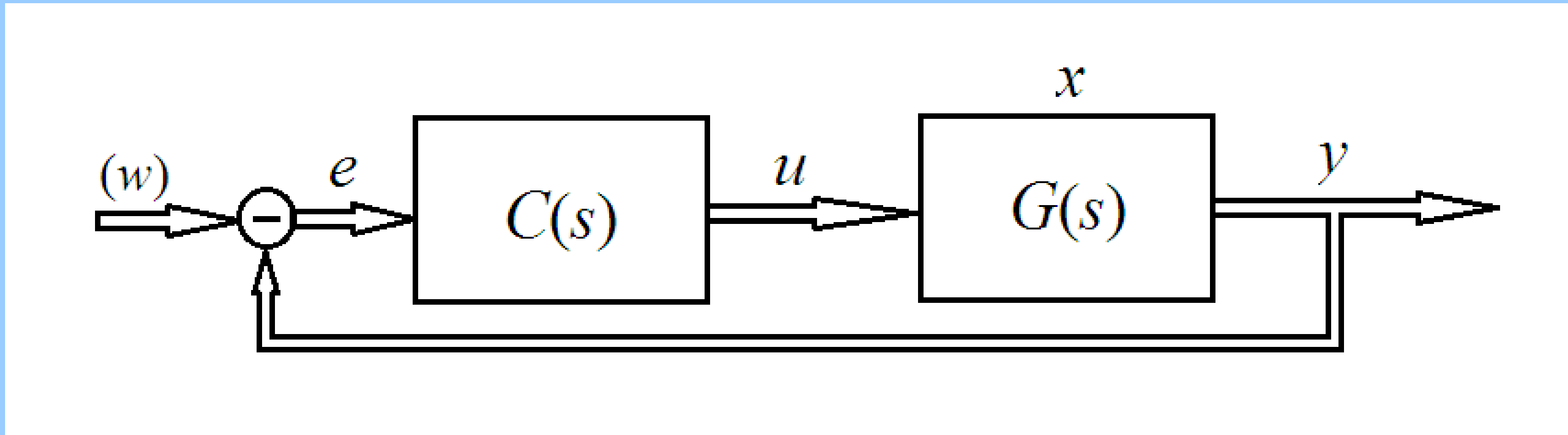
Корневые многочлены и координаты в синтезе одноканальных САУ пониженного порядка

А.В. Чехонадских

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



$G(s)$ – управляемый объект (*plant*),

$C(s)$ – регулятор (*controller*),

x – вектор состояний объекта,

y – вектор выхода системы,

u – вектор управляющих воздействий,

(w – задание, т.е. стандарт выхода,

$e = y - w$ – отклонение от задания)

Описание в операторной форме:

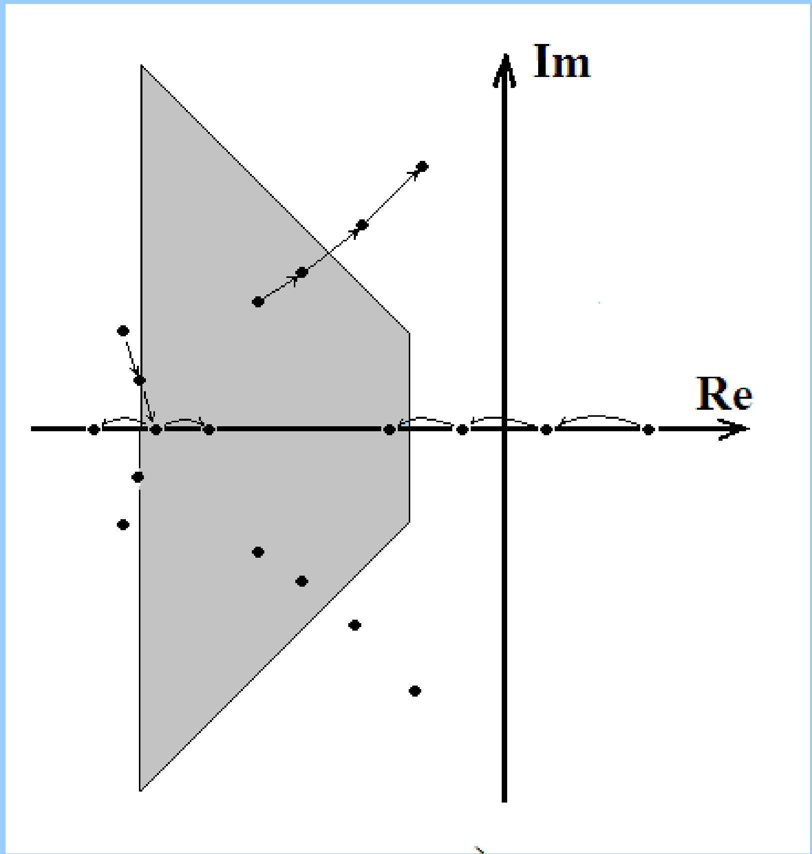
$$y = G(s)\,u, \qquad u = -\,C(s)\,y$$

(здесь $G(s) = N_{pl}\,D_{pl}^{-1}$, $C(s) = N_c\,D_c^{-1}$ – передаточные функции объекта и регулятора соответственно).

