

Однополярный электромагнитный тормоз

*Б.Т.Поляк, О.Н. Кузнецов,
В.В. Чумаченко*

Семинар ИПУ, 15 сентября 2015 г.

Энергетическая система

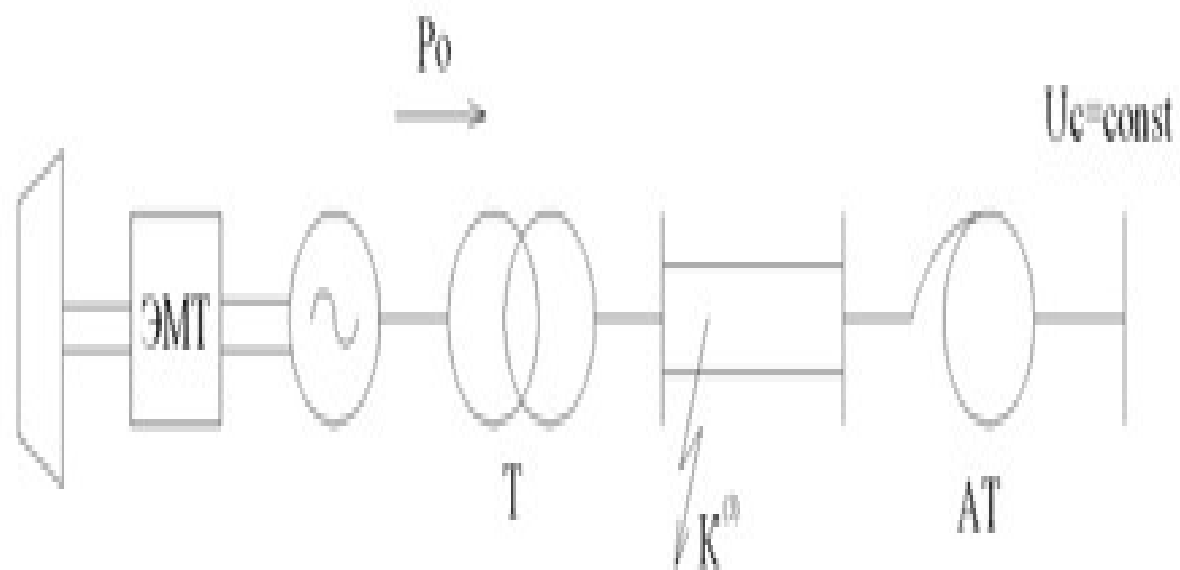


Рис. 1: Схема простейшей ЭЭС

Уравнение

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_n}{T_J} P_T - \frac{\omega_n}{T_J} P(E_q, \delta) \\ T_{d0} \frac{dE'_q}{dt} + E_q = E_{qe}, \end{cases} \quad (1)$$

δ - угол ротора; ω - скорость вращения ротора;

ω_0 - угловая частота установившегося режима;

ω_n - номинальная скорость вращения ротора;

T_J - инерция генератора; T_{d0} - постоянная времени генератора;

P_T - мощность турбины; P - мощность генератора; E'_q - переходная ЭДС,

E_q - синхронная ЭДС; E_{qe} - вынужденная ЭДС.

Уравнение после замен

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = c - a \sin x - by_+ \end{cases} \quad (2)$$

$y_+ = \max\{0, y\}$, by_+ - однополярное управление, $a, b, c \geq 0, c/a \leq 0$.

При $b = 0, c = 0$ — уравнение математического маятника

Линейная обратная связь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = c - a \sin x - by \end{cases} \quad (3)$$

Это уравнение ввел Трикоми в 1933 году!

Трикоми



Рис. 2: Франческо Трикоми, 1897–1978

Tricomi F. Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser.2-2, No. 1, 1933, p. 1–20.

Другие работы

Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний // 2-е изд., перераб. и испр. - М.:Наука,1981.-918 с.

Р.Рейссиг, Г.Сансоне, Р.Конти. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.// М., Наука, 1974, 316с .

Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.// М., Наука, 1978. - 400 с., глава 4

Леонов Г.А. Введение в теорию управления.// СПб., Изд. СПб Ун-та, 2004, -218с. Раздел 5.2

Такие уравнения возникают при исследовании устойчивости синхронных электрических машин и в системах фазовой автоматической подстройки частоты. Хейз, Бакаев, Белюстина, Шахгильдян...

Свободное движение

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = c - a \sin x \end{cases} \quad (4)$$

Точки равновесия; $y = 0, \sin x = c/a$

Основная: $\sin z = c/a, 0 \leq z \leq \pi/2$. Остальные: $z_{1k} = z + 2k\pi, z_{2k} = -z + \pi(2k + 1)$. Мы увидим, что точки z_{1k} — типа центр, z_{2k} — седла.

Полная энергия

Ищем полную энергию в виде

$$V(x, y) = (1/2)y^2 + s(x)$$

$s(x)$ выбирается из условия $s'(x) = c - a \sin x$. Подбрав константу интегрирования, найдем $s(x) = a(\cos z - \cos x) + c(z - x)$. Тогда $s(z) = 0$, $s'(z) = 0$, $s''(z) = \cos z > 0$, т.е. z - точка локального минимума $s(x)$.

Итак, выбираем

$$V(x, y) = (1/2)y^2 + a(\cos z - \cos x) + c(z - x) \quad (5)$$

Свободное движение — локальное поведение

Теорема 1 Пусть начальные условия малы:

$$V(x(0), y(0)) < h = 2a \cos z + c(2z - \pi), \quad -\pi - z \leq x(0) \leq \pi - z, \quad (6)$$

тогда для системы (4):

1. Система консервативна, т.е. $V = \text{const}$ на траектории.
2. Траектории системы периодичны, на фазовой плоскости они замкнуты и ограничены и содержат внутри точку $(z, 0)$, они симметричны относительно прямой $y = 0$.

Доказательство

$$\dot{V} = y\dot{y} + (a \sin x - c)\dot{x} = 0$$

т. е. $V = \text{const}$ на траектории. Поскольку в ближайшей стационарной точке $V(0, \pi - z) = h$, то область выделяемая условием (6) есть область локального минимума V , и по теореме Лагранжа-Дирихле получаем второе утверждение теоремы.

Полоса захвата

Отрезок по оси абсцисс, выделяемый (6), называется полосой захвата.

