размерность линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порождённого числами $1, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$, равна бесконечности.

(T. Rivoal, 2000)

Размерность линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порождённого числами $1, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$, равна бесконечности.

$$R(s) = \frac{(s - rn) \cdots (s - 1)(s + n + 1) \cdots (s + (r + 1)n)}{(s(s + 1) \cdots (s + n))^m},$$

$$m \text{ нечётно, } n \text{ чётно} \Rightarrow R(-n - s) = -R(s), \quad r = [m \ln^{-2} m].$$

(Т. Rivoal, 2000)

Размерность линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порождённого числами $1, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$, равна бесконечности.

$$R(s) = \frac{(s - rn) \cdots (s - 1)(s + n + 1) \cdots (s + (r + 1)n)}{(s(s + 1) \cdots (s + n))^m},$$

$$m \text{ нечётно, } n \text{ чётно} \Rightarrow R(-n - s) = -R(s), \quad r = [m \ln^{-2} m].$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu) = A_0 + A_3 L_3(1) + A_5 L_5(1) + \cdots + A_m L_m(1),$$

$$A_k = A_k(1) = (-1)^{k+1} A_k(1), \quad L_k(1) = \zeta(k).$$

(В. Зудилин)

По крайней мере одно из чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ иррационально.

(В. Зудилин)

По крайней мере одно из чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ иррационально.

$$T(x) = x \frac{[(x-u)(x-u+1) \cdots (x-v)(x+v) \cdots (x+u-1)(x+u)]^3}{\prod_{j=1}^{10} (x-w_j)(x-w_j+1) \cdots (x+w_j)},$$
$$u > v > w_1 > \dots > w_{10} > 0, \quad u, v, w_j \in \mathbb{Z}, \quad \text{ord}_\infty T(x) \geq 2,$$
$$T(-x) = T(x), \quad R(s) = T(s+u+1)$$

(В. Зудилин)

По крайней мере одно из чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ иррационально.

$$T(x) = x \frac{[(x-u)(x-u+1) \cdots (x-v)(x+v) \cdots (x+u-1)(x+u)]^3}{\prod_{j=1}^{10} (x-w_j)(x-w_j+1) \cdots (x+w_j)},$$

$$u > v > w_1 > \dots > w_{10} > 0, \quad u, v, w_j \in \mathbb{Z}, \quad \text{ord}_{\infty} T(x) \geq 2,$$

$$T(-x) = T(x), \quad R(s) = T(s+u+1)$$

$$G = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} R''(\nu)$$

$$R(-2u-2-s) = -R(s) \Rightarrow A_{2k}(1) = 0,$$

$$\text{ord}_{s=\infty} R(s) \geq 2 \Rightarrow A_3(1) = 0.$$

(В. Зудилин)

По крайней мере одно из чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ иррационально.

$$T(x) = x \frac{[(x-u)(x-u+1) \cdots (x-v)(x+v) \cdots (x+u-1)(x+u)]^3}{\prod_{j=1}^{10} (x-w_j)(x-w_j+1) \cdots (x+w_j)},$$

$$u > v > w_1 > \dots > w_{10} > 0, \quad u, v, w_j \in \mathbb{Z}, \quad \text{ord}_{\infty} T(x) \geq 2,$$

$$T(-x) = T(x), \quad R(s) = T(s+u+1)$$

$$G = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} R''(\nu)$$

$$R(-2u-2-s) = -R(s) \Rightarrow A_{2k}(1) = 0,$$

$$\text{ord}_{s=\infty} R(s) \geq 2 \Rightarrow A_3(1) = 0.$$

$$G = A_0(1) + A_5(1)\zeta(5) + A_7(1)\zeta(7) + A_9(1)\zeta(9) + A_{11}(1)\zeta(11),$$

$$u = 91n, \quad v = 37n, \quad w_k = (35 - 2k)n, \quad 1 \leq k \leq 10.$$

Показатель иррациональности

Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Если существует последовательность пар $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$ таких, что

$0 < |q_n \alpha - p_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то α иррационально.

Показатель иррациональности

Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Если существует последовательность пар $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$ таких, что

$0 < |q_n \alpha - p_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то α иррационально.