Описание замкнутой системы

$$y = G(s)C(s)\,/\,(1 + G(s)\,C(s)) \cdot u =$$

$$[N_{pl}(s)\,N_c(s)/\,(N_{pl}(s)\,N_c(s) + D_{pl}(s)\,D_c(s))] \cdot u\,.$$



Полюса системы $z_1, \ldots, z_n$ – корни её характеристического многочлена

$$f_n(s) = \det\,(N_{pl}(s)\,N_c(s) + D_{pl}(s)\,D_c(s)) \text{ –}$$

задают геометрическую интерпретацию принципиальных свойств САУ:

устойчивость: $\operatorname{Re} z_k < 0$;

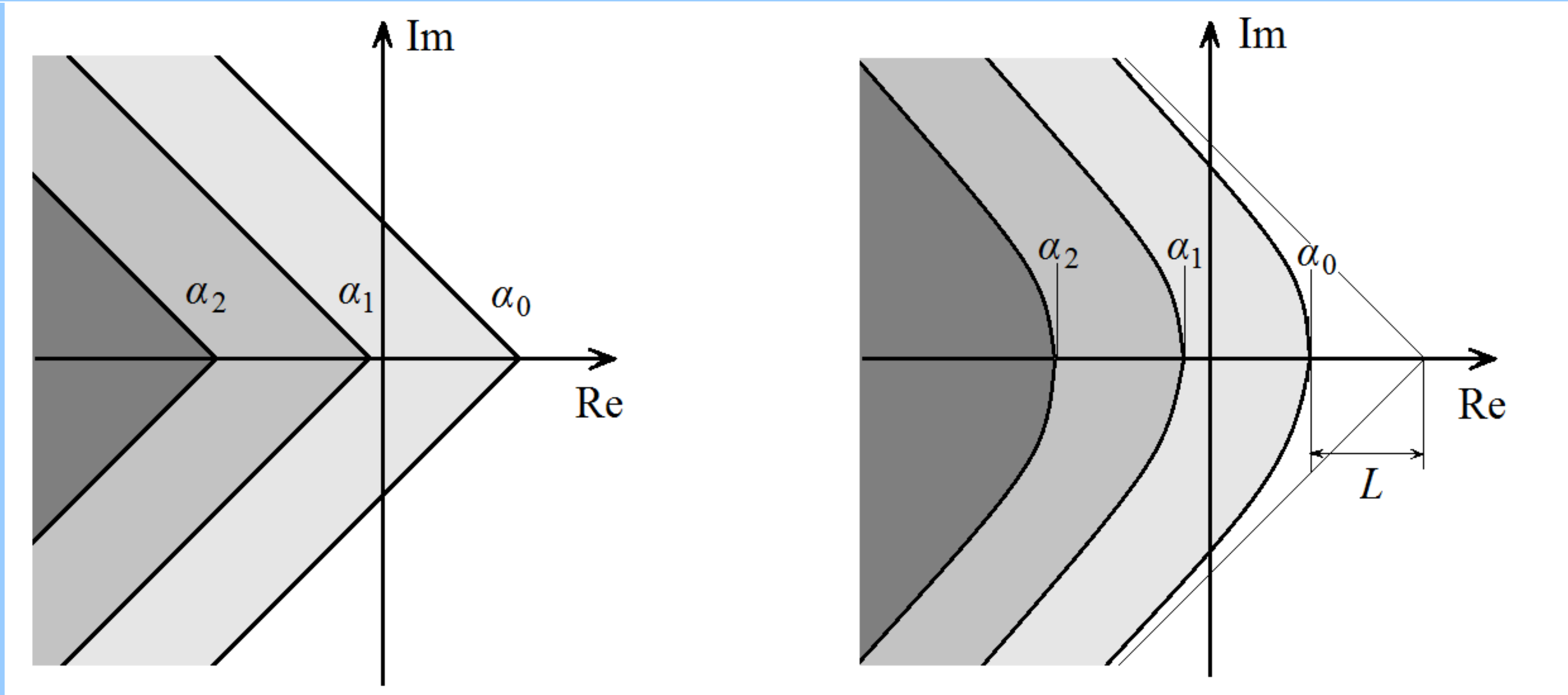
степень, или *запас устойчивости*:

$$\max \operatorname{Re} z_k < -\alpha < 0;$$

ограниченная колебательность:

$$\max |\operatorname{Im} z_k / \operatorname{Re} z_k| \le \beta, \quad \text{и т.д.}$$

В системах *полного порядка* достижимо любое расположение полюсов, однако на практике преобладают САУ *пониженного порядка*, в которых за счёт выбора структуры и параметров C регулятора нужно достигнуть оптимального расположения полюсов.



Оптимизационный принцип: добиваться попадания полюсов в самое левое из семейства вложенных областей фиксированного типа. *Слева* – семейство конического типа, связанное с R-градуировкой $K(C)$. *Справа* – семейство гиперболичных областей, связанное с R-градуировкой $G(C)$. Значение α_k целевой функции задается самой правой точкой области, на границу которой попадают наименее устойчивые полюса (C – вектор параметров регулятора).

Примеры корневых предпорядков:

1) Сравнение по степени устойчивости $z_1 \le_\alpha z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 \le \operatorname{Re} z_2$ используется для достижения максимального запаса устойчивости, достигающийся минимизацией степени устойчивости, или *Гурвицевой функции* $H(C) = \max(\operatorname{Re} z_1; \ldots; \operatorname{Re} z_n)$.

