

# Синхронизация в сетевых системах с нелинейными связями и метод абсолютной устойчивости

**А.В. Проскурников**

СПбГУ, ИПМаш РАН, ун-т Гронингена

Семинар "теория автоматического управления"  
Москва, лаб.7 ИПУ РАН, 8 сентября 2015

# План доклада

## Введение

- Сетевая система: узлы (агенты), связи, граф взаимодействий.
- Особенности сетевых систем, изучающихся в докладе.
- Определение синхронизации по состоянию или по выходу.

## Синхронизация систем первого порядка

- Консенсус. Разрыв между необходимостью и достаточностью.
- Критерии консенсуса при двунаправленной топологии.
- Поляризация мнений ("двудольный консенсус"): модель Альтафини
- Робастность по отношению к запаздываниям.

## Синхронизация агентов произвольного порядка

- Один известный критерий: теорема о спектре лапласиана
- Нелинейные связи: частотные критерии синхронизации

## Заключение

## Введение

# Сетевая система: общее понятие.

## Определение сетевой системы от IFAC Technical Committee 1.5:

Сетевые системы – это сложные динамические системы, составленные из большого числа простых систем, взаимодействующих через коммуникационную среду.

Взаимодействие может происходить и иным способом.

## Близкие понятия и термины

Complex dynamic network, cellular network, interconnected system, complex (large-scale) system, multi-agent system, однотипные системы.

## Основные компоненты сетевой системы:

- узлы сети (агенты): что за подсистемы взаимодействует?
- граф взаимодействий: кто с кем взаимодействует?
- функции связи (couplings): как происходит взаимодействие?

# Сетевая система: общее понятие.

## Определение сетевой системы от IFAC Technical Committee 1.5:

Сетевые системы – это сложные динамические системы, составленные из большого числа простых систем, взаимодействующих через коммуникационную среду.

Взаимодействие может происходить и иным способом.

## Близкие понятия и термины

Complex dynamic network, cellular network, interconnected system, complex (large-scale) system, multi-agent system, однотипные системы.

## Основные компоненты сетевой системы:

- узлы сети (агенты): что за подсистемы взаимодействует?
- граф взаимодействий: кто с кем взаимодействует?
- функции связи (couplings): как происходит взаимодействие?
- связи могут существовать изначально или быть синтезированы.

Уравнения  $N \geq 2$  связанных подсистем

$$\dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)) + \sum_{k=1}^N w_{jk}(t) \varphi_{jk}(y_k(t) - y_j(t)), \quad y_j(t) = g(x_j(t)).$$

Некоторые важные особенности:

Уравнения  $N \geq 2$  связанных подсистем

$$\dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)) + \sum_{k=1}^N w_{jk}(t) \varphi_{jk}(y_k(t) - y_j(t)), \quad y_j(t) = g(x_j(t)).$$

Некоторые важные особенности:

- узлы сети описываются ОДУ и имеют идентичную (“однотипную”) динамику;

Уравнения  $N \geq 2$  связанных подсистем

$$\dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)) + \sum_{k=1}^N w_{jk}(t) \varphi_{jk}(y_k(t) - y_j(t)), \quad y_j(t) = g(x_j(t)).$$

Некоторые важные особенности:

- узлы сети описываются ОДУ и имеют идентичную (“однотипную”) динамику;
- граф взаимодействий определяется переменными коэффициентами усиления  $w_{jk}(t)$ , т.е. зависит от времени;

## Уравнения $N \geq 2$ связанных подсистем

$$\dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)) + \sum_{k=1}^N w_{jk}(t) \varphi_{jk}(y_k(t) - y_j(t)), \quad y_j(t) = g(x_j(t)).$$

## Некоторые важные особенности:

- узлы сети описываются ОДУ и имеют идентичную (“однотипную”) динамику;
- граф взаимодействий определяется переменными коэффициентами усиления  $w_{jk}(t)$ , т.е. зависит от времени;
- связи между узлами сети описываются нелинейными функциями;

## Уравнения $N \geq 2$ связанных подсистем

$$\dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)) + \sum_{k=1}^N w_{jk}(t) \varphi_{jk}(y_k(t) - y_j(t)), \quad y_j(t) = g(x_j(t)).$$

## Некоторые важные особенности:

- узлы сети описываются ОДУ и имеют идентичную (“однотипную”) динамику;
- граф взаимодействий определяется переменными коэффициентами усиления  $w_{jk}(t)$ , т.е. зависит от времени;
- связи между узлами сети описываются нелинейными функциями;
- “диффузивные связи” (зависят от разности выходов).

## Уравнения $N \geq 2$ связанных подсистем

$$\dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)) + u_j(t), \quad u_j(t) = \sum_{k=1}^N w_{jk}(t) \varphi_{jk}(y_k(t) - y_j(t)).$$

## Некоторые важные особенности:

- узлы сети описываются ОДУ и имеют идентичную (“однотипную”) динамику;
- граф взаимодействий определяется переменными коэффициентами усиления  $w_{jk}(t)$ , т.е. зависит от времени;
- связи между узлами сети описываются нелинейными функциями;
- “диффузивные связи” (зависят от разности выходов).
- пример: независимые агенты хотят достичь некоторой общей цели, используя лишь **относительные** измерения “соседей”.

# Синхронизация по состоянию/выходу

Уравнения сетевой системы с  $N \geq 2$  подсистемами

$$\dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)) + \sum_{k=1}^N w_{jk}(t) \varphi_{jk}(y_k(t) - y_j(t)), \quad y_j(t) = g(x_j(t)).$$

## Определение

В системе достигается синхронизация **по состоянию**, если

$$x_j(t) - x_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall j, k = 1, \dots, N.$$

Аналогично определяется синхронизация по выходу ( $y_j - y_k \rightarrow 0$ ).