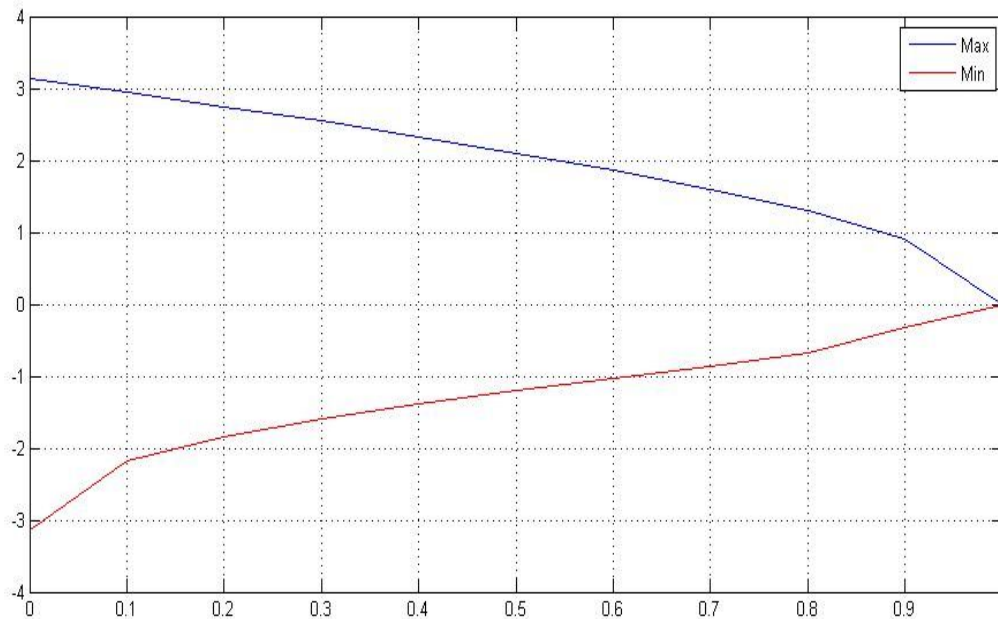
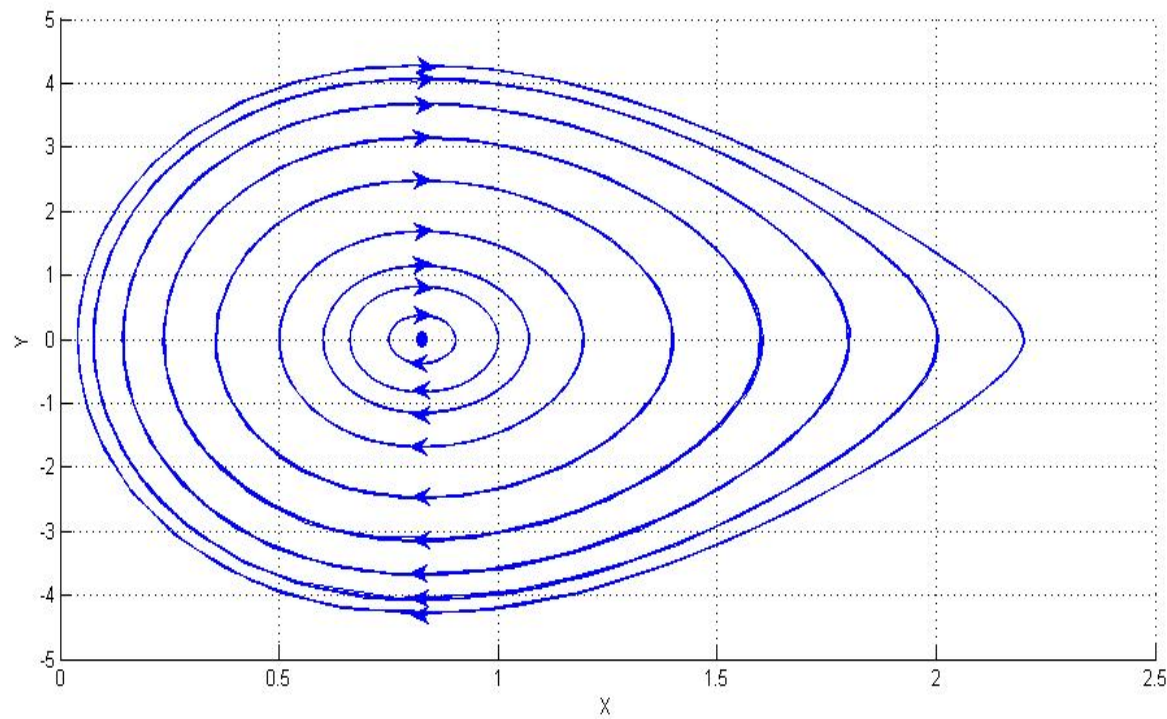


Рис. 3: Полоса захвата как функция c/a

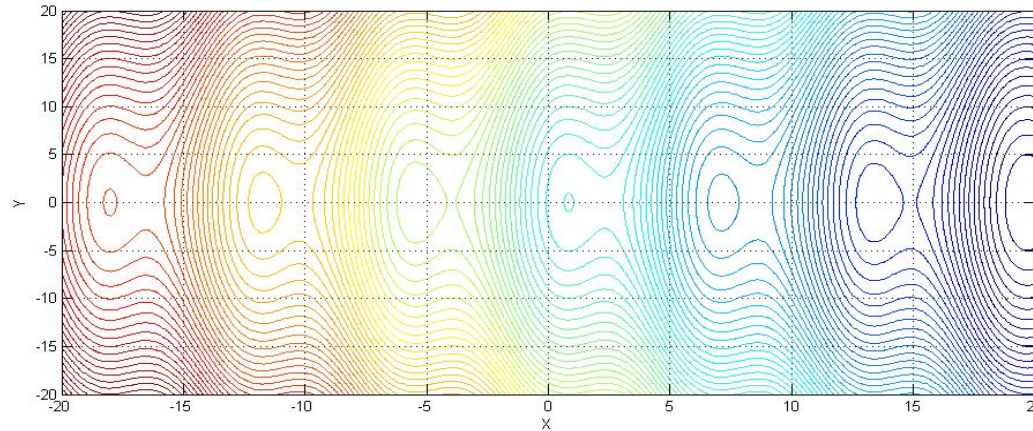
Локальное поведение траекторий

.