2) Сравнение колебательности с учетом устойчивости

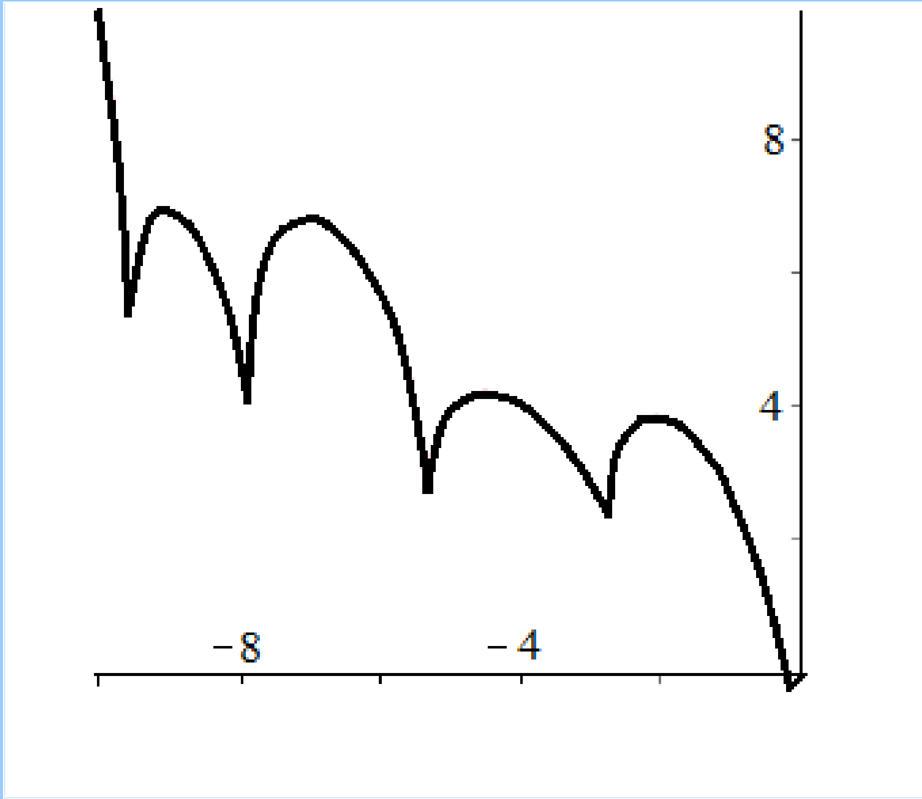
$$z_1 \le_\alpha z_2 \Leftrightarrow \gamma \operatorname{Re} z_1 + |\operatorname{Im} z_1| \le \gamma \operatorname{Re} z_2 + |\operatorname{Im} z_2|;$$

используется при минимизации колебательной составляющей с предотвращением выхода системы на границу устойчивости, достигающейся минимизацией *конической функции* $K(C) = \max(\gamma \operatorname{Re} z_k + |\operatorname{Im} z_k|)$.

3) Сравнение устойчивости с учетом колебательности

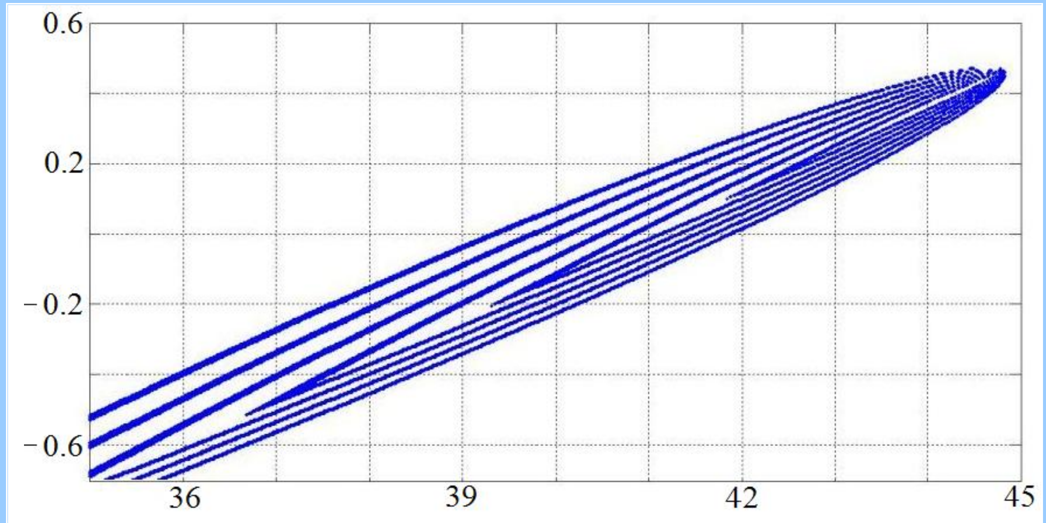
$$z_1 \le_\alpha z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 + \sqrt{L^2 + \gamma \operatorname{Im}^2 z_1} \le \operatorname{Re} z_2 + \sqrt{L^2 + \gamma \operatorname{Im}^2 z_2};$$

используется при максимизации запаса устойчивости с ограничением колебательности; это достигается минимизацией *гиперболичной функции* $G(C) = \operatorname{Re} z_k + \sqrt{L^2 + \lambda \operatorname{Im}^2 z_k} - L$ (близко к усечённому конусу с.2).

