p-Адическая квантовая механика и квантовые каналы конспект доклада

Е. И. Зеленов

17 сентября 2015 года

1 Стандартная статистическая модель

- $\mathcal{H}$ – **сепарабельное гильбертово пространство**.
- **Состояние** ρ квантовой системы $\equiv$ оператор плотности в $\mathcal{H}$, $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$.
- Пусть (X, Σ) – некоторое **измеримое пространство**. **Наблюдаемая величина** $\equiv$ проекторно-значная мера E на (X, Σ).
- **Статистический постулат:** вероятностное распределение наблюдаемой E в состоянии ρ дается формулой Борна-фон Неймана

$$\mu_\rho^E(B) = \mathrm{Tr}\rho E(B), B \in \Sigma.$$

$(X, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \equiv$ стандартная статистическая модель квантовой механики.

$(X, \Sigma) = (\mathbb{Q}_p, \mathcal{B}(\mathbb{Q}_p)) \equiv$ p-адическая статистическая модель квантовой механики.

$\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ изоморфны как борелевские пространства.

2 Пример «типичного p-адического» оператора

- $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{Z}_p)$
- $(X, \Sigma) = (\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}(\mathbb{Z}_p))$
- $E(B)f(x) = h_B(x)f(x), B \in \mathcal{B}(\mathbb{Z}_p), x \in \mathbb{Z}_p, f \in \mathcal{H}$

Измеримая функция $F\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ определяет самосопряженный оператор M_F:

$$M_F = \int_{\mathbb{Z}_p} F(\lambda) dE(\lambda), M_F f(x) = F(x)f(x), f \in \mathcal{H}.$$

Через A обозначим C^*-алгебру этого оператора, то есть алгебру, порожденную операторами $E(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{Z}_p)$.

$$A \simeq C(\mathbb{Z}_p) \simeq C\,(\text{канторово подмножество } \mathbb{R}).$$

Таким образом, спектр M_F есть канторовское множество в $\mathbb{R}$ («p-адический спектр» M_F есть $\mathbb{Z}_p$).

3 Квантовые каналы

Обозначим через $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ алгебру всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ и $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ идеал операторов со следом.

Канал $\Phi \equiv$ линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

- Унитарный канал

  $\Phi[\rho] = U\rho U^{-1}$
- Измерение фон Неймана

  $\Phi[\rho] = \sum_j E_j \rho E_j, \{E_j\}$ – оргтогональное разложение единицы
- Разрушающий сцепленность

  $\Phi[\rho] = \sum_j S_j \operatorname{Tr} \rho M_j, \{M_j\}$ – разложение единицы
- Общий вид (разложение Крауса)

  $\Phi[\rho] = \sum_j V\rho V^*, \sum_j V^* V = 1$

4 Аддитивность

χ-Пропускная способность канала Φ (пропускная способность Холево):

$$C_\chi(\Phi) = \sup_{\{\rho_i,\pi_i\}} \left(H\left(\Phi\left[\sum_i \pi_i\rho_i\right]\right) - \sum_i \pi_i H\left(\Phi\left[\rho_i\right]\right)\right)$$

Здесь $H(\rho) = -\operatorname{Tr}\rho\log\rho$ и $\{\rho_i,\pi_i\}$ конечный набор состояний $\{\rho_1,\dots\rho_n\}$ с вероятностями $\{\pi_1,\dots\pi_n\}$.

$$C_\chi\left(\Phi^{\otimes n}\right) =^? nC_\chi(\Phi).$$

- C. King (2001). Аддитивности унитального кубитного канала.
- P. Shor (2003). Аддитивность канала, разрушающего сцепленность, конечномерный случай.
- М. Широков (2009) Аддитивность канала, разрушающего сцепленность, бесконечномерный случай
- M. Hastings (2009). Существование не аддитивного канала.
- А. Холево (2015). Аддитивность ковариантного гауссовского канала.

5 Симплектическая геометрия

Пусть F – двумерное векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$, Δ – невырожденная симплектическая форма на F.

- Решетка $L\equiv$ двумерный $\mathbb{Z}_p$-подмодуль F, $L = p^m\mathbb{Z}_p\bigoplus p^n\mathbb{Z}_p$.
- Двойственная решетка $L^*\equiv\{z\in F, \Delta(z,u)\in\mathbb{Z}_p\forall u\in L\}$, $L^* = p^{-n}\mathbb{Z}_p\bigoplus p^{-m}\mathbb{Z}_p$.
- Самодвойственная решетка $L = L^*$.
- Мера L $|L| = p^{-m-n}$, $L = L^*\equiv|L| = 1$.

6 Представления коммутационных соотношений

Представление коммутационных соотношений в форма Вейля (система Вейля) $(W, \mathcal{H})$

- $W\colon F \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$
- $W(-z) = W^*(z), z \in F$
- $W(z)W(z') = \chi(\Delta(z, z'))W(z')W(z), z, z' \in F$
- $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$ функция $< \phi, W(z)\psi >\colon F \to \mathbb{C}$ измерима.

Здесь $\chi(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$, $x \in \mathbb{Q}_p$.