## Замечания:

- это лишь один из видов синхронизации между процессами;
- различные виды синхронизации изучались по меньшей мере с 17века (опыта Гюйгенса по фазовой синхронизации маятников);
- синхронизация лежит в основе многих природных явлений.

Консенсус. Синхронизация систем первого порядка.

## Источники:

- циклическое преследование (задача Дарбу; "задача о мухах");
- модели транспортных потоков (Chandler et al., 1958);
- динамика мнений в социальной сети и согласование субъективных оценок (French, 1956; Harary, 1959; Abelson, 1964; DeGroot, 1974);
- мобильные роботы и биологические формации: задача о "рандеву", движение стай ("flocking");
- направленное движение потока частиц (Vicsek, 1995), синхронизация связанных осцилляторов (Kuramoto, 1984);

## Источники:

- циклическое преследование (задача Дарбу; "задача о мухах");
- модели транспортных потоков (Chandler et al., 1958);
- динамика мнений в социальной сети и согласование субъективных оценок (French, 1956; Harary, 1959; Abelson, 1964; DeGroot, 1974);
- мобильные роботы и биологические формации: задача о "рандеву", движение стай ("flocking");
- направленное движение потока частиц (Vicsek, 1995), синхронизация связанных осцилляторов (Kuramoto, 1984);

## Общее описание:

## Истоки:

- циклическое преследование (задача Дарбу; "задача о мухах");
- модели транспортных потоков (Chandler et al., 1958);
- динамика мнений в социальной сети и согласование субъективных оценок (French, 1956; Harary, 1959; Abelson, 1964; DeGroot, 1974);
- мобильные роботы и биологические формации: задача о "рандеву", движение стай ("flocking");
- направленное движение потока частиц (Vicsek, 1995), синхронизация связанных осцилляторов (Kuramoto, 1984);

## Общее описание:

- имеется группа агентов, обладающих некоторой величиной ("мнением"), консенсус = согласование мнений;

# Консенсус агентов первого порядка

## Истоки:

- циклическое преследование (задача Дарбу; "задача о мухах");
- модели транспортных потоков (Chandler et al., 1958);
- динамика мнений в социальной сети и согласование субъективных оценок (French, 1956; Harary, 1959; Abelson, 1964; DeGroot, 1974);
- мобильные роботы и биологические формации: задача о "рандеву", движение стай ("flocking");
- направленное движение потока частиц (Vicsek, 1995), синхронизация связанных осцилляторов (Kuramoto, 1984);

## Общее описание:

- имеется группа агентов, обладающих некоторой величиной ("мнением"), консенсус = согласование мнений;
- консенсус достигается последовательными итерациями либо непрерывной динамикой, ведущей к сжатию выпуклой оболочки;

# Алгоритмы первого порядка

Постоянная топология – хорошо изученный случай

Рассмотрим автономную из  $N$  “агентов”

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk}(x_k(t) - x_j(t)) \in \mathbb{R}^d \Leftrightarrow \dot{X}(t) = -(L \otimes I_d)X.$$

- $x_j(t)$  – “мнение”  $j$ го агента;
- $X(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_N(t))$  – вектор состояния системы;
- $a_{jk} = \text{const} \geq 0$  – веса, определяющие **постоянный** граф взаимодействий: есть ребро  $j \mapsto k$ , если  $a_{kj} \neq 0$ ;

Агенты достигают **консенсуса**, если  $x_j(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x_* \forall j \in 1 : N$ .

Условия консенсуса (Ren, Beard (2005)  $\Leftarrow$  Агаев, Чеботарев (2000))

При любом начальном данном  $X(0)$  достигается консенсус тогда и только тогда, когда граф имеет **ориентированное остовное дерево** (quasi-strongly connected graph, rooted graph).

Рассмотрим нестационарную сеть из  $N$  “агентов”

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk}(t)(x_k(t) - x_j(t)) \in \mathbb{R}^d \Leftrightarrow \dot{X}(t) = -(L(t) \otimes I_d)X.$$

- $a_{jk}(t) \geq 0$  – веса, определяющие **переменный** граф взаимодействий: есть ребро  $j \mapsto k$ , если  $a_{kj} \neq 0$ ;

Агенты достигают **консенсуса**, если  $x_j(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x_* \forall j \in 1 : N$ .

Условия консенсуса – открытая проблема

- необходимо “интегральное” условие связности;
- данное условие достаточно в специальных случаях (неориентированный граф, сбалансированный граф);
- в общем случае известны лишь достаточные условия типа “равномерной” интегральной связности.

# Алгоритмы первого порядка

## Необходимые условия консенсуса

Уравнения сетевой системы из  $N$  подсистем

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk}(t)(x_k(t) - x_j(t)), \quad t \geq 0, j \in 1 : N.$$

Всюду предполагается:  $a_{jk}(t) \geq 0$ ,  $a_{jk}(\cdot) \in L^1_{loc}$ .

### Интегральная (“существенная”) связность

Соединим вершины  $j$  и  $k$  ориентированным ребром  $k \mapsto j$ , если

$$\int_0^\infty a_{jk}(t)dt = \infty.$$

Топология называется **интегрально связной**, если полученный граф  $G_\infty$  имеет ориентированное остовное дерево.

### Необходимое условие консенсуса

Если при любых начальных данных  $X(0)$  достигается консенсус, то топология интегрально связна.

# Алгоритмы первого порядка

Переменная топология. Двухнаправленные и сбалансированные графы.