Показатель иррациональности $\mu(\alpha)$ действительного числа α определяется как точная верхняя грань множества всех чисел $\varkappa$ таких, что множество решений неравенства

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < q^{-\varkappa} \quad (2)$$

в рациональных числах $\frac{p}{q}$ бесконечно.

Показатель иррациональности

Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Если существует последовательность пар $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$ таких, что

$0 < |q_n \alpha - p_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то α иррационально.

Показатель иррациональности $\mu(\alpha)$ действительного числа α определяется как точная верхняя грань множества всех чисел $\varkappa$ таких, что множество решений неравенства

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < q^{-\varkappa} \quad (2)$$

в рациональных числах $\frac{p}{q}$ бесконечно.

Свойства:

1. Если $\varkappa > \mu(\alpha)$, то множество решений $\frac{p}{q}$ неравенства (2) конечно.

Показатель иррациональности

Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Если существует последовательность пар $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$ таких, что

$0 < |q_n \alpha - p_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то α иррационально.

Показатель иррациональности $\mu(\alpha)$ действительного числа α определяется как точная верхняя грань множества всех чисел $\varkappa$ таких, что множество решений неравенства

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < q^{-\varkappa} \quad (2)$$

в рациональных числах $\frac{p}{q}$ бесконечно.

Свойства:

1. Если $\varkappa > \mu(\alpha)$, то множество решений $\frac{p}{q}$ неравенства (2) конечно.
2. Если $\varkappa < \mu(\alpha)$, то множество решений $\frac{p}{q}$ неравенства (2) бесконечно.

Показатель иррациональности

Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Если существует последовательность пар $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$ таких, что

$0 < |q_n \alpha - p_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то α иррационально.

Показатель иррациональности $\mu(\alpha)$ действительного числа α определяется как точная верхняя грань множества всех чисел $\varkappa$ таких, что множество решений неравенства

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < q^{-\varkappa} \quad (2)$$

в рациональных числах $\frac{p}{q}$ бесконечно.

Свойства:

1. Если $\varkappa > \mu(\alpha)$, то множество решений $\frac{p}{q}$ неравенства (2) конечно.
2. Если $\varkappa < \mu(\alpha)$, то множество решений $\frac{p}{q}$ неравенства (2) бесконечно.

Гипергеометрическая функция Гаусса

$$F(a, b, c, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{\nu}(b)_{\nu}}{(c)_{\nu}\nu!} z^{\nu}$$

$$(\alpha)_{\nu} = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)$$

Гипергеометрическая функция Гаусса

$$F(a, b, c, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{\nu}(b)_{\nu}}{(c)_{\nu}\nu!} z^{\nu}$$

$$(\alpha)_{\nu} = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)$$

Примеры.

$$F(1, 1, 2; z) = -\frac{\ln(1-z)}{z}, \quad F(1/2, 1, 3/2; -z) = \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

$$\operatorname{Arcsin} z = zF(1/2, 1/2, 3/2; z^2), \quad (1-z)^r = F(-r, 1, 1; z).$$

Гипергеометрическая функция Гаусса

$$F(a, b, c, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{\nu}(b)_{\nu}}{(c)_{\nu}\nu!} z^{\nu}$$

$$(\alpha)_{\nu} = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)$$

Примеры.

$$F(1, 1, 2; z) = -\frac{\ln(1-z)}{z}, \quad F(1/2, 1, 3/2; -z) = \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

$$\operatorname{Arcsin} z = zF(1/2, 1/2, 3/2; z^2), \quad (1-z)^r = F(-r, 1, 1; z).$$

- F.Thue (1908), C.L. Siegel (1937), A. Baker (1964) и другие использовали гипергеометрические функции для построения рациональных приближений к корням из рациональных чисел.

