БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА ИНТЕГРИРУЕМОГО СЛУЧАЯ М. АДЛЕРА И П. ВАН МЁРБЕКЕ

ЕКАТЕРИНА О. БИРЮЧЕВА[1] **ПАВЕЛ Е. РЯБОВ**[2]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, 1
e-mail: biryucheva.katerina@gmail.com

[2]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
125993, Российская Федерация, Москва, Ленинградский проспект, 49
e-mail: PERyabov@fa.ru

Семинар «СОВРЕМЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ»
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
14 октября 2015 г., ауд. 14–02.

План доклада

- Список литературы
- Механическая модель
- Уравнения движения (уравнения Ламба–Пуанкаре–Жуковского), скобки Ли-Пуассона, функции Казимира
- Гамильтониан, фазовое пространство
- Дополнительный интеграл
- Представление Лакса и спектральная кривая
- Особенности спектральной кривой, поверхность кратных корней многочленов
- Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента
- Нерешенные задачи

План доклада

- Список литературы
- Механическая модель
- Уравнения движения (уравнения Ламба–Пуанкаре–Жуковского), скобки Ли-Пуассона, функции Казимира
- Гамильтониан, фазовое пространство
- Дополнительный интеграл
- Представление Лакса и спектральная кривая
- Особенности спектральной кривой, поверхность кратных корней многочленов
- Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента
- Нерешенные задачи

План доклада

- Список литературы
- Механическая модель
- Уравнения движения (уравнения Ламба–Пуанкаре–Жуковского), скобки Ли-Пуассона, функции Казимира
- Гамильтониан, фазовое пространство
- Дополнительный интеграл
- Представление Лакса и спектральная кривая
- Особенности спектральной кривой, поверхность кратных корней многочленов
- Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента
- Нерешенные задачи

План доклада

- Список литературы
- Механическая модель
- Уравнения движения (уравнения Ламба–Пуанкаре–Жуковского), скобки Ли-Пуассона, функции Казимира
- Гамильтониан, фазовое пространство
- Дополнительный интеграл
- Представление Лакса и спектральная кривая
- Особенности спектральной кривой, поверхность кратных корней многочленов
- Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента
- Нерешенные задачи

План доклада

- Список литературы
- Механическая модель
- Уравнения движения (уравнения Ламба–Пуанкаре–Жуковского), скобки Ли-Пуассона, функции Казимира
- Гамильтониан, фазовое пространство
- Дополнительный интеграл
- Представление Лакса и спектральная кривая
- Особенности спектральной кривой, поверхность кратных корней многочленов
- Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента
- Нерешенные задачи

План доклада

- Список литературы
- Механическая модель
- Уравнения движения (уравнения Ламба–Пуанкаре–Жуковского), скобки Ли-Пуассона, функции Казимира
- Гамильтониан, фазовое пространство
- Дополнительный интеграл
- Представление Лакса и спектральная кривая
- Особенности спектральной кривой, поверхность кратных корней многочленов
- Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента
- Нерешенные задачи

План доклада

- Список литературы
- Механическая модель
- Уравнения движения (уравнения Ламба–Пуанкаре–Жуковского), скобки Ли-Пуассона, функции Казимира
- Гамильтониан, фазовое пространство
- Дополнительный интеграл
- Представление Лакса и спектральная кривая
- Особенности спектральной кривой, поверхность кратных корней многочленов
- Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента
- Нерешенные задачи

План доклада

- Список литературы
- Механическая модель
- Уравнения движения (уравнения Ламба–Пуанкаре–Жуковского), скобки Ли-Пуассона, функции Казимира
- Гамильтониан, фазовое пространство
- Дополнительный интеграл
- Представление Лакса и спектральная кривая
- Особенности спектральной кривой, поверхность кратных корней многочленов
- Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента
- Нерешенные задачи