Уравнения сетевой системы из  $N$  подсистем

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk}(t)(x_k(t) - x_j(t)), \quad t \geq 0, j \in 1 : N.$$

Предположение (B): **взаимность** (reciprocity) связей

$$\exists C \geq 1 : C^{-1}a_{kj}(t) \leq a_{jk}(t) \leq Ca_{kj}(t) \forall t \geq 0.$$

Теорема (Hendrickx, Tsitsiklis; Matveev, Novitsyn, Proskurnikov, 2013)

При сделанном предположении (B) консенсус достигается  $\forall X(0)$  **тогда и только тогда**, когда топология интегрально связна. Иначе консенсус достигается внутри каждой связной компоненты  $G_\infty$ .

Обобщение (Hendrickx, Tsitsiklis, 2013)

Предположение (B) можно заменить на **cut-balance (CB)**:

$$\exists C : C^{-1} \sum_{j \in S} \sum_{k \notin S} a_{kj}(t) \leq \sum_{j \in S} \sum_{k \notin S} a_{jk}(t) \leq C \sum_{j \in S} \sum_{k \notin S} a_{kj}(t) \forall S \subseteq 1 : N.$$

# Алгоритмы первого порядка

Переменная топология. Двухнаправленные и сбалансированные графы.

Более общий нелинейный протокол

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk}(t) \alpha_{jk}(X(t)) (x_k(t) - x_j(t)), \quad t \geq 0, j \in 1 : N.$$

Выполнено предположение **(B)** или **(CB)**,  $\alpha_{jk}(X) > 0$  – **непрерывны**.

Теорема (Matveev, Novitsyn, Proskurnikov, 2013)

При сделанных предположениях консенсус достигается  $\forall X(0)$  **тогда и только тогда**, когда топология интегрально связна. Иначе консенсус достигается внутри каждой связной компоненты  $G_\infty$ .

Обобщение: **non-instantaneous reciprocity** (Martin, Hendrickx, 2014)

$$\exists C_1, C_2 : \int_{t_p}^{t_p+1} \sum_{j \in S} \sum_{k \notin S} a_{jk}(t) dt \leq C_1 \int_{t_p}^{t_p+1} \sum_{j \in S} \sum_{k \notin S} a_{kj}(t) dt \quad \forall S \subseteq 1 : N,$$

при этом  $\int_{t_p}^{t_p+1} a_{jk}(t) dt \leq C_2 \quad \forall j, k$  и  $t_p \rightarrow \infty$ .

# Алгоритмы первого порядка

Переменная топология. Ориентированные графы.

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk}(t) \alpha_{jk}(X(t)) (x_k(t) - x_j(t)), \quad t \geq 0, j \in 1 : N.$$

По-прежнему  $\alpha_{jk}(X) > 0$  – **непрерывны**,  $a_{jk}(t) \geq 0$  – локально суммируемы. Такой протокол обеспечивает стягивание выпуклой оболочки  $V(t) = \text{co}\{x_1(t), \dots, x_N(t)\}$ :  $V(t) \subseteq V(t') \forall t \geq t'$ .

## Равномерная связность

Для заданных  $\varepsilon, T, t \geq 0$  нарисуем ребро  $k \mapsto j$ , если  $\int_t^{t+T} a_{jk}(s) ds > \varepsilon$ . Топология **равномерно связна**, если найдутся  $\varepsilon, T > 0$ , такие что полученный граф **имеет ООД** при всех  $t \geq 0$ .

## Достаточное условие консенсуса (опубликовано ли?)

При равномерно связной топологии консенсус достигается для любых начальных данных; в линейном случае ( $\alpha_{jk}(X) = 1$ ) сходимость экспоненциальная.

# Поляризация мнений: модель Альтафини

Консенсус модулей: частный случай синхронизации по выходам

## Протокол с отрицательными связями (Альтафини, 2012, 2013)

Матрица весов  $A = (a_{jk})$  *знакопеременная*.

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N |a_{jk}(t)| (x_k(t) \operatorname{sign} a_{jk}(t) - x_j(t)) \in \mathbb{R}, \quad \dot{x}(t) = -L(t)x(t).$$

Легко видеть, что если  $x_j(0) \in [-M; M] \forall j$ , то  $|x_j(t)| \leq M \forall j \forall t \geq 0$ .

Как правило, консенсус не достигается, однако

при **постоянной** и **сильно связной** топологии

- $-L$  – гурвицева матрица ( $x_j(t) \rightarrow 0$ ), если граф не структурно сбалансирован;
- в противном случае мнения поляризуются;
- идея доказательства: если  $U \cup V = 1 : N$  – разбиение множества вершин, то можно сделать преобразование  $x_j \mapsto -x_j$  при  $j \in U$ ,  $x_j \mapsto x_j$  при  $j \in V$ , после чего получаем неотрицательные связи;

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N |a_{jk}(t)| (x_k(t) \operatorname{sign} a_{jk}(t) - x_j(t)) \in \mathbb{R}, \quad \dot{x}(t) = -L(t)x(t).$$

## Постоянная топология ( $A = \text{const}$ )

Условие сильной связности можно ослабить.

- 1 поляризация достигается  $\Leftrightarrow$  граф структурно сбалансирован (например, если  $A \geq 0$ ) и имеет ООД;
- 2 матрица  $(-L)$  гурвицева тогда и только тогда, когда граф не является структурно сбалансированным и не содержит изолированных структурно сбалансированных подграфов, это условие **не требует** наличия ООД;
- 3 в случаях 1 и 2 достигается **консенсус модулей**:  $\lim |x_j| = \lim |x_k|$ .
- 4 наличие ООД **без структурной сбалансированности** вообще говоря не гарантирует консенсуса модулей.