Различные представления гауссовой функции

$$F(a, b, c, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{\nu}(b)_{\nu}}{(c)_{\nu}\nu!} z^{\nu} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\nu)\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(c+\nu)\nu!} z^{\nu}$$

Различные представления гауссовой функции

$$F(a, b, c, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{\nu}(b)_{\nu}}{(c)_{\nu}\nu!} z^{\nu} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\nu)\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(c+\nu)\nu!} z^{\nu}$$

Эйлер

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; z) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-zx)^{-b} dx,$$
$$\Re c > \Re a > 0, \quad |z| < 1.$$

Различные представления гауссовой функции

$$F(a, b, c, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{\nu}(b)_{\nu}}{(c)_{\nu}\nu!} z^{\nu} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\nu)\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(c+\nu)\nu!} z^{\nu}$$

Эйлер

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; z) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-zx)^{-b} dx,$$
$$\Re c > \Re a > 0, \quad |z| < 1.$$

Barnes

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; z) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (-z)^s ds,$$

где контур интегрирования проходит снизу вверх так, чтобы разделить полюса подинтегральной функции $0, 1, 2, \dots$ от полюсов $-a, -a-1, \dots, -b, -b-1, \dots$

Alladi and Robinson, 1979: $a = 1, b = 1, c = 2$

$$F(1, 1, 2; z) = -\frac{\ln(1 - z)}{z}.$$

$$z^n \frac{n!n!}{(2n+1)!} F(n+1, n+1, 2n+2, z) =$$

$$z^n \int_0^1 \frac{t^n (1-t)^n}{(1-zt)^{n+1}} = Q_n(1/z) \ln(1-z) - P_n(1/z),$$

$$Q_n(x), P_n(x) \in \mathbb{Q}[x], \quad \deg Q_n(x) \leq n, \quad P_n(x) \leq n.$$

$$z = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{рациональные приближения к } \ln 2$$

Е. Рухадзе, 1987, $\mu(\log 2) \leq 3,89139 \dots$

$$\int_0^1 \frac{x^{6n}(1-x)^{8n}}{(1-zx)^{7n+1}} dx = \frac{(8n)!}{(7n)!} \sum_{k=0}^{\infty} R(k)z^k = Q(1/z) \ln(1-z) - P(1/z),$$

Е. Рухадзе, 1987, $\mu(\log 2) \leq 3,89139 \dots$

$$\int_0^1 \frac{x^{6n}(1-x)^{8n}}{(1-zx)^{7n+1}} dx = \frac{(8n)!}{(7n)!} \sum_{k=0}^{\infty} R(k) z^k = Q(1/z) \ln(1-z) - P(1/z),$$

где

$$R(s) = \frac{(s+1)(s+2) \cdots (s+6n)}{(s+7n+1)(s+7n+2) \cdots (s+14n+1)} = \sum_{\ell=7n+1}^{\ell=14n+1} \frac{B_{\ell}}{s+\ell}.$$

Е. Рухадзе, 1987, $\mu(\log 2) \leq 3,89139 \dots$

$$\int_0^1 \frac{x^{6n}(1-x)^{8n}}{(1-zx)^{7n+1}} dx = \frac{(8n)!}{(7n)!} \sum_{k=0}^{\infty} R(k) z^k = Q(1/z) \ln(1-z) - P(1/z),$$

где

$$R(s) = \frac{(s+1)(s+2) \cdots (s+6n)}{(s+7n+1)(s+7n+2) \cdots (s+14n+1)} = \sum_{\ell=7n+1}^{\ell=14n+1} \frac{B_{\ell}}{s+\ell}.$$

$$z = -1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{x^{6n}(1-x)^{8n}}{(1+x)^{7n+1}} dx = u_n \log 2 - v_n$$

Е. Рухадзе, 1987, $\mu(\log 2) \leq 3,89139 \dots$

$$\int_0^1 \frac{x^{6n}(1-x)^{8n}}{(1-zx)^{7n+1}} dx = \frac{(8n)!}{(7n)!} \sum_{k=0}^{\infty} R(k) z^k = Q(1/z) \ln(1-z) - P(1/z),$$

где

$$R(s) = \frac{(s+1)(s+2) \cdots (s+6n)}{(s+7n+1)(s+7n+2) \cdots (s+14n+1)} = \sum_{\ell=7n+1}^{\ell=14n+1} \frac{B_{\ell}}{s+\ell}.$$

$$z = -1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{x^{6n}(1-x)^{8n}}{(1+x)^{7n+1}} dx = u_n \log 2 - v_n$$

$$u_n = (-1)^n \sum_{k=7n}^{14n} \binom{k}{7n} \binom{8n}{k-6n} \in \mathbb{Z}, \quad v_n \in \mathbb{Q}.$$