План доклада

- Список литературы
- Механическая модель
- Уравнения движения (уравнения Ламба–Пуанкаре–Жуковского), скобки Ли-Пуассона, функции Казимира
- Гамильтониан, фазовое пространство
- Дополнительный интеграл
- Представление Лакса и спектральная кривая
- Особенности спектральной кривой, поверхность кратных корней многочленов
- Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента
- Нерешенные задачи

Список литературы

- *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1978. – **42**, № 2. – С. 396–415.
- *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Труды сем. по вект. и тенз. анализу. – 1979. – **19**. – Москва: Изд-во Моск. Унив. – С. 3–94.
- *Adler M., van Moerbeke P. A.* A new geodesic flow on $so(4)$ // Probability, statistical mechanics and number theory. Advances in mathematics supplementary studies. – 1986. – **9**. – P. 81–96.
- *Reyman A. G. and Semenov-Tian-Shansky M. A.* A New Integrable Case of the Motion of the 4-Dimensional Rigid Body // Commun. Math. Phys. – 1986. – **105**, no. 3. – P. 461–472.

Список литературы

- *Фоменко А. Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 413 с.
- *Болсинов А. В., Борисов А. В.* Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли // Матем. заметки. – 2002. – **72**, № 1. – С. 11–34.
- *Adler M., van Moerbeke P., and Vanhaecke P.* Algebraic Integrability, Painlevė Geometry and Lie Algebras, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 47, Berlin-Heidelberg: Springer, 2004.
- *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 576 с.
- *Адлер В. Э., Марихин В. Г., Шабат А. Б.* Квантовые волчки как примеры коммутирующих дифференциальных операторов // ТМФ. – 2012. – **172**, № 3. – С. 355–374.

Список литературы

- *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. – М.: Факториал, 1995. – 448 с.
- *Трофимов В. В.* Введение в геометрию многообразий с симметриями. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 359 с.
- *Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А.* Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 352 с.
- *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Современные методы теории интегрируемых систем. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 296 с.

Механическая модель

- Движение вокруг неподвижной точки твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, полностью заполненной однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей вихревое движение (Ламб Г., Пуанкаре А., Жуковский Н. Е., Моисеев Н. Н., Румянцев В. В., Богоявленский О. И.)
- Другая интерпретация: интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группе ли $SO(4)$ (Манаков С. В., Мищенко А. С., Фоменко А.Т., М. Адлер, П. Мёрбеке, А. П. Веселов, М. Ланглуа.

Механическая модель

- Движение вокруг неподвижной точки твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, полностью заполненной однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей вихревое движение (Ламб Г., Пуанкаре А., Жуковский Н. Е., Моисеев Н. Н., Румянцев В. В., Богоявленский О. И.)
- Другая интерпретация: интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группе ли $SO(4)$ (Манаков С. В., Мищенко А. С., Фоменко А.Т., М. Адлер, П. Мёрбеке, А. П. Веселов, М. Ланглуа.

Уравнения движения (уравнения Ламба–Пуанкаре–Жуковского)

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{S}}. \tag{1}$$

Здесь трехмерный вектор $\boldsymbol{M}$ имеет смысл кинетического момента системы «тело+жидкость», а компоненты трехмерного вектора $\boldsymbol{S}$ пропорциональны компонентам вектора *завихренности жидкости*.

Скобка Ли-Пуассона

На ко-алгебре $\mathfrak{g} = so(4)^*$ ($so(4) = so(3) \oplus so(3)$) с координатными функциями $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \boldsymbol{S})$ определены скобки Ли-Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, S_j\} = 0, \quad \{S_i, S_j\} = \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk} S_k. \tag{2}$$

Функции Казимира

Скобка (2) имеет две функции Казимира

$$F_1 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) \qquad F_2 = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}). \tag{3}$$

Предварительные сведения

Уравнения движения в гамильтоновой форме

Для заданной функции H от $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{S}$ (которая называется гамильтонианом), соответствующие уравнения с помощью скобки Ли-Пуассона можно записать в гамильтоной форме

$$\dot{x} = \{H, x\}. \qquad (4)$$

Здесь x любая из переменных M_i, S_j.