$a = 35,82; c = 26,32; z = 0,8253.$



Глобальное поведение траекторий



1. Точки типа “центр” $z_k = 2\pi k + z$. Им соответствуют ограниченные замкнутые периодические траектории.
2. Остальные траектории неограниченны и по x , и по y (и при обращении времени). Наличие члена $s \neq 0$ приводит к разгону угловой скорости (этого эффекта нет у математического маятника).

Исследование движения при наличии ЭМТ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = c - a \sin x - by_+, \quad y_+ = \max\{y, 0\} \end{cases} \quad (7)$$

Эта система (с y вместо y_+) исследовалась в ряде работ, начиная с Трикоми 1933.

Теорема 2 При условиях Теоремы 1 и $b > 0$ система (7) локально асимптотически устойчива, т.е. $x(t) \rightarrow z$, $y(t) \rightarrow 0$ для $t \rightarrow \infty$ если начальные условия удовлетворяют (6).

Доказательство

$$\dot{V} = -by_+^2 \leq 0.$$

т.е. V — локальная функция Ляпунова для уравнения (7). При этом $\dot{V} = 0$. т.е. при $y \leq 0$, однако в этой полуплоскости по Теореме 1 нет целых траекторий. Поэтому применима теорема Барбашина-Красовского о локальной асимптотической устойчивости.