Благодаря асимметрии все слагаемые имеют большой общий делитель и это улучшает степень приближения.

$$F(1/2, 1, 3/2; -z) = \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

$$F(1/2, 1, 3/2; -z) = \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

$$\begin{aligned} & z^n \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+3/2)} F(n+1/2, n+1, 2n+3/2; -z) = \\ & = z^n \int_0^1 \frac{t^{n-1/2}(1-t)^n}{(1+zt)^{n+1}} dt = Q_n(1/z) \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{z}}{\sqrt{z}} - P_n(1/z) \end{aligned}$$

$$Q_n(x), P_n(x) \in \mathbb{Q}[x], \quad \deg Q_n(x) \leq n, \quad P_n(x) \leq n.$$

$$F(1/2, 1, 3/2; -z) = \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

$$\begin{aligned} & z^n \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+3/2)} F(n+1/2, n+1, 2n+3/2; -z) = \\ &= z^n \int_0^1 \frac{t^{n-1/2}(1-t)^n}{(1+zt)^{n+1}} dt = Q_n(1/z) \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{z}}{\sqrt{z}} - P_n(1/z) \end{aligned}$$

$$Q_n(x), P_n(x) \in \mathbb{Q}[x], \quad \deg Q_n(x) \leq n, \quad P_n(x) \leq n.$$

$$z = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{рациональные приближения к } \pi$$

$$z = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{рациональные приближения к } \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Обобщённая гипергеометрическая функция

$$F(z) = {}_mF_{m-1} \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_m \\ b_2, \dots, b_m \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\nu} \dots (a_m)_{\nu}}{(b_2)_{\nu} \dots (b_m)_{\nu}} \cdot \frac{z^{\nu}}{\nu!},$$

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_{\nu} = a(a+1) \cdots (a+\nu-1), \quad \nu \geq 1, \quad a_j, b_j \neq -1, -2, \dots$$

Ряд абсолютно сходится при любом $|z| < 1$ и при $|z| = 1$, если

$$\delta = 1 + \Re(b_2 + \dots + b_m - a_1 - \dots - a_m) > 1,$$

Обобщённая гипергеометрическая функция

$$F(z) = {}_mF_{m-1} \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_m \\ b_2, \dots, b_m \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\nu} \dots (a_m)_{\nu}}{(b_2)_{\nu} \dots (b_m)_{\nu}} \cdot \frac{z^{\nu}}{\nu!},$$

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_{\nu} = a(a+1) \cdots (a+\nu-1), \quad \nu \geq 1, \quad a_j, b_j \neq -1, -2, \dots$$

Ряд абсолютно сходится при любом $|z| < 1$ и при $|z| = 1$, если

$$\delta = 1 + \Re(b_2 + \dots + b_m - a_1 - \dots - a_m) > 1,$$

Представление Эйлера $z \in \mathbb{C}, |\arg(1-z)| < \pi$

$$F(z) = \prod_{j=2}^m \frac{\Gamma(b_j)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b_j-a_j)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\prod_{j=2}^m x_j^{a_j-1} (1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1-zx_2 \cdots x_m)^{a_1}} dx_2 \cdots dx_m.$$

Обобщённая гипергеометрическая функция

$$F(z) = {}_mF_{m-1} \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_m \\ b_2, \dots, b_m \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\nu} \dots (a_m)_{\nu}}{(b_2)_{\nu} \dots (b_m)_{\nu}} \cdot \frac{z^{\nu}}{\nu!},$$

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_{\nu} = a(a+1) \cdots (a+\nu-1), \quad \nu \geq 1, \quad a_j, b_j \neq -1, -2, \dots$$