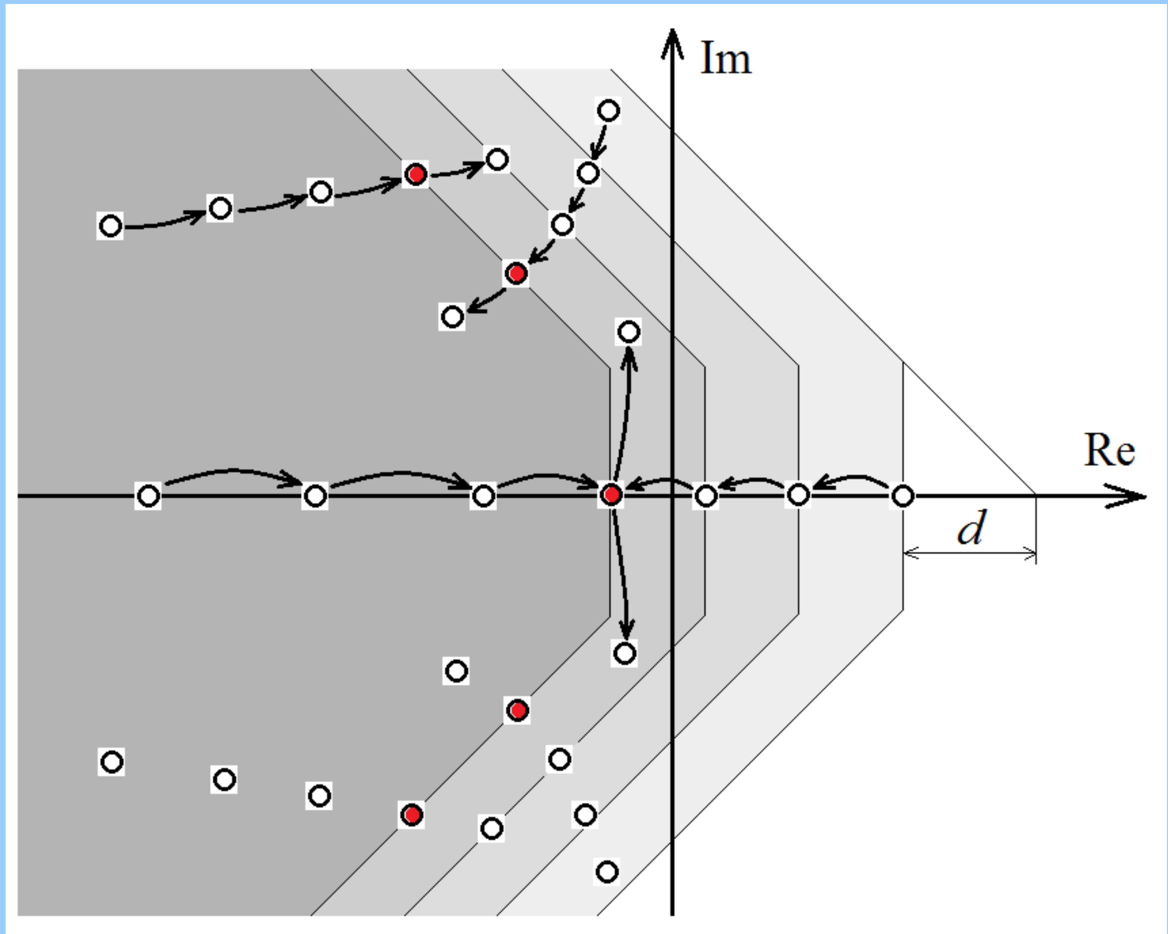


Гурвицева функция $H(x) =$
$= \max \mathrm{Re}\,(z_1, \ldots, z_{11})$, выражающая зависимость степени устойчивости полюсов z_k двойного перевёрнутого маятника от шестикратного характеристического корня x.

Типичные свойства целевых функций корневых расположений:
— невыпуклость;
— многоэкстремальность;
— овражный рельеф;
— недифференцируемость при неограниченном субдифференциале.



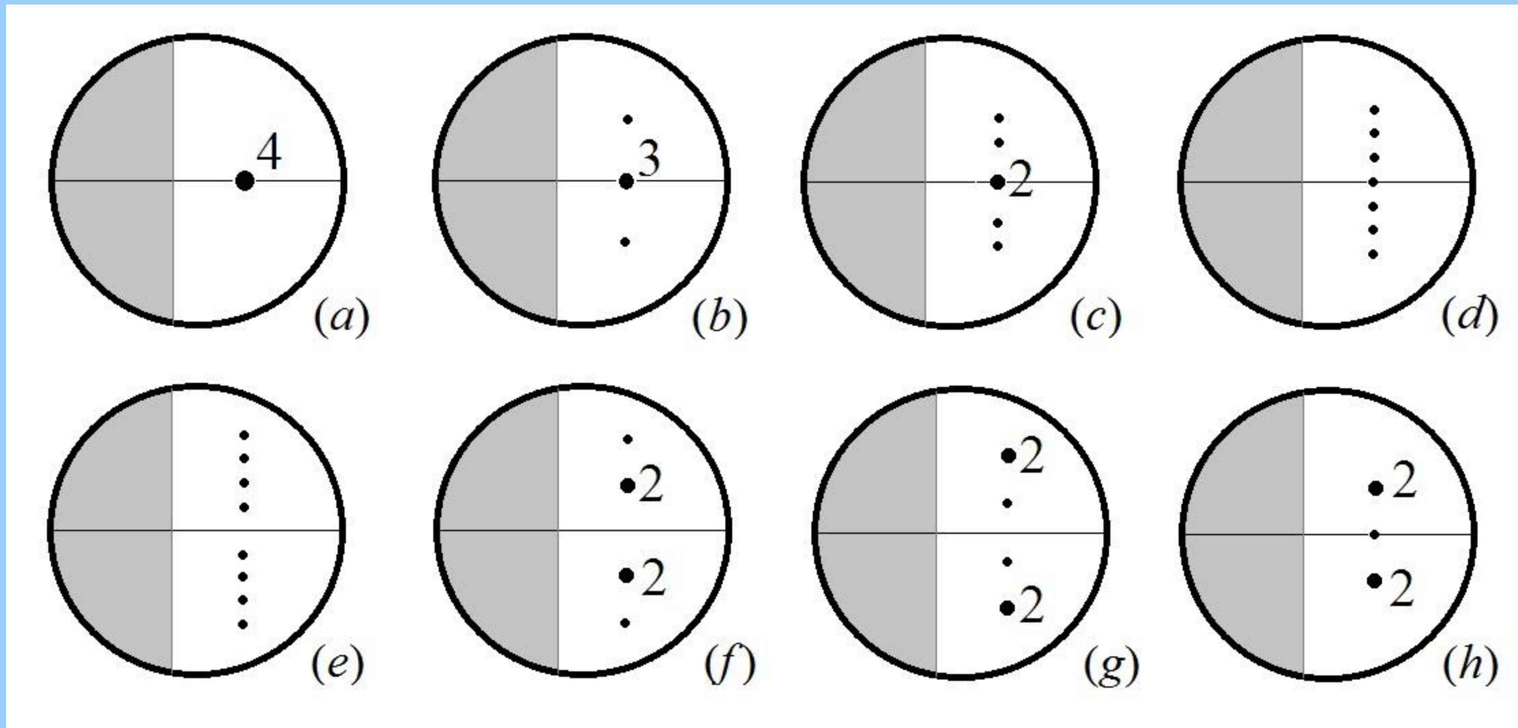
Линии уровня функции $H(p, d)$ для синхронного генератора с АРВ сильного действия (PD)