7 Теорема Бохнера-Хинчина

Функция $f : F \to \mathbb{C}$ положительно определена, если $\forall z_1, \ldots, z_n \in F$ и $\forall c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_i c_i c_j^* f(z_i - z_j) \geq 0.$$

Функция $f : F \to \mathbb{C}$ is Δ-положительно определена, если $\forall z_1, \ldots, z_n \in F$ и $\forall c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_i c_i c_j^* f(z_i - z_j)\chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z_i, z_j)\right) \geq 0.$$

Состояние ρ однозначно определяется своей характеристичекой функцией

$$\pi_\rho(z) = \mathrm{T}r(\rho W(z)).$$

Теорема 1 *Функция $\pi(z)$ является характеристической функцией квантового состояния тогда, и только тогда, когда выполнены условия:*

- $\pi(0) = 1$, $\pi(z)$ *непрерывна в точке* $z = 0$,
- $\pi(z)$ *is Δ-положительно определена.*

Теорема 2 *Пусть L самодвойственная решетка в F. Тогда $\forall$ положительно определенной и непрерывной в точке $z=0$ функции $\pi(z):\pi(0)=1, \operatorname{supp}\pi\subset L$, существует единственное состояние ρ_π такое, что выполнено равенство*

$$\pi(z)=\mathrm{T}r\left(\rho_\pi W(z)\right).$$

$\forall$ состояния ρ в $\mathcal{H}$ существует унитарный оператор U в $\mathcal{H}$ такой, что выполнены условия: $\pi_\rho(z)=\mathrm{T}r\left(U\rho U^{-1}W(z)\right)$ имеет носитель в L и положительно определена.

8 p-Адические гауссовские состояния

Определение 1 *Состояние ρ назовем (центрированным) p-адическим гауссовским состоянием, если его характеристическая функция π_ρ есть индикаторная функция некоторой решетки L:*

$$\pi_\rho=\mathrm{T}r\left(\rho W(z)\right)=h_L.$$

Зададим преобразование Фурье $\mathcal{F}$ в $L^2(F)$ следующей формулой:

$$\mathcal{F}\left[f\right](z)=\int_F\chi\left(\Delta(z,s)\right)f(s)ds.$$

Тогда

$$|L|^{-1/2}\mathcal{F}\left[h_L\right]=|L^*|^{-1/2}h_{L^*}.$$

В частности, индикаторная функция самодвойственной решетки Фурье-инвариантна. Далее используем обозначение $\gamma(L)$ для центрированного гауссовского состояния, определяемого решеткой L and $\gamma(L,\alpha)=W(\alpha)\gamma(L)W(-\alpha)$для общего гауссовского состояния.

Теорема 3 *Индикаторная функция h_L решетки L определяет состояние тогда, и только тогда, когда выполнено неравенство $|L|\leq 1$.*

Гауссовское состояние ρ с характеристической функцией $\pi_\rho=h_L$ есть $|L|P_L$, где P_L ортогональный проектор ранга $1/|L|$.

Теорема 4 *Гауссовские состояния обладают следующими свойствами*

- *Гауссовское состояние является чистым тогда, и только тогда, когда соответствующая ему решетка является самодвойственной.*

- *Энтропия гауссовского состояния равна* $-\log|L|$.
- *Гауссовские состояния* ρ_1 *и* ρ_2 *унитарно эквивалентны тогда, и только тогда, когда выполнено равенство* $|L_1| = |L_2|$.
- *Гауссовские сосстояния имеют максимальную энтропию среди всех состояний фиксированного ранга* $p^m, m \in \mathbb{Z}_+$.

9 p-Адические каналы

Пусть $\Phi\colon \rho \to \Phi[\rho]$ обознаячает некоторый канал.

- Линейный бозонный канал $\equiv$

$$\pi_{\Phi[\rho]}(z) = \pi_\rho(Kz)k(z),$$

  K – линейное преобразование F, $k\colon F \to \mathbb{C}$ – некоторая функция.

- Гауссовский канал $\equiv$бозонный канал с $k(z) = h_L(z)$ для некоторой решетки L.

Теорема 5 *Пусть* K *невырожденное линейное преобразование* F, L *– решетка в* F, $k(z) = h_L(z)$. *Формула* $\pi_{\Phi[\rho]}(z) = \pi_\rho(Kz)k(z)$ *определяет канал тогда, и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$|L||1 - \det K|_p \le 1.$$

Теорема 6 *Для p-адических гауссовских каналов выполнено свойство аддитивности пропускной способности Холево.*

p-Адические гауссовские каналы бывают двух видов

- $\Phi[\rho] = \sum_{a\in I} < \phi_a, \rho\phi_a > \gamma(K'L, a)$

  Здесь $\{\phi_a, a \in I\}$ – ортогональный базис $\mathcal{H}$, K' – симплектически сопряженное к K линейное преобразование.

- $\Phi[\rho] = \sum_{\alpha\in J} P^\alpha U\rho U^{-1} P^\alpha$

  $\{P^\alpha, \alpha \in J\}$ – ортогональное разложение единицы.

p-адический канал с классическим шумом $\Phi_L \equiv$ линейный бозонный канал с $K = \mathrm{I}d$ и $k(z) = h_L, |L| \leq 1$.

Теорема 7 Φ_L *есть идеальное измерение, задаваемое следующим ортогональным разложением единицы:*

$$E = \{E_\alpha, \alpha \in F/L^*\},$$

все проекторы E_α *имеют одинаковый ранг* $|L|^{-1}$*:*

$$\Phi_L[\rho] = \sum_{\alpha \in F/L^*} E_\alpha \rho E_\alpha.$$

Если $L = L^*$, то измерение полно.

Минимальный выигрыш энтропии:

$$G(\Phi) = \inf_\rho \left(H\left(\Phi[\rho]\right) - H(\rho)\right).$$

Теорема 8 *Для p-адического гауссовского бозонного канала с* $\det K \neq 0$ *справедлива следующая формула:*

$$G(\Phi) = \log|\det K|_p.$$