## Обобщения понятий, введенных ранее для неотрицательных весов

- топология интегрально связна, если пары  $(k, j)$ , где  $\int_0^\infty |a_{jk}(t)| dt = \infty$  образуют граф с ООД;
- топология равномерно связна, если для некоторых  $T, \varepsilon$  пары  $(k, j)$ , где  $\int_t^{t+T} |a_{jk}(t)| dt > \varepsilon$  образуют граф с ООД  $\forall t \geq 0$ ;
- топология равномерно сильно связна, если для некоторых  $T, \varepsilon$  пары  $(k, j)$ , где  $\int_t^{t+T} |a_{jk}(t)| dt > \varepsilon$  образуют сильно связный граф  $\forall t \geq 0$ ;
- выполнено условие cut-balance (CB), если 
$$\exists C \geq 1 : \sum_{j \in S} \sum_{k \notin S} |a_{jk}(t)| \leq C \sum_{j \in S} \sum_{k \notin S} |a_{kj}(t)| \quad \forall S \subseteq 1 : N.$$
- пусть  $a^+ = \max(0, a)$  и  $a^- = |a| - a^+$ . будем говорить, что  $k$  существенно притягивает  $j$ , если  $\int_0^\infty a_{jk}^+(t) dt = \infty$  и  $k$  существенно отталкивает  $j$ , если  $\int_0^\infty a_{jk}^-(t) dt = \infty$ ; в первом случае нарисуем ребро  $j \mapsto k$  с весом  $+1$ , во втором - с весом  $-1$ . Топология **интегрально структурно сбалансирована**, если полученный граф  $G_\infty^\pm$  структурно сбалансирован.

# Развитие результатов Альтафини:

A. Proskurnikov, A. Matveev and M.Cao (2014)

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N |a_{jk}(t)| (x_k(t) \operatorname{sign} a_{jk}(t) - x_j(t)) \in \mathbb{R}, \quad \dot{x}(t) = -L(t)x(t).$$

## Необходимое условие поляризации

Для поляризации необходима интегральная связность.

## Достаточное условие консенсуса модулей

При любых начальных данных достигается консенсус модулей, если топология **равномерно сильно связна**. Если  $a_{jk}(t)$  сохраняют знак ( $a_{jk}(t)a_{jk}(t') \geq 0$ ), то достаточно равномерной связности, при этом достигается поляризация.

## Важные замечания:

Устойчивость возможна без интегральной связности. В общем виде равномерная связность не гарантирует консенсуса модулей. При равномерной сильной связности неизвестны условия поляризации.

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N |a_{jk}(t)| (x_k(t) \operatorname{sign} a_{jk}(t) - x_j(t)) \in \mathbb{R}, \quad \dot{x}(t) = -L(t)x(t).$$

## Необходимые и достаточные условия при СВ-условии

При СВ-условии имеют место следующие утверждения:

- ❶ существуют пределы  $\lim x_j(t) \in \mathbb{R}$ ;
- ❷ поляризация достигается тогда и только тогда, когда топология интегрально связна и интегрально структурно сбалансирована;
- ❸ если топология интегрально связна, но не структурно сбалансирована, то имеет место устойчивость;
- ❹ если нарушена интегральная связность, то в каждой компоненте связности  $G_{\infty}^{\pm}$  имеет место либо поляризация (если компонента структурно сбалансирована), либо сходимость мнений к 0;
- ❺ устойчивость имеет место тогда и только тогда, когда все компоненты  $G_{\infty}^{\pm}$  структурно несбалансированы.

# Робастность по отношению к запаздываниям

Коммуникационные запаздывания – большинство свойств сохраняется

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk}(t)(x_k(t - \tau_{jk}(t)) - x_j(t)), \quad t \geq 0, j \in 1 : N.$$

**Предположения:**  $a_{jk}(t) \geq 0$  – локально суммируемы,  $\tau_{jk} \leq \tau_*$ .

Такой протокол обеспечивает сжатие выпуклой оболочки

$$V(t) = \text{co}\{x_1(s), \dots, x_N(s) : s \in [t - \tau_*; t]\}.$$

## Условия консенсуса:

- 1 интегральная связность необходима, но в общем случае не достаточна;
- 2 равномерная связность достаточна, но не необходима;
- 3 при постоянной топологии условия 1 и 2 равносильны и сводятся к наличию ООД в графе;
- 4 достаточна ли интегральная связность при двунаправленной топологии? Это **открытая проблема**.

# Робастность по отношению к запаздываниям

Трудный случай: запаздывания в собственном состоянии!

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk}(t)(x_k(t - \tau_{jk}(t)) - x_j(t - \tau_{jk}^0(t))), \quad j \in 1 : N.$$

## Принципиальные отличия:

- при больших запаздываниях  $\tau_{jk}^0$  решения неограничены;
- удобные достаточные условия известны только в стационарном случае при дополнительных ограничениях, например  $\tau_{jk}^0 = \tau_j^0 \leq \tau_{jk} \forall k$  (Tian, Lui, 2008) либо  $\tau_{jk}^0 = \tau_{jk} = \tau_{kj}$  и  $a_{jk} = a_{kj}$  (Ferrare-Trecate, Bliman, 2008);
- в общем случае известные достаточные условия требуют решения LMI высокой размерности, консервативны и не распространяются на случай нелинейных связей.