Фазовое пространство

На совместно уровне

$$\mathcal{P}^4_{a,b} = \{F_1 = a^2,\ F_2 = b^2\} \cong S^2 \times S^2$$

индуцированная скобка Пуассона невырождена и ограничение системы (4) дает гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

Гамильтониан

Рассмотрим следующий гамильтониан

$$\boxed{H = (\boldsymbol{M}, A\boldsymbol{M}) + 2(\boldsymbol{M}, B\boldsymbol{S}) + (\boldsymbol{S}, C\boldsymbol{S})},$$

где диагональные матрицы A, B, C размера 3×3 имеют следующий вид:

$$A = \operatorname{diag}\left[\alpha_2^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_2^2\right];$$

$$B = \operatorname{diag}\left[(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_2\alpha_3, (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_1\alpha_3,\right.$$

$$\left.(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_1\alpha_2\right];$$

$$C = \operatorname{diag}\left[\alpha_2\alpha_3(\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_1^2), \alpha_1\alpha_3(\alpha_1\alpha_3 - 4\alpha_2^2), \alpha_1\alpha_2(\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_3^2)\right].$$

Интегрируемость по Лиувиллю

Дополнительный интеграл

$$K = 3\sum_{i,j}\alpha_i(\alpha_j-\alpha_i)M_jS_jS_i^2+\sum_i(\alpha_i-\alpha_j)(\alpha_i-\alpha_k)M_iS_i^3-$$
$$-(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M})\sum_i[\alpha_j\alpha_kM_iS_i+2(\alpha_j^2+\alpha_k^2)S_i^2].$$

Во втором и третьем выражении мы используем суммирование, введенное С.В. Ковалевской. Здесь индекс i пробегает от 1 до 3 и для заданного i индексы j, k принимают значения из множества $\{1,2,3\}$, не равные i.

Теорема

$$\{H,K\}=0,$$

если

$$\boxed{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0}.$$

Reyman A. G. and Semenov-Tian-Shansky M. A. A New Integrable Case of the Motion of the 4-Dimensional Rigid Body // Commun. Math. Phys. – 1986. – **105**, no. 3. – P. 461–472.

Представление Лакса

$$\dot{L}(z) = [L(z), A],$$

где

$$L(z) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(M_3+S_3) & \frac{1}{2}(M_2+S_2) & -\frac{1}{2}(M_1-S_1) & 0 & 0 & \alpha_1 z \\ \frac{1}{2}(M_3+S_3) & 0 & -\frac{1}{2}(M_1+S_1) & -\frac{1}{2}(M_2-S_2) & 0 & \alpha_2 z & 0 \\ -\frac{1}{2}(M_2+S_2) & \frac{1}{2}(M_1+S_1) & 0 & -\frac{1}{2}(M_3-S_3) & \alpha_3 z & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(M_1-S_1) & \frac{1}{2}(M_2-S_2) & \frac{1}{2}(M_3-S_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 z & 0 & 0 & S_1 & -S_2 \\ 0 & \alpha_2 z & 0 & 0 & -S_1 & 0 & S_3 \\ \alpha_1 z & 0 & 0 & 0 & S_2 & -S_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Спектральная кривая

Спектральная кривая для L–A пары Реймана и Семенова-Тян-Шанского имеет явный вид

$$\mathcal{E}(z,\zeta)\ :\ \boxed{\zeta\cdot\left(\sum_{i=0}^{3} d_{2i}\zeta^{2i}\right)=0}, \qquad (5)$$

где

$$d_6=16;\quad d_4=-16(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)z^2+8(a^2+3b^2);$$

$$d_2=[a^2+3b^2-4(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)z^2]^2;$$

$$d_0=-16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2z^6+4hz^4-4[b^2(b^2+3a^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)+k]z^2+$$
$$+b^2(a^2-b^2)^2.$$

Напомним, что $\boxed{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0}$.