Ряд абсолютно сходится при любом $|z| < 1$ и при $|z| = 1$, если

$$\delta = 1 + \Re(b_2 + \dots + b_m - a_1 - \dots - a_m) > 1,$$

Представление Эйлера $z \in \mathbb{C}, |\arg(1-z)| < \pi$

$$F(z) = \prod_{j=2}^m \frac{\Gamma(b_j)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b_j - a_j)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\prod_{j=2}^m x_j^{a_j-1} (1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1-zx_2 \cdots x_m)^{a_1}} dx_2 \cdots dx_m.$$

Представление Барнса

$$F(z) = \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(b_j)}{\Gamma(a_j)} \cdot I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(s+a_j)}{\prod_{j=2}^m \Gamma(s+b_j)} \cdot \Gamma(-s) \cdot (-z)^s ds,$$

Lambert, 1766: π иррационально.

Legendre, 1860: π^2 иррационально.

M. Mignotte, 1974: $\mu(\pi^2) \leq 17,8$.

F. Beukers, 1979: $\mu(\pi^2) \leq 11,850782\dots$

Lambert, 1766: π иррационально.

Legendre, 1860: π^2 иррационально.

M. Mignotte, 1974: $\mu(\pi^2) \leq 17,8$.

F. Beukers, 1979: $\mu(\pi^2) \leq 11,850782\dots$

Lambert, 1766: π иррационально.

Legendre, 1860: π^2 иррационально.

M. Mignotte, 1974: $\mu(\pi^2) \leq 17,8$.

F. Beukers, 1979: $\mu(\pi^2) \leq 11,850782\dots$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy = b_n \zeta(2) - a_n,$$

$$a_n \in \mathbb{Q}, \quad b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k} \in \mathbb{Z}.$$

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ 2, 2 \end{matrix} \middle| 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ 2, 2 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy =$$

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ 2, 2 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy = \\ &= \left(\frac{n! \cdot n!}{(2n+1)!} \right)^2 \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} n+1, n+1, n+1 \\ 2n+2, 2n+2 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu), \end{aligned}$$

где

$$R(x) = n! \cdot \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{((x+1)(x+2)\dots(x+n+1))^2} \in \mathbb{Q}(x).$$

$$R(x) = n! \cdot \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{((x+1)(x+2)\dots(x+n+1))^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{B_{k,1}}{x+k} + \frac{B_{k,2}}{(x+k)^2} \right).$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} B_{k,1} = -\operatorname{Res}_{x=\infty} R(x) = 0.$$

$$I = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{B_{k,1}}{\nu+k} + \frac{B_{k,2}}{(\nu+k)^2} \right) = b_n \zeta(2) - a_n,$$

где

$$b_n = \sum_{k=1}^{n+1} B_{k,2}, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{B_{k,1}}{j} + \frac{B_{k,2}}{j^2} \right)$$

Hata, 1990: $\mu(\pi^2) \leq 7,5252$

Hata, 1995: $\mu(\pi^2) \leq 5,687$

Для доказательства этой оценки Хата использовал интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{17n}(1-x)^{14n}y^{15n}(1-y)^{14n}}{(1-xy)^{13n+1}} dx dy = u\zeta(2) - v.$$

Hata, 1990: $\mu(\pi^2) \leq 7,5252$

Hata, 1995: $\mu(\pi^2) \leq 5,687$

Для доказательства этой оценки Хата использовал интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{17n}(1-x)^{14n}y^{15n}(1-y)^{14n}}{(1-xy)^{13n+1}} dx dy = u\zeta(2) - v.$$

G.Rhin, C.Viola, 1996: $\mu(\pi^2) \leq 5,44124250 \dots$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{12n}(1-x)^{12n}y^{14n}(1-y)^{14n}}{(1-xy)^{13n+1}} dx dy = b\zeta(2) - a.$$

Hata, 1990: $\mu(\pi^2) \leq 7,5252$

Hata, 1995: $\mu(\pi^2) \leq 5,687$

Для доказательства этой оценки Хата использовал интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{17n}(1-x)^{14n}y^{15n}(1-y)^{14n}}{(1-xy)^{13n+1}} dx dy = u\zeta(2) - v.$$