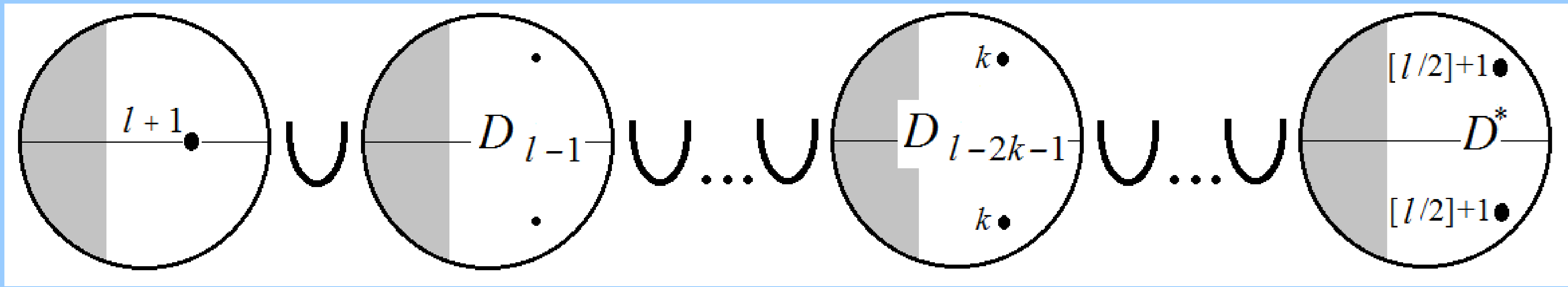
Оптимальные или субоптимальные расположения полюсов характеризуются скоплением максимально возможного их числа на правой границе градуировочной области.

В невырожденных случаях это приводит к связыванию k степеней свободы пространства C параметров управления k равенствами относительно действительных и мнимых частей полюсов.

В свою очередь, схематическое расположение полюсов с их кратностями на правой границе области – «правой вертикали» – представляется *критической корневой диаграммой*.



Критические корневые диаграммы для трёхпараметрической САУ. Кратность корня подписывается рядом с изображающей его точкой. Нахождение корней на одной вертикали указывает на их α-равенство. Расположение прочих корней (кроме α-правых) условно обозначается серым сегментом слева.



Построение множества D_l критических корневых диаграмм порядка l из множеств D_k меньших порядков. Для нечётного числа l диаграмма $D^* = D_0$, для чётного числа l диаграмма D^* пуста.

Теорема 1. Число различных критических корневых диаграмм порядка l (задаваемых l равенствами в пространстве корневых координат), равно числу Фибоначчи φ_{l+3}.

Следствие. Число корневых диаграмм асимптотически растёт как $\sim\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^l$.

Корневые многочлены

Пусть границы градуировочной области описываются

— либо соотношением $\mathrm{Re}\, s = \iota_\alpha(|\mathrm{Im}\, s|)$, где $\iota_\alpha(y)$ – целая алгебраическая функция аргумента $y \geq 0$, причем $\iota_\alpha(0) = \alpha$,

— либо соотношением $\mathrm{Im}\, s = \pm\tau_\alpha(\mathrm{Re}\, s)$, где убывающая функция $\tau_\alpha(x) \geq 0$ аргумента $x \leq \alpha$, причем $\tau_\alpha(\alpha) = 0$ и $\tau_\alpha{}^2(x)$ – целая алгебраическая функция.

Включающие α-правые корни скобки входят в характеристический многочлен как множитель – *корневой многочлен* $p(s)$.