# Робастность по отношению к запаздываниям

Случай неориентированного графа и антисимметричных связей

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk}(t) \varphi_{jk}(x_k(t - \tau_{jk}(t)) - x_j(t - \tau_{jk}(t))), \forall j.$$

## Теорема (Proskurnikov, 2013)

Пусть выполнены следующие предположения

- ❶ ограниченность  $0 \leq a_{jk}(t) \leq \bar{a}_{jk}$ ,  $\sum_k a_{jk}(t) \leq \bar{d}_j$ ,  $\tau_{jk}(t) \leq \bar{\tau}_{jk}$ ;
- ❷ симметрия:  $a_{jk} = a_{kj}$ ,  $\tau_{jk} = \tau_{kj}$ ,  $\varphi_{jk}(y) = -\varphi_{kj}(-y)$ ;
- ❸ секторное условие:  $\mu y^\top \varphi_{jk}(y) > |\varphi_{jk}(y)|^2 > 0 \forall y \neq 0$ ;  $\varphi_{jk}(0) = 0$ ;
- ❹ малость запаздываний:  $\left( \bar{d}_j \sum_{k=1}^N \bar{a}_{jk} \bar{\tau}_{jk}^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{2\mu}$ .

Тогда при любых начальных данных достигается **консенсус в среднем**  $x_j(t) \rightarrow N^{-1}(x_1(0) + \dots + x_N(0))$  при  $t \rightarrow \infty$ . В частности, это выполнено при  $\tau_{jk} \equiv 0$  и условиях 1-3.

# Робастность по отношению к запаздываниям

Случай неориентированного графа, антисимметричных связей и запаздывания по входу

$$\dot{x}_j(t) = u_j(t - \tau_j), \quad u_j(t) = \sum_{k=1}^N a_{jk}(t) \varphi_{jk}(x_k(t - \tau_{jk}(t)) - x_j(t - \tau_{jk}(t))), \quad \forall j.$$

## Теорема (Proskurnikov, 2014)

Если вместо условия малости выполнено одно из условий:

- ❶  $\max_j (\bar{d}_j \bar{\tau}_j) + \max_j \left( \bar{d}_j \sum_{k=1}^N \bar{a}_{jk} \bar{\tau}_{jk}^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{2\mu};$
- ❷  $2\mu \bar{d}_j \sum_{k=1}^N \bar{a}_{jk} \bar{\tau}_{jk}^2 + 2\bar{d}_j \bar{\tau}_j < \frac{1}{2\mu} \quad \forall j,$

и выполнены остальные предположения предыдущей теоремы, то достигается **синхронизация** по состоянию:  $x_j(t) - x_k(t) \rightarrow 0$ .

## Замечание

При  $\tau_j = 0$  оба условия равносильны условию из предыдущей теоремы. При  $\tau_{jk} \approx 0$  первое условие менее консервативно и гарантирует консенсус при  $\tau_j < (2\mu \bar{d}_j)^{-1}$ .

## Синхронизация агентов высших порядков

# Вспомогательные понятия

Матрицы Лапласа, алгебраическая связность.

## Нагруженные графы (weighted graphs).

**Нагруженный граф** – это тройка  $G = (V, E, W)$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_N\}$  – узлы,  $E \subset V \times V$  – дуги,  $W = (w_{ij})_{i,j=1}^N$  – матрица смежности. Считаем, что  $w_{ij} > 0$  при  $(v_i, v_j) \in E$  и  $w_{ij} = 0$  при  $(v_i, v_j) \notin E$  (типичный случай:  $w_{jk} \in \{0, 1\}$ ).

## Лапласиан нагруженного графа $G$ .

$$L(G) := \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N w_{1j} & -w_{12} & \dots & -w_{1N} \\ -w_{21} & \sum_{j=1}^N w_{2j} & \dots & -w_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{N1} & -w_{N2} & \dots & \sum_{j=1}^N w_{Nj} \end{bmatrix} - \text{лапласиан графа } G.$$

## Алгебраическая связность нагруженного графа.

$$\lambda_2(G) = N \min_{z \in \Upsilon} \frac{\sum_{i,j=1}^N w_{ij}(G)(z_j - z_i)^2}{\sum_{i,j=1}^N (z_j - z_i)^2}, \quad \Upsilon := \{z \in \mathbb{R}^N : \exists j, k : z_k \neq z_j\}.$$

# Вспомогательные понятия

Матрицы Лапласа, алгебраическая связность.

## Расположение спектра $L(G)$ .

Следствие теоремы Гершгорина: все с.ч.  $L(G)$  неустойчивы, кроме 0 (соответствует собственному вектору  $\mathbf{1}_N := (1, 1, \dots, 1)$ ). Теорема Агаева-Чеботарева (переоткрыта Olfati-Saber & Murray, 2004; Ren & Beard, 2005 и др.): с.ч. 0 простое тогда и только тогда, когда граф имеет *ориентированное остовное дерево*. В этом случае имеем:  
 $Lx = 0 \Leftrightarrow x \parallel \mathbf{1}_N$ , т.е.  $x_1 = \dots = x_N$ .

## Неориентированные графы.

Если  $W = W^T$ , то нагруженный граф неориентирован. В этом случае,  $L = L^T \geq 0$ . Если упорядочить с.ч. по возрастанию  $0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_N(G)$ , то  $\lambda_2(G)$  совпадает с алгебраической связностью – в этом причина обозначения.

# Сети идентичных агентов с постоянной топологией

Фундаментальный результат – теорема о спектре

## Модель сети

С каждым узлом графа  $G = (V, E, W)$  связан агент

$$\dot{x}_j(t) = Ax_j(t) + Bu_j(t), y_j(t) = Cx_j(t)$$

Применяется протокол  $u_j(t) = K \sum_{k=1}^N w_{jk}(y_k(t) - y_j(t))$ . Цель: достичь **синхронизации** по состоянию:  $x_k(t) - x_j(t) \rightarrow 0$  при любых начальных данных. Когда синхронизация достигается?