G.Rhin, C.Viola, 1996: $\mu(\pi^2) \leq 5,44124250 \dots$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{12n}(1-x)^{12n}y^{14n}(1-y)^{14n}}{(1-xy)^{13n+1}} dx dy = b\zeta(2) - a.$$

В.В. Зудилин, 09.2013: $\mu(\pi^2) \leq 5,20514736 \dots$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{\Gamma(t-n)\Gamma(t)\Gamma(t+n)\Gamma(t+2n)}{\Gamma(t-5n)\Gamma(t-4n)\Gamma(t-3n)\Gamma(t+7n+1)} \cdot \left(\frac{\pi}{\sin \pi t}\right)^2 dt = q\zeta(2) - p.$$

Определение

$$G = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^2} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \dots$$

Определение

$$G = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^2} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \dots$$

N.Nielsen, 1909, S.Ramanujan:

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, 1 \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^{2\nu}}{\binom{2\nu}{\nu} \cdot (2\nu+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(\frac{3}{2})_{\nu}(\nu + \frac{1}{2})} = 2G.$$

Определение

$$G = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^2} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \dots$$

N.Nielsen, 1909, S.Ramanujan:

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, 1 \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^{2\nu}}{\binom{2\nu}{\nu} \cdot (2\nu+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(\frac{3}{2})_{\nu}(\nu + \frac{1}{2})} = 2G.$$

В.В. Зудилин, 2002:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{n-1/2}(1-x)^n y^n (1-y)^{n-1/2}}{(1-xy)^{n+1}} dx dy = (-1)^n (u_n G - v_n),$$

$$u_n, v_n \in \mathbb{Q}.$$

Постоянная Каталана

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{n-1/2}(1-x)^n y^n (1-y)^{n-1/2}}{(1-xy)^{n+1}} dx dy =$$

Постоянная Каталана

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{n-1/2}(1-x)^n y^n (1-y)^{n-1/2}}{(1-xy)^{n+1}} dx dy = \\ &= \cdot \left(\frac{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \cdot n!}{\Gamma(2n + \frac{3}{2})} \right)^2 \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} n + \frac{1}{2}, n + 1, n + 1 \\ 2n + \frac{3}{2}, 2n + \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right) = \end{aligned}$$

Постоянная Каталана

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{n-1/2}(1-x)^n y^n (1-y)^{n-1/2}}{(1-xy)^{n+1}} dx dy =$$
$$= \cdot \left(\frac{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \cdot n!}{\Gamma(2n + \frac{3}{2})} \right)^2 \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} n + \frac{1}{2}, n + 1, n + 1 \\ 2n + \frac{3}{2}, 2n + \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}} R(\nu), \quad \text{где}$$

$$R(x) = \left(\frac{3}{2} \right)_{n-1} \cdot \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{(x+1/2)((x+3/2) \dots (x+n+1/2))^2} \in \mathbb{Q}(x).$$

Символ Покхаммера: $(a)_k = a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+k-1)$

Постоянная Каталана

$$\begin{aligned} R(x) &= \left(\frac{3}{2}\right)_{n-1} \cdot \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(x+1/2)((x+3/2)\dots(x+n+1/2))^2} = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(B_{k,1} \frac{(x+1)\dots(x+k-1)}{(x+3/2)_k} + B_{k,2} \frac{(x+1)\dots(x+k)}{(x+3/2)_k \cdot (x+k+1/2)} \right). \end{aligned}$$

Постоянная Каталана

$$R(x) = \left(\frac{3}{2}\right)_{n-1} \cdot \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(x+1/2)((x+3/2)\dots(x+n+1/2))^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^n \left(B_{k,1} \frac{(x+1)\dots(x+k-1)}{(x+3/2)_k} + B_{k,2} \frac{(x+1)\dots(x+k)}{(x+3/2)_k \cdot (x+k+1/2)} \right).$$

$$J = \sum_{k=0}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}} R(\nu) = \sum_{k=0}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}} \cdot$$
$$\cdot \left(B_{k,1} \frac{(\nu+1)\dots(\nu+k-1)}{(\nu+3/2)_k} + B_{k,2} \frac{(\nu+1)\dots(\nu+k)}{(\nu+3/2)_k \cdot (\nu+k+1/2)} \right) =$$