Например, при конической R-градуировке (с. 3 слева) корневые координаты на границе области связаны уравнением $(x-\alpha)^2 = y^2$, и для диаграммы (d) на с. 7 ($x_1 = \alpha$) корневой многочлен равен

$$p(s) = (s - x_1)\prod_{k=1}^{3}(s^2 - 2x_{2k}s + x_{2k}^2 + y_{2k+1}^2) = (s - x_1)\prod_{k=1}^{3}(s^2 - 2x_{2k}s + x_1^2 - 2x_1x_{2k} + 2x_{2k}^2).$$

Соответственно, при гиперболичной R-градуировке (с. 3 справа) связь координат на границе $(x - \alpha - L)^2 - y^2 = L^2$, и для диаграммы ($h$) с. 7 корневой многочлен равен

$$p(s) = (s - x_1)(s^2 - 2x_2s + x_2^2 + y_3^2)^2 = (s - x_1)(s^2 - 2x_2s + 2L(x_1 - x_2) + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2)^2.$$

Лемма 1. Коды корневых многочленов порядка l имеют вид строки с натуральными элементами $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$, где:

1) $a_1 \geq 0$;

2) $a_i \geq a_j \geq 1$ при $1 < i < j$;

3) $a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k - k = l$ <=> $(2a_2 - 1) + \ldots + (2a_k - 1) = l - a_0 + 1$.

Теорема 2. Число различных корневых многочленов, задаваемых l равенствами корневых координат правых полюсов, равно $l+2$-ой частичной сумме последовательности эйлеровых разбиений натуральных чисел, т.е. члену A_{l+2} последовательности A036469:

1, 2, 3, 5, 7, 10, 14, 19, 25, 33, 43, 55, 70, 88, 110, 137, 169, 207, 253, 307, 371, 447, 536, 640, 762, 904, 1069, 1261, 1483, 1739, 2035, 2375, 2765, 3213, 3725, 4310, 4978, 5738, 6602, 7584, 8697, 9957, 11383, 12993, 14809, 16857, 19161, 21751, 24661,…

Замечание (OEIS, Vaclav Kotesovec, 26.02.2015, http://oeis.org/A036469)

Асимптотика последовательности A036469 имеет вид $A_m \sim \dfrac{e^{\pi\sqrt{l/3}}}{2\pi\sqrt[4]{l/3}}$.

Лексикографическое перечисление корневых многочленов: двойной индукцией – по порядку l корневого многочлена и по максимальной кратности r комплексной пары его корней.

Список кодов корневых многочленов порядка $l = 0$ состоит из двух многочленов, коды которых (1) и (0 1).

Список кодов порядка $l > 0$ включает одноэлементную строку $(l + 1)$, и далее по индукции:

при $a_2 = 1$ (т.е. при простых комплексных корнях) список имеет вид

$$(0\,\underbrace{1\ldots1}_{l+1}),\quad (1\,\underbrace{1\ldots1}_{l}),\quad (2\,\underbrace{1\ldots1}_{l-1}),\ldots,\quad (l\ \ 1);$$

список кодов порядка l с элементом $a_2 = r > 1$ (т.е. с комплексными корнями максимальной кратности $r \leq [l/2]+1$) строится из списка кодов порядка $\bar{l} = l - 2r + 1$ вида $(\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \ldots\ \bar{a}_k)$, где $\bar{a}_2 \leq r$, заменой на $(\bar{a}_1\ r\ \bar{a}_2\ \ldots \bar{a}_k)$.

Наконец, если l чётно и $r = l/2+1$ (т.е. $l - 2r + 1 = -1$), то список включает единственную строку $(0\ \ r)$.

Замечание. ***Формула Рамануджана.*** Число разбиений p_l числа $l \in \mathbf{N}$ представляется ближайшим натуральным числом к величине

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}(l-1/24)} - \frac{1}{2(l-1/24)^{3/2}}\right)\exp[\pi\sqrt{2/3\cdot(l-1/24)}\,].$$

Предложение 1. Число корней $m = \deg p(s)$, реализующих корневую диаграмму порядка k, удовлетворяет соотношению $k + 1 \le m \le 2k + 2$.

Характеристический многочлен $f_C(s)$ можно обычным способом поделить с остатком на корневой: $f_C(s) = p_\chi(s)q(s) + r(s)$.

Предложение 2. Пусть коэффициенты приведённого многочлена $f_C(s)$ линейно зависят от параметров регулятора C, а коэффициенты корневого многочлена $p_\chi(s)$ полиномиально зависят от корневых координат χ. Тогда коэффициенты частного $q(s)$ и остатка $r(s)$ линейно зависят от параметров C и полиномиально – от координат χ.

Если конкретная критическая диаграмма реализуется, то характеристический многочлен делится на корневой нацело, т.е. остаток должен быть нулевым: $r(s) = h_{m-1}(C, \chi)s^{m-1} + \ldots + h_1(C, \chi)s + h_0(C, \chi) = 0$.

Приравнивая каждый из коэффициентов остатка к нулю, получим систему $m > k$ алгебраических уравнений относительно корневых координат χ и параметров C регулятора, причем k параметров регулятора будут входить в нее линейно: $h_l(C, \chi) = 0,\ l = 0, 1,\ldots, m-1$.

Предложение 3. Если критическая корневая диаграмма реализуется, то соответствующий ей остаток $r(s)$ задает совместную на полем $\mathbf{R}$ систему уравнений относительно параметров C регулятора и корневых координат χ диаграммы.