Теорема о спектре (Поляк и Цыпкин, 1996; Pecora and Carroll, 1998; Fax and Murray, 2004, Li, Duan, Chen 2010)

Для достижения синхронизации необходимо и достаточно, чтобы граф имел ориентированное остовное дерево и система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t), u(t) = -K\lambda y(t)$$

была устойчива при всех  $\lambda \in \sigma(L(G))$ ,  $\lambda \neq 0$ .

# Многомерные агенты с нелинейными связями

Исследуемые сетевые системы.

Агенты – многомерные линейные системы.

$$\dot{x}_j(t) = Ax_j(t) + Bu_j(t) \in \mathbb{R}^n, \quad y_j(t) = Cx_j(t) \in \mathbb{R}^k, \quad u_j(t) \in \mathbb{R}^m.$$

Структура сети:

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^N w_{jk}(t) \varphi_{jk}(t, y_k(t) - y_j(t)), \quad \text{где } j = 1, 2, \dots, N.$$

Задача:

Найти условия, при которых для всех  $X(0) = (x_j(0))_{j=1}^N$  выполняется условие **консенсуса**  $x_j(t) - x_k(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Особенности постановки:

- Агенты имеют общий вид
- Связи  $\varphi_{jk}$  могут быть нелинейны и точно не известны
- Система нестационарна, может рассматриваться как система с переменной структурой (часть коэффициентов  $w_{jk}(t) = 0$ ).

## Критерии абсолютной устойчивости

- устанавливают устойчивость системы Лурье (линейная часть + неопределенная обратная связь, “нелинейность”);
- нелинейность заменяется квадратичными связями;
- с помощью частотной теоремы (КYP lemma) либо метода Попова квадратичные связи преобразуются в априорные оценки решений;
- условия устойчивости представляют собой частотное неравенство + технические предположения (минимальная устойчивость и т.д.);
- данные условия эффективно проверяемы для скалярных нелинейностей в терминах ЧХ (кривой Найквиста);
- в случае многомерных нелинейностей аналитические условия часто проще решить систему ЛМН;
- **сложность:** в сетевых системах размерность нелинейности  $O(N^2)$ , где  $N$  – число агентов.

# Квадратичный критерий абсолютной устойчивости

## Простейший случай

Рассмотрим следующую систему в форме Лурье

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \in \mathbb{R}^n, \quad y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^p, \quad u(t) = \varphi(y(t)) \in \mathbb{R}^m$$

где нелинейность  $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  со свойством  $\varphi(0) = 0$  непрерывна и удовлетворяет квадратичному ограничению  $F(\varphi(y), y) > 0$  при  $y \neq 0$ , где  $F(u, y)$  – квадратичная форма.

### Теорема 1

Предположим, что тройка  $(A, B, C)$  управляема и наблюдаема. Пусть при  $\omega \in \mathbb{R}$  и  $\det(j\omega I_n - A) \neq 0$ , выполнено неравенство

$$F(\tilde{u}, C(j\omega I_n - A)^{-1}B\tilde{u}) \leq 0 \quad \forall \tilde{u} \in \mathbb{C}^m.$$

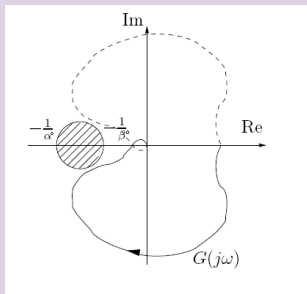
Пусть также выполнено условие *минимальной устойчивости*: существует матрица  $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , такая что  $A - BKC$  – гурвицева матрица. Тогда положение равновесия  $x = 0$  глобально асимптотически устойчиво при любой нелинейности  $\varphi(\cdot)$ .

# Квадратичный критерий абсолютной устойчивости

## Круговой критерий

### Пример

Круговой критерий – специальный случай



В случае секторных неравенств:  
 $y, u \in \mathbb{R}$  и  $-\infty < \alpha < \varphi(y)/y < \beta < \infty$   
можно взять квадратичную  
формулу  $F(u, y) = (u - \alpha y)(u - \beta y)$ , для  
которой частотное условие приобретает  
вид *кругового критерия*: частотная  
характеристика линейной части  
не заходит внутрь круга, построенного  
на отрезке  $[\alpha^{-1}, \beta^{-1}]$  как на  
диаметре (при  $\alpha\beta = 0$  круг превращается  
в полуплоскость). Условие минимальной

устойчивости в этом случае вполне естественно: устойчивость  
достигается для хотя бы одной линейной функции в секторе.

# Синхронизация группы из двух агентов

Сведение к квадратичному критерию

## Уравнения движения

Рассмотрим теперь задачу о синхронизации двух линейных агентов,

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t) \in \mathbb{R}^n, y_i(t) = Cx_i(t) \in \mathbb{R}^p, i = 1, 2,$$

нелинейно связанных между собой:

$$u_1(t) = \varphi_1(y_2(t) - y_1(t)), u_2(t) = \varphi_2(y_1(t) - y_2(t)).$$

## Квадратичные ограничения

Пусть функции связей  $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot)$  удовлетворяют  $F_0(\varphi_i(y), y) > 0$  при  $y \neq 0$ , где  $F_0(u, y) = u^*gy + y^*Py - u^*Ru$ ,  $R \geq 0$ .

# Синхронизация группы из двух агентов

Сведение к квадратичному критерию

## Уравнения движения

Рассмотрим теперь задачу о синхронизации двух линейных агентов,

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t) \in \mathbb{R}^n, \quad y_i(t) = Cx_i(t) \in \mathbb{R}^p, \quad i = 1, 2,$$

нелинейно связанных между собой:

$$u_1(t) = \varphi_1(y_2(t) - y_1(t)), \quad u_2(t) = \varphi_2(y_1(t) - y_2(t)).$$

## Квадратичные ограничения

Пусть функции связей  $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot)$  удовлетворяют  $F_0(\varphi_i(y), y) > 0$  при  $y \neq 0$ , где  $F_0(u, y) = u^*gy + y^*Py - u^*Ru$ ,  $R \geq 0$ .