Особенности спектральной кривой

Кривую (5) можно рассматривать как нулевой уровень отображения $\mathcal{E} : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\widetilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^4(a, b, k, h)$ множество таких значений интегральных постоянных для которых 0 является критическим значением отображения $\mathcal{E}$.
Опыт изучения конкретных гамильтоновых систем показывает, что

$$\Sigma \subset \widetilde{\Sigma}$$

и бифуркационное множество Σ выделяется из $\widetilde{\Sigma}$ требованием, чтобы значения интегральных постоянных были действительными. В свою очередь, множество $\widetilde{\Sigma}$ в конечных точках $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ определяется системой уравнений

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{E}(z, \zeta) = 0. \qquad (6)$$

Теорема

Бифуркационная диаграмма Σ *содержится в объединении поверхностей кратных корней многочленов* $P(t)$ *и* $\boldsymbol{Q}(s)$*, где*

$$P(t) = 16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 t^3 - 4ht^2 + [4b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + 4k]t-$$

$$-b^2(a^2 - b^2)^2;$$

$$\boldsymbol{Q}(s) = 16(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2 s^3+$$

$$+12[9h - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)^2(a^2 + 3b^2)]s^2+$$

$$+12[a^2(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)(a^2 - 21b^2) - 9k]s - a^2(a^2 - 9b^2)^2.$$

Особенности спектральной кривой

Теорема

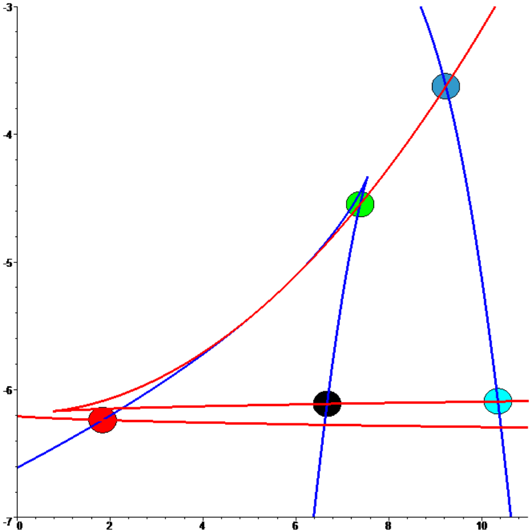
Поверхности кратных корней многочленов $P(t)$ и $Q(s)$ имеют следующее параметрическое представление

$$\gamma_1 : \begin{cases} h(t) = 8\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 t + \dfrac{b^2(a^2-b^2)^2}{4t^2}; \\ k(t) = 4\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 t^2 - b^2(b^2+3a^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2) + \dfrac{b^2(a^2-b^2)^2}{2t}. \end{cases}$$

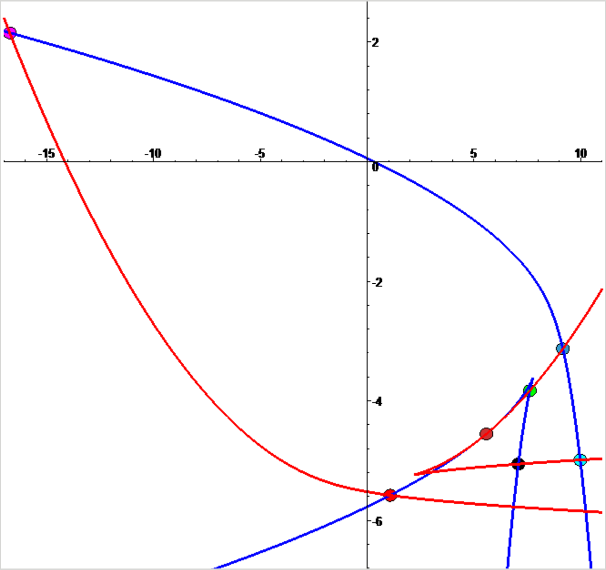
$$\gamma_2 : \begin{cases} h(s) = -\dfrac{8}{27}(\alpha_1-\alpha_2)^2(2\alpha_2+\alpha_1)^2(\alpha_2+2\alpha_1)^2 s - \dfrac{a^2(a^2-9b^2)^2}{108s^2} + \\ +\dfrac{4}{9}(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)^2(a^2+3b^2); \\ k(s) = -\dfrac{4}{27}(\alpha_1-\alpha_2)^2(2\alpha_2+\alpha_1)^2(\alpha_2+2\alpha_1)^2 s^2 - \dfrac{a^2(a^2-9b^2)^2}{54s} + \\ +\dfrac{a^2(a^2-21b^2)}{9}(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2). \end{cases}$$