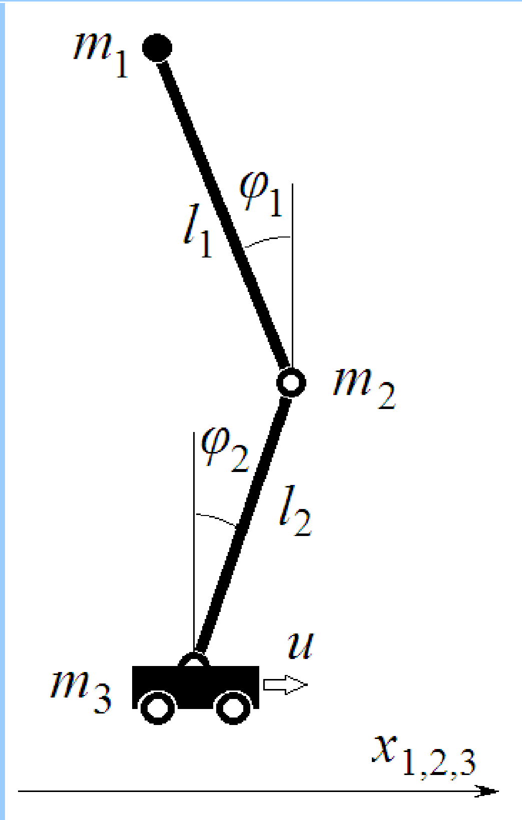
Лемма 2. Пусть $\xi(z_1,\ldots,z_m)$ – симметрический многочлен, обращающийся в ноль при отождествлении некоторой пары переменных: например, $\xi(z_1, z_1, z_3,\ldots,z_m)$. Тогда он делится на дискриминант $\mathbf{\Pi}_{1 \le i < j \le m}(z_i - z_j)^2$.

Следствие. В условиях леммы $\deg \xi(z_1,\ldots,z_m) \ge m(m-1)$.

Лемма 3. Остаток $r_{C,\xi}(s)$ от деления характеристического многочлена $f_C(s)$ на корневой $p_\xi(s)$ не содержит тождественно нулевых коэффициентов.

Замечание. В рассматривавшихся примерах коэффициенты остатка $h_l(C,\chi)=0$ оказывались независимыми.

Теорема 3. Пусть зависимость коэффициентов характеристического многочлена $f_C(s)$ от параметров управления $C=(c_1,\ldots,c_k)$ $(k<n=\deg f_C(s))$ линейна и невырожденна, а корни $z_1,\ldots,z_m$ многочлена $p_\chi(s)$ выражаются через $l<m$ *корневых координат* χ, причем $m\le n<m(m-1)$. Тогда из уравнения $r_{C,\chi}(s)=0$ параметры управления C алгебраически выражаются через корневые координаты χ.



Двойной перевёрнутый маятник на тележке

Малые отклонения двойного перевёрнутого маятника на тележке.

Уравнения объекта в первом приближении:

$$m_1\ddot{x}_1 \simeq m_1 g / l_1 \cdot (x_1 - x_2) - \kappa_1 \dot{x}_1.$$

$$m_2\ddot{x}_2 \simeq (m_1 + m_2) g \cdot (x_2 - x_3) / l_2 - m_1 g / l_1 \cdot (x_1 - x_2) - \kappa_2 \dot{x}_2$$

$$m_3\ddot{x}_3 \simeq (m_1 + m_2) g \cdot (x_3 - x_2) / l_2 - \kappa_3 \dot{x}_3 + u .$$

Уравнения объекта в операционной форме:

$$m_1 x_1 s^2 + \kappa_1 x_1 s - m_1 g / l_1 \cdot (x_1 - x_2) = 0;$$

$$m_2 x_2 s^2 + \kappa_2 x_2 s + m_1 g / l_1 \cdot x_1 - g(m_1 / l_1 +$$

$$+ (m_1 + m_2) / l_2)\, x_2 + (m_1 + m_2) g / l_2 \cdot x_3 = 0;$$

$$m_3 x_3 s^2 + \kappa_3 x_3 s - (m_1 + m_2) g \cdot (x_3 - x_2) / l_2 = u .$$

Матричное уравнение объекта:

$$\begin{pmatrix} m_1 s^2 + \kappa_1 s - g\dfrac{m_1}{l_1} & g\dfrac{m_1}{l_1} & 0 \\ g\dfrac{m_1}{l_1} & m_2 s^2 + \kappa_2 s - g(\dfrac{m_1}{l_1} + \dfrac{m_1 + m_2}{l_2}) & g\dfrac{m_1 + m_2}{l_2} \\ 0 & g\dfrac{m_1 + m_2}{l_2} & m_3 s^2 + \kappa_3 s - g\dfrac{m_1 + m_2}{l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$$

.

Пусть $p_1 = gm_1/l_1$, $p_2 = \mathrm{g}(m_1 + m_2)/l_2$, $\Delta(s)$ – это определитель матрицы, т.е. знаменатель передаточной функции объекта.

Для контролируемой величины $y = x_1$ по правилу Крамера

$$y = p_1 p_2 / \Delta(s) \cdot u$$

Если в системе нет потерь ($\kappa_{1,2,3} \sim 0$), то стабилизация регулятором пониженного порядка невозможна [А.Н. Корюкин].

Зададим параметры маятника следующими: $m_{1,3} = 1$, $m_2 = 2$, $l_{1,2} = 10$, $\kappa_{1,2} = 0.1$, $\kappa_3 = 0.2$, примем постоянную тяготения $g \approx 10$. Числитель объекта при этих значениях параметров $N = p_1\, p_2 = 3$, а знаменатель

$$D(s) = 2s^6 + 0.7s^5 - 11.93s^4 + 2.598s^3 + 11.87s^2 + 1.2s\ .$$

Правильный регулятор типа $n_4(s)/d_4(s)$.