Постоянная Каталана

$$R(x) = \left(\frac{3}{2}\right)_{n-1} \cdot \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(x+1/2)((x+3/2)\dots(x+n+1/2))^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^n \left(B_{k,1} \frac{(x+1)\dots(x+k-1)}{(x+3/2)_k} + B_{k,2} \frac{(x+1)\dots(x+k)}{(x+3/2)_k \cdot (x+k+1/2)} \right).$$

$$J = \sum_{k=0}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}} R(\nu) = \sum_{k=0}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}} \cdot$$
$$\cdot \left(B_{k,1} \frac{(\nu+1)\dots(\nu+k-1)}{(\nu+3/2)_k} + B_{k,2} \frac{(\nu+1)\dots(\nu+k)}{(\nu+3/2)_k \cdot (\nu+k+1/2)} \right) =$$
$$= \sum_{k=0}^n \left(B_{k,1} \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu+1}} + B_{k,2} \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}(\nu+1/2)} \right)$$

Постоянная Каталана

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu+1}} = 2, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}(\nu + 1/2)} = 4G.$$

Постоянная Каталана

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu+1}} = 2, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}(\nu + 1/2)} = 4G.$$

$$J = \sum_{k=0}^n \left(B_{k,1} \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu+1}} + B_{k,2} \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}(\nu + 1/2)} \right) =$$

Постоянная Каталана

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu+1}} = 2, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}(\nu + 1/2)} = 4G.$$

$$J = \sum_{k=0}^n \left(B_{k,1} \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu+1}} + B_{k,2} \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}(\nu + 1/2)} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^n \left(B_{k,1} \left(2 - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu+1}} \right) + B_{k,2} \left(4G - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}(\nu + 1/2)} \right) \right) = \\ = (-1)^n (u_n G - v_n).$$

Постоянная Каталана

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu+1}} = 2, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}(\nu+1/2)} = 4G.$$

$$J = \sum_{k=0}^n \left(B_{k,1} \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu+1}} + B_{k,2} \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}(\nu+1/2)} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^n \left(B_{k,1} \left(2 - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu+1}} \right) + B_{k,2} \left(4G - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(1)_{\nu}}{(3/2)_{\nu}(\nu+1/2)} \right) \right) =$$
$$= (-1)^n (u_n G - v_n).$$

$$u_n = 4 \sum_{k=0}^n B_{k,2}, \quad B_{k,2} = (-1)^n \binom{2n}{n+k} \cdot \binom{2n+2k}{2n} \cdot \frac{(2n)! k!}{n! (2k)! (n-k)!}.$$

Постоянная Каталана

$$G = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^2} = 0.915965594177\dots$$

$$G = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^2} = 0.915965594177\dots$$

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{(3/2)_{\nu}} z^{\nu} = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| z \right) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \cdot \frac{\arcsin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}},$$

$$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{(3/2)_{\nu}(\nu + \frac{1}{2})} z^{\nu} = 2 {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, 1 \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| z \right).$$

$$G = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^2} = 0.915965594177\dots$$

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{(3/2)_{\nu}} z^{\nu} = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| z \right) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \cdot \frac{\arcsin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}},$$

$$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{(3/2)_{\nu}(\nu + \frac{1}{2})} z^{\nu} = 2 {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, 1 \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| z \right).$$

$$f_1(1) = \infty, \quad f_2(1) = 4G$$

Theorem

Пусть a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 целые числа,

$$b_1 \geq b_2 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 0, \quad b_1 + b_2 - a_1 - a_2 - a_3 \geq 0.$$

Тогда для любого $z, |z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} J(z) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{a_1-1/2} (1-x)^{b_1-a_1} y^{a_2} (1-y)^{b_2-a_2-1/2}}{(1-zxy)^{a_3+1}} dx dy = \\ &= A \left(\frac{1}{z} \right) f_1(z) + B \left(\frac{1}{z} \right) f_2(z) - C \left(\frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Theorem

Пусть a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 целые числа,

$$b_1 \geq b_2 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 0, \quad b_1 + b_2 - a_1 - a_2 - a_3 \geq 0.$$