Динамика дискриминантного множества

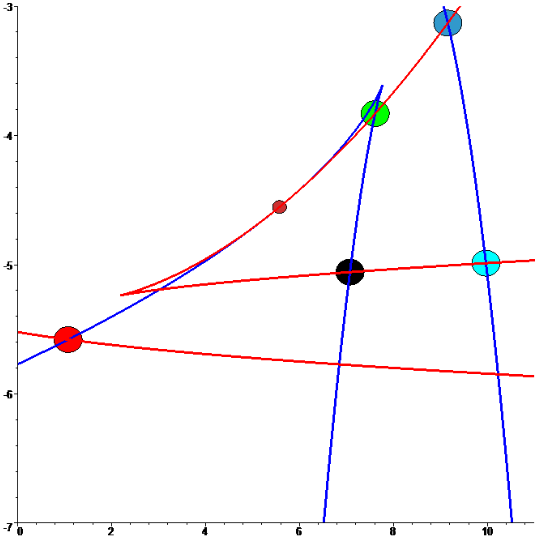
Проблема



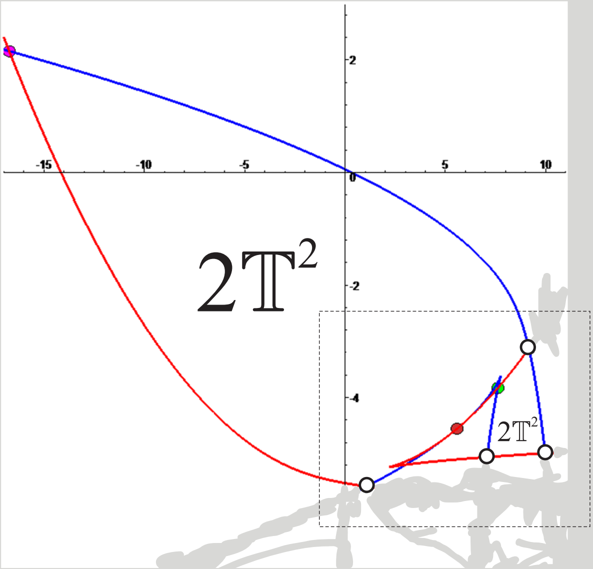
Проблема



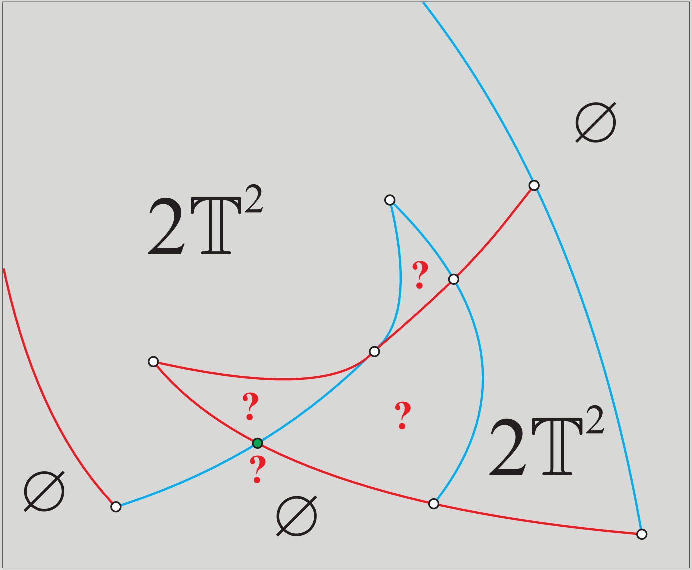
Проблема



Возможная диаграмма

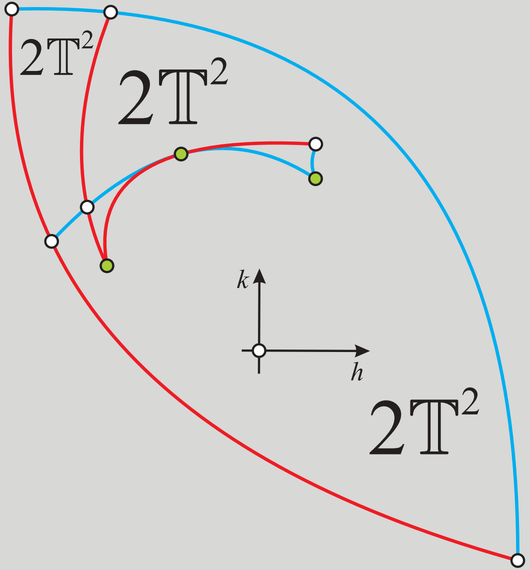


Возможная диаграмма



Динамика бифуркационной диаграммы

Бифуркационная диаграмма



Задачи

- Изучить топологический тип $Q^3_h = \{x \in \mathcal{P} : H(x) = h\}$;
- Изучить “предельные дискриминантные (бифуркационные) диаграммы”;
- Представить критическое множество в виде объединения критических подсистем;
- Описать вырожденные особенности ранга 1;
- Дать классификацию невырожденных особенностей ранга 1;
- В зависимости от значений параметров построить атлас бифуркационных диаграмм.
- Исследовать бифуркации торов;
- Построить (грубый) инвариант Фоменко
- Построить тонкий инвариант Фоменко-Цишанга.
- Исследовать устойчивость критических периодических движений и дать механическую интерпретацию.

Задачи

- Изучить топологический тип $Q^3_h = \{x \in \mathcal{P} : H(x) = h\}$;
- Изучить “предельные дискриминантные (бифуркационные) диаграммы”;
- Представить критическое множество в виде объединения критических подсистем;
- Описать вырожденные особенности ранга 1;
- Дать классификацию невырожденных особенностей ранга 1;
- В зависимости от значений параметров построить атлас бифуркационных диаграмм.
- Исследовать бифуркации торов;