Пусть числитель и знаменатель регулятора будут соответственно

$$n_4(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad d_4(s) = 0.5s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0.$$

Характеристический многочлен системы

$$\begin{gathered} f_{a,b}(s) \approx s^{10} + (0.35 + 2b_3)\, s^9 - (5.965 - 2b_2 - 0.7b_3)\, s^8 - (1.299 - 2b_1 - 0.7b_2 + 11.93b_3)\, s^7 + \\ + (5.935 + 2b_0 + 0.7b_1 - 11.93b_2 - 2.598\, b_3)\, s^6 + (0.6 + 0.7b_0 - 11.93b_1 - 2.598\, b_2 + 11.87b_3) s^5 + \\ + (a_4 - 11.93b_0 - 2.598\, b_1 + 11.87b_2 + 1.2b_3) s^4 + (a_3 - 2.598\, b_0 + 11.87b_1 + 1.2b_2) s^3 + \\ + (a_2 + 11.87b_0 + 1.2b_1) s^2 + (a_1 + 1.2b_0) s + a_0. \end{gathered}$$

Девять варьируемых параметров позволяют достигать выполнения девяти равенств среди самых правых корней. Найдём 10-кратный корень.

Тогда $f_{a,b}(s) = p(s) = (s - x)^{10}$, и из приравнивания коэффициентов получится линейная алгебраическая система из 10 уравнений относительно девяти параметров C регулятора: a_0-a_4, b_0-b_3. Выражая их, имеем:

$$a_0 = x^{10}; \quad a_1 = -18.566 - 17.516x - 164.363x^2 - 25.20x^3; \ldots$$

$$\ldots; b_2 = 3.044 + 1.75x + 22.50x^2; b_3 = -0.175 - 5x.$$

Кроме того, возникает соотношение для самого 10-кратного корня:

$$603.507 + 990.212\,x + 4203.900\,x^2 + 23376\,x^3 + 2352\,x^4 + 8064\,x^5 = 0.$$

Единственный вещественный корень этого уравнения $x \approx -0.06202$.

Соответствующие параметры регулятора таковы:

$$a_0 \approx 8.4200 \cdot 10^{-13}; a_1 \approx -18.108; a_2 \approx -179.614; a_3 \approx 30.687;$$
$$a_4 \approx 145.0634; b_0 \approx 15.090; b_1 \approx 0.4121; b_2 \approx 3.0218; b_3 \approx 0.1351.$$

Запас устойчивости при колебательных решениях

1) Рассмотрим одномерное многообразие, задаваемое условием $x = \mathrm{Re}\ z_{9,10}$, где x – восьмикратный корень. Тогда

$$f_{a,b}(s) = p(s) = (s - x)^8(s^2 - 2xs + x^2 + y^2) = (s - x)^8(s^2 - 2xs + q).$$

Из приравнивания коэффициентов возникает система алгебраических уравнений, линейная по параметрам $C = \{a_0,\dots,a_4,b_0,\dots,b_3\}$ и корневой координате q. Выражая параметры C, получаем:

$$a_0 = qx^8,$$

$$a_1 = -18.566 - 17.516x - 160.71x^2 - 23.52x^3 - 109.2x^4 - 2x^9 - \\ -(3.653 - 1.68x - 16.8x^2 - 8x^7)q; \dots$$

$$b_2 = 3.044 + 1.75x + 0.5q + 22x^2;$$

$$b_3 = -0.175 - 5x.$$

Кроме этого, возникает уравнение, связывающее x и q и линейное по q:

$$934.2 + 15584x + 3136x^2 + 17920x^3)q + 6035.067 + 99021.02x + \\ + 41104.8x^2 + 218176x^3 + 20384x^4 + 62720x^5 = 0.$$

Решая это уравнение совместно с неравенством $q > x^2$, получим значения

$$-0.06202 < x < 0.06043,$$

т.е. правее десятикратного корня.

2) Рассмотрим одномерное многообразие пятикратных комплексных пар $z = x + iy$. Тогда $f_{a,b}(s) = p(s) = (s^2 - 2xs + x^2 + y^2)^5 = (s^2 - 2xs + q)^5$.

Из приравнивания коэффициентов получится линейная алгебраическая система из 10 уравнений, откуда девять параметров $C = \{a_0,\dots,a_4,b_0,\dots,b_3\}$ выражаются через корневые координаты $\chi = \{x, q\}$:

$$a_0 = q^5,$$
$$a_1 = -18.566 - 17.516x - 18.263q - 146.1x^2 - 8.4qx -$$
$$- 16.8x^3 - 6q^2 - 72qx^2 - 48x^4 - 10xq^4; \dots$$
$$b_2 = 3.044 + 1.75x + 2.5q + 20x^2;$$
$$b_3 = -0.175 - 5x.$$

Кроме того, возникает уравнение, связывающее x и q:

$$E(x, q) = (112 + 1920x)q^2 + (467.1 + 7792x + 1344x^2 + 5120x^3)q +$$
$$+ 603.51 + 9902.1x + 3736.8x^2 + 15584x^3 + 896x^4 + 1024x^5 = 0.$$

При условии $q > x^2$ это уравнение имеет вещественные корни $x > -0.06202$, т.е. правее десятикратного корня.

Спасибо за внимание!