Локальное поведение

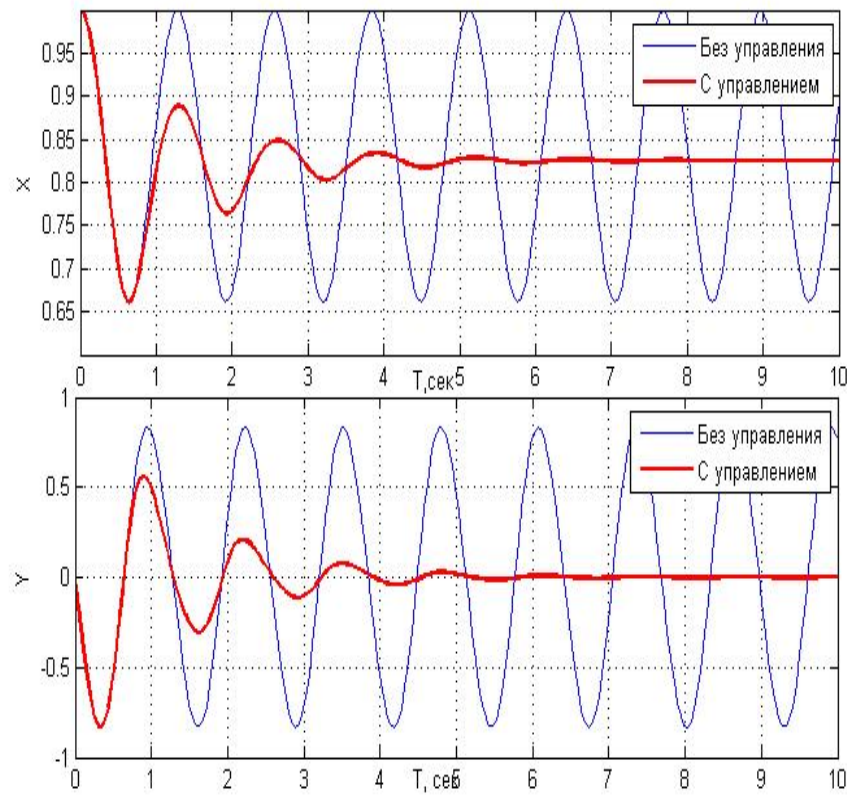


Рис. 4: Движение системы с управлением и без управления

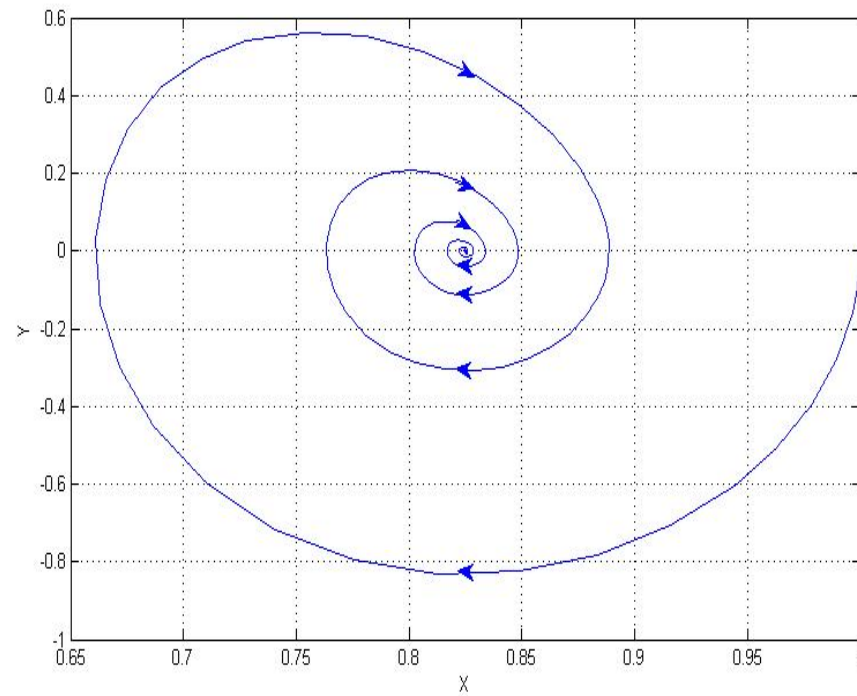


Рис. 5: Фазовый портрет системы с управлением

Поведение функции Ляпунова

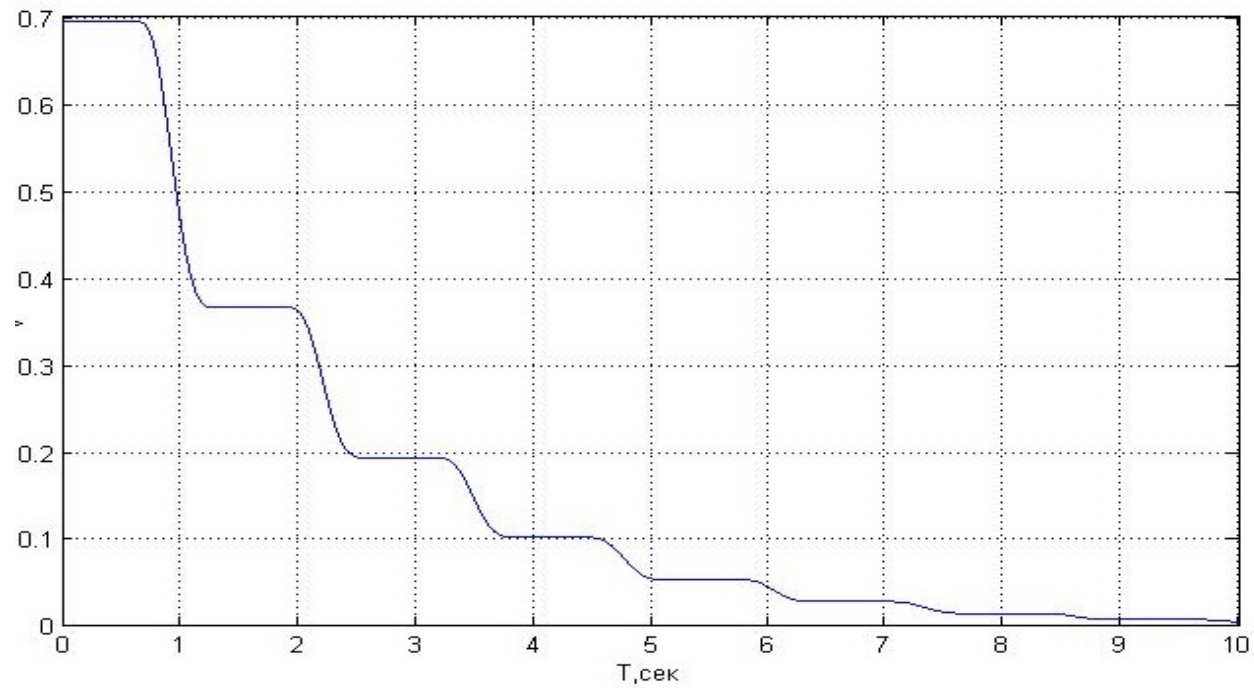