## Сведение к устойчивости – шаг 1.

Функции  $X(t) = x_2(t) - x_1(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $U(t)$  удовлетворяют системе

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \quad Y(t) = CX(t), \quad U(t) = \Phi(Y(t)),$$

где  $\Phi(Y) := \varphi_2(-Y) - \varphi_1(Y)$ .

# Синхронизация группы из двух агентов

Сведение к квадратичному критерию

## Уравнения движения

Рассмотрим теперь задачу о синхронизации двух линейных агентов,

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t) \in \mathbb{R}^n, y_i(t) = Cx_i(t) \in \mathbb{R}^p, i = 1, 2,$$

нелинейно связанных между собой:

$$u_1(t) = \varphi_1(y_2(t) - y_1(t)), u_2(t) = \varphi_2(y_1(t) - y_2(t)).$$

## Квадратичные ограничения

Пусть функции связей  $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot)$  удовлетворяют  $F_0(\varphi_i(y), y) > 0$  при  $y \neq 0$ , где  $F_0(u, y) = u^*gy + y^*Py - u^*Ru$ ,  $R \geq 0$ .

## Сведение к устойчивости – шаг 2.

В силу двух неравенств

$$\begin{aligned} F_0(\varphi_2(-y), -y) &= -\varphi_2(-y)^T gy + y^*Py - \varphi_2(-y)^* R \varphi_2(-y) > 0, \\ F_0(\varphi_1(y), y) &= \varphi_1(y)^T gy + y^*Py - \varphi_1(y)^* R \varphi_1(y) > 0 \end{aligned}$$

мы получаем, что  $F(\Phi(y), y) > 0$ , где  $F(u, y) := -u^T gy + 2y^*Py - \frac{1}{2}u^T Ru$ .

# Синхронизация группы из $N$ агентов

Сведение к квадратичному критерию: общая схема

## Квадратичные ограничения

- каждая функция связи удовлетворяет квадратичному ограничению  $F(\varphi_{jk}(y), y) \geq 0$ ;
- при некоторых условиях (при  $N > 2$  нужна анти-симметрия связей) может быть выведено **инкрементальное ограничение**  $\sum_{j,k=1}^N \mathcal{F}(y_j - y_k, u_j - u_k) \leq 0$ ;
- соответственно, квадратичная функция Ляпунова также ищется в **инкрементальном** виде

$$V(X) = \sum_{j,k=1}^N (x_j - x_k)^\top H(x_j - x_k);$$

- в случае линейных стационарных агентов существование  $H$  сводится к частотной теореме (КУР-лемме), возможно обобщение на нелинейные агенты (ведет к понятию **инкрементальной диссипативности**)

# Круговой критерий консенсуса: скалярная версия

Предположения.

- ①  $(A, B, C)$  – управляемая и наблюдаемая тройка матриц;
- ② При всех  $t \geq 0$  матрица  $W(t) = (w_{jk}(t)) = W^T$  определяет **связный** нагруженный граф,  $\lambda_2(W(t)) \geq \theta$ ;
- ③  $\sum_{k=1}^N w_{jk}(t) \leq D_{\max} \forall t \geq 0$ .
- ④ Функции  $w_{jk}(\cdot)$ ,  $\varphi_{jk}(\cdot, y)$  измеримы как функции  $t$ ;
- ⑤ Функция  $\varphi_{jk}(t, \cdot)$  равномерно непрерывна при почти всех  $t$ ;
- ⑥ Выполнено условие **симметрии**:  $\varphi_{jk}(t, y) = -\varphi_{kj}(t, -y)$ ;
- ⑦ Секторное неравенство (специфика скалярного случая):  
 $\varphi_{jk}(t, 0) = 0$  и существуют  $0 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ , такие что

$$\alpha < \inf_{t \geq 0} \frac{\varphi_{jk}(t, y)}{y} < \sup_{t \geq 0} \frac{\varphi_{jk}(t, y)}{y} < \beta.$$

В частности, имеет место неравенство  
 $(\varphi_{jk}(t, y) - \alpha y)(y - \beta^{-1} \varphi_{jk}(t, y)) \geq 0$ .

- ⑧ Существует матрица  $W^0$  со свойствами 2,3 и  $\mu \in (\alpha; \beta)$ , т.ч.  
 $A - \mu \lambda B C$  – гурвицева матрица при  $\lambda \in \sigma(W^0) \setminus \{0\}$ . Иными словами, при графе  $W^0$  и  $\varphi_{jk}(t, y) = \mu y$  консенсус достигается.

# Круговой критерий консенсуса: скалярная версия

Формулировка теоремы.

## Теорема.

Пусть выполнены предположения 1-8 и передаточная функция агента  $Z_y(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B$  удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} Z_y(i\omega) + \frac{\theta\alpha}{1 + \alpha\beta^{-1}} |Z_y(i\omega)|^2 + \frac{1}{2D_{\max}(\alpha + \beta)} \geq 0. \quad (*)$$

Тогда протокол обеспечивает консенсус.

## Замечание.

Величину  $\theta$  **не требуется знать точно** – нужна лишь нижняя оценка!  
При  $\beta = +\infty$  левая часть  $(*)$  не зависит от  $\theta$ .

В дискретном случае можно получить обобщение критерия Цыпкина.

# Круговой критерий консенсуса: скалярная версия

Графическая интерпретация.