- Построить (грубый) инвариант Фоменко
- Построить тонкий инвариант Фоменко-Цишанга.
- Исследовать устойчивость критических периодических движений и дать механическую интерпретацию.

Задачи

- Изучить топологический тип $Q_h^3 = \{x \in \mathcal{P} : H(x) = h\}$;
- Изучить “предельные дискриминантные (бифуркационные) диаграммы”;
- Представить критическое множество в виде объединения критических подсистем;
- Описать вырожденные особенности ранга 1;
- Дать классификацию невырожденных особенностей ранга 1;
- В зависимости от значений параметров построить атлас бифуркационных диаграмм.
- Исследовать бифуркации торов;
- Построить (грубый) инвариант Фоменко
- Построить тонкий инвариант Фоменко-Цишанга.
- Исследовать устойчивость критических периодических движений и дать механическую интерпретацию.

Задачи

- Изучить топологический тип $Q^3_h = \{x \in \mathcal{P} : H(x) = h\}$;
- Изучить “предельные дискриминантные (бифуркационные) диаграммы”;
- Представить критическое множество в виде объединения критических подсистем;
- Описать вырожденные особенности ранга 1;
- Дать классификацию невырожденных особенностей ранга 1;
- В зависимости от значений параметров построить атлас бифуркационных диаграмм.
- Исследовать бифуркации торов;
- Построить (грубый) инвариант Фоменко
- Построить тонкий инвариант Фоменко-Цишанга.
- Исследовать устойчивость критических периодических движений и дать механическую интерпретацию.