Рис. 6: Изменение функции Ляпунова во времени

Глобальные результаты

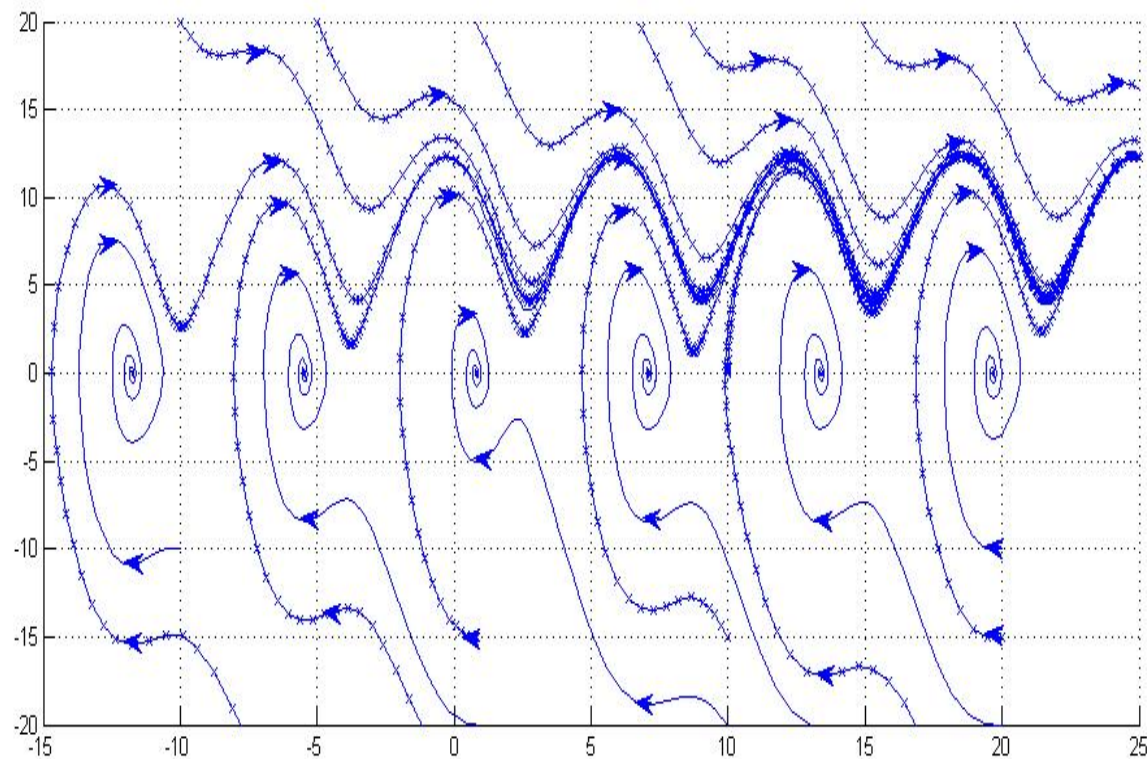


Рис. 7: Глобальное поведение системы с ЭМТ

Возможные обобщения

- Оценка скорости сходимости
- Другие нелинейности вместо синуса
- Сложные системы