## Геометрический смысл условия (\*)

Годограф ЧХ  $\{Z_y(i\omega) : \omega \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$  лежит вне круга  $\mathcal{D} = \{z : |z - z_0| < R_0\} \subset \mathbb{C}$  с радиусом и центром:

$$z_0 = -\frac{1 + \alpha\beta^{-1}}{2\alpha\theta}, R_0 = \frac{1 + \alpha\beta^{-1}}{2\alpha\theta} \sqrt{1 - \frac{2\alpha\beta^{-1}}{D_{\max}(1 + \alpha\beta^{-1})^2}}.$$

При  $\alpha = 0$  круг надо заменить полуплоскостью  $\{z : \operatorname{Re} z \leq -\frac{\gamma}{2D_{\max}}\}$ .

# Круговой критерий консенсуса: скалярная версия

Примеры.

Двойные интеграторы с нелинейными связями.

$$\ddot{z}_j = u_j, y_j = p\dot{z}_j + qz_j, u_j(t) = \sum_{k=1}^N w_{jk}(t)\varphi_{jk}(t, y_k - y_j).$$

Пусть  $p, q > 0$ ,  $\varphi_{jk}(t, \sigma)\sigma \geq \alpha_0|\sigma|^2$  и выполнены предположения 1-8 с  $\alpha = \alpha_0, \beta = +\infty$ . Тогда при  $\theta > q/(\alpha_0 p^2)$  имеет место консенсус.

Пассивные агенты (M.Spong, N.Chopra, 2006 – на самом деле верен и для нелинейных пассивных агентов).

Пусть  $\operatorname{Re} Z_y(i\omega) \geq 0$  и выполнены предположения 1-8 (из них следует пассивность агентов) с  $\alpha = 0, \beta = +\infty$ . Тогда имеет место синхронизация по выходу  $y$ .

# Критерии Попова и Зеймса-Фалба (скалярный случай)

Развитие на случай стационарных сетей

## Теорема (критерий Попова).

Пусть выполнены предположения 1-8, однако топология и связи стационарны  $\varphi_{jk}(t, y) = y$ ,  $a_{jk}(t) = a_{jk}$ . Пусть при некотором  $\tau \in \mathbb{R}$  передаточная функция агента  $Z_y(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B$  удовлетворяет

$$\operatorname{Re}[Z_y(i\omega)(1 + i\omega\tau)] + \frac{\theta\alpha}{1 + \alpha\beta^{-1}}|Z_y(i\omega)|^2 + \frac{1}{2D_{\max}(\alpha + \beta)} \geq 0.$$

Тогда протокол обеспечивает синхронизацию.

В дискретном случае можно получить обобщение критерия Джури-Ли.

# Критерии Попова и Зеймса-Фалба (скалярный случай)

Развитие на случай стационарных сетей с монотонными связями

## Теорема (критерий Зеймса-Фалба).

Пусть выполнены предположения 1-8, однако топология и связи стационарны  $\varphi_{jk}(t, y) = y$ ,  $a_{jk}(t) = a_{jk}$ . Пусть, кроме того  $\alpha \leq \varphi'(y) \leq \beta$ . Пусть при некоторой мере  $\mu$  на  $\mathbb{R}$ , такой что  $\mu(\mathbb{R}) \leq 1$ ,  $Z_y(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B$  удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re}[Z_y(i\omega)R(i\omega)] + \frac{\theta\alpha}{1 + \alpha\beta^{-1}}|Z_y(i\omega)|^2 + \frac{1}{2D_{\max}(\alpha + \beta)} \geq 0.$$

Здесь  $R(\omega) = 1 - \int e^{i\omega t} d\mu(t)$  – множитель устойчивости. Тогда протокол обеспечивает синхронизацию.

## Синхронизация – аналог задачи о стабилизации равновесия

- многие задачи (стабилизация вдоль траектории и др.) могут быть сведены к стабилизации нулевого равновесия,
- “ослабленная” устойчивость (ограниченность состояний, диссипативность) на практике необходима;
- для стабилизации равновесия разработан ряд специфических методов (например, абсолютная устойчивость);
- оказывается, что и для синхронизации ряд методов дает эффективные критерии;

## Синхронизация – не все, что нужно изучать в сетевом управлении

- иногда требуется **десинхронизация** (болезнь Паркинсона и т.д.);
- социальные системы обычно не достигают консенсуса;
- синхронизация (частичная) – не всегда необходима и не всегда достаточна для управления группой агентов;

- ❶ A. Proskurnikov, Consensus in switching networks with sectorial nonlinear couplings: Absolute stability approach, *Automatica*, 2013, 49(2), pp. 488–495
- ❷ A.V. Proskurnikov, Average consensus in networks with nonlinearly delayed couplings and switching topology, *Automatica*, 2013, 49(9), pp. 2928–2932
- ❸ A.V. Proskurnikov, Nonlinear consensus algorithms with uncertain couplings, *Asian Journal of Control*, 2014, 16(5), p. 1277-1288
- ❹ A. Proskurnikov, A. Matveev, Popov-type criterion for consensus in nonlinearly coupled networks, *IEEE Trans. on Cybernetics*, 2015, 45(8), 1537-1548
- ❺ А.В. Проскурников, Частотные критерии консенсуса в многоагентных системах с нелинейными секторными связями, *АиТ*, 2014, N11, с. 110-126
- ❻ А.В. Проскурников, Консенсус в нелинейных стационарных сетях с идентичными агентами, *АиТ*, 2015, N9, с. 43–63
- ❼ A. Proskurnikov, A. Matveev, M. Cao, Opinion Dynamics in Social Networks with Hostile Camps: Consensus vs. Polarization, *IEEE Trans. on Autom. Control*, 2016, 46(7) (published online)