Задачи

- Изучить топологический тип $Q_h^3 = \{x \in \mathcal{P} : H(x) = h\}$;
- Изучить “предельные дискриминантные (бифуркационные) диаграммы”;
- Представить критическое множество в виде объединения критических подсистем;
- Описать вырожденные особенности ранга 1;
- Дать классификацию невырожденных особенностей ранга 1;
- В зависимости от значений параметров построить атлас бифуркационных диаграмм.
- Исследовать бифуркации торов;
- Построить (грубый) инвариант Фоменко
- Построить тонкий инвариант Фоменко-Цишанга.
- Исследовать устойчивость критических периодических движений и дать механическую интерпретацию.

Задачи

- Изучить топологический тип $Q^3_h = \{x \in \mathcal{P} : H(x) = h\}$;
- Изучить “предельные дискриминантные (бифуркационные) диаграммы”;
- Представить критическое множество в виде объединения критических подсистем;
- Описать вырожденные особенности ранга 1;
- Дать классификацию невырожденных особенностей ранга 1;
- В зависимости от значений параметров построить атлас бифуркационных диаграмм.
- Исследовать бифуркации торов;
- Построить (грубый) инвариант Фоменко
- Построить тонкий инвариант Фоменко-Цишанга.
- Исследовать устойчивость критических периодических движений и дать механическую интерпретацию.

Задачи

- Изучить топологический тип $Q^3_h = \{x \in \mathcal{P} : H(x) = h\}$;
- Изучить “предельные дискриминантные (бифуркационные) диаграммы”;
- Представить критическое множество в виде объединения критических подсистем;
- Описать вырожденные особенности ранга 1;
- Дать классификацию невырожденных особенностей ранга 1;
- В зависимости от значений параметров построить атлас бифуркационных диаграмм.
- Исследовать бифуркации торов;
- Построить (грубый) инвариант Фоменко
- Построить тонкий инвариант Фоменко-Цишанга.
- Исследовать устойчивость критических периодических движений и дать механическую интерпретацию.

Задачи

- Изучить топологический тип $Q_h^3 = \{x \in \mathcal{P} : H(x) = h\}$;
- Изучить “предельные дискриминантные (бифуркационные) диаграммы”;
- Представить критическое множество в виде объединения критических подсистем;
- Описать вырожденные особенности ранга 1;
- Дать классификацию невырожденных особенностей ранга 1;
- В зависимости от значений параметров построить атлас бифуркационных диаграмм.
- Исследовать бифуркации торов;
- Построить (грубый) инвариант Фоменко
- Построить тонкий инвариант Фоменко-Цишанга.
- Исследовать устойчивость критических периодических движений и дать механическую интерпретацию.

Задачи

- Изучить топологический тип $Q_h^3 = \{x \in \mathcal{P} : H(x) = h\}$;
- Изучить “предельные дискриминантные (бифуркационные) диаграммы”;
- Представить критическое множество в виде объединения критических подсистем;
- Описать вырожденные особенности ранга 1;
- Дать классификацию невырожденных особенностей ранга 1;
- В зависимости от значений параметров построить атлас бифуркационных диаграмм.
- Исследовать бифуркации торов;
- Построить (грубый) инвариант Фоменко
- Построить тонкий инвариант Фоменко-Цишанга.
- Исследовать устойчивость критических периодических движений и дать механическую интерпретацию.

Задачи

- Изучить топологический тип $Q^3_h = \{x \in \mathcal{P} : H(x) = h\}$;
- Изучить “предельные дискриминантные (бифуркационные) диаграммы”;
- Представить критическое множество в виде объединения критических подсистем;
- Описать вырожденные особенности ранга 1;
- Дать классификацию невырожденных особенностей ранга 1;
- В зависимости от значений параметров построить атлас бифуркационных диаграмм.
- Исследовать бифуркации торов;
- Построить (грубый) инвариант Фоменко
- Построить тонкий инвариант Фоменко-Цишанга.
- Исследовать устойчивость критических периодических движений и дать механическую интерпретацию.