Тогда для любого $z, |z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} J(z) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{a_1-1/2} (1-x)^{b_1-a_1} y^{a_2} (1-y)^{b_2-a_2-1/2}}{(1-zxy)^{a_3+1}} dx dy = \\ &= A\left(\frac{1}{z}\right) f_1(z) + B\left(\frac{1}{z}\right) f_2(z) - C\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

where $A(x) = \sum_{j=0}^{b_1-a_2} A_{1,j} x^j$, $B(x) = \sum_{j=a_1-a_2}^{b_1-a_2} A_{2,j} x^j \in \mathbb{Q}[x]$,

$$C(x) = \sum_{j=0}^{b_1-a_2} \sum_{\nu=0}^{a_2+j-1} A_{1,j} \frac{\nu!}{\left(\frac{3}{2}\right)_\nu} x^{j-\nu} + \sum_{j=a_1-a_2}^{b_2-a_2} \sum_{\nu=0}^{a_2+j-1} A_{2,j} \frac{\nu!}{\left(\frac{3}{2}\right)_\nu \left(\nu + \frac{1}{2}\right)} x^{j-\nu}.$$

Theorem

Пусть a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 целые числа,

$$b_1 \geq b_2 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 0, \quad b_1 + b_2 - a_1 - a_2 - a_3 \geq 0.$$

Тогда для любого $z, |z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} J(z) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{a_1-1/2} (1-x)^{b_1-a_1} y^{a_2} (1-y)^{b_2-a_2-1/2}}{(1-zxy)^{a_3+1}} dx dy = \\ &= A\left(\frac{1}{z}\right) f_1(z) + B\left(\frac{1}{z}\right) f_2(z) - C\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

where $A(x) = \sum_{j=0}^{b_1-a_2} A_{1,j} x^j$, $B(x) = \sum_{j=a_1-a_2}^{b_1-a_2} A_{2,j} x^j \in \mathbb{Q}[x]$,

$$C(x) = \sum_{j=0}^{b_1-a_2} \sum_{\nu=0}^{a_2+j-1} A_{1,j} \frac{\nu!}{\left(\frac{3}{2}\right)_\nu} x^{j-\nu} + \sum_{j=a_1-a_2}^{b_2-a_2} \sum_{\nu=0}^{a_2+j-1} A_{2,j} \frac{\nu!}{\left(\frac{3}{2}\right)_\nu \left(\nu + \frac{1}{2}\right)} x^{j-\nu}.$$

$$J(1) = 4B(1)G - C(1).$$

Theorem

$$4^{b_2 - a_2 + a_3 - j} A_{2,j} \in \mathbb{Z}, \quad \text{для } a_1 - a_2 \leq j \leq b_2 - a_2,$$
$$4^{b_2 - a_2 + a_3 - j} D_{2b_1 - 2a_2} A_{1,j} \in \mathbb{Z}, \quad \text{для } 0 \leq j \leq b_1 - a_2,$$

Theorem

$$4^{b_2 - a_2 + a_3 - j} A_{2,j} \in \mathbb{Z}, \quad \text{для } a_1 - a_2 \leq j \leq b_2 - a_2,$$
$$4^{b_2 - a_2 + a_3 - j} D_{2b_1 - 2a_2} A_{1,j} \in \mathbb{Z}, \quad \text{для } 0 \leq j \leq b_1 - a_2,$$

$$a_1 = \alpha_1 n + 1, \dots, b_2 = \beta_2 n + 1, \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad n \rightarrow \infty$$

Theorem

$$4^{b_2 - a_2 + a_3 - j} A_{2,j} \in \mathbb{Z}, \quad \text{для } a_1 - a_2 \leq j \leq b_2 - a_2,$$

$$4^{b_2 - a_2 + a_3 - j} D_{2b_1 - 2a_2} A_{1,j} \in \mathbb{Z}, \quad \text{для } 0 \leq j \leq b_1 - a_2,$$

$$a_1 = \alpha_1 n + 1, \dots, b_2 = \beta_2 n + 1, \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad n \rightarrow \infty$$

$$\frac{C(1)}{4B(1)} \rightarrow G$$