

# Стохастический резонанс

Илья Павлюкевич

Йенский университет имени Фридриха Шиллера



---

seit 1558

МГУ им. М. В. Ломоносова, 14 октября 2015

– Typeset by FoilTEX –

# Йенский университет

|                                |      |         |
|--------------------------------|------|---------|
| (Charles University in Prague  | 1348 | 50,000) |
| Heidelberg University          | 1386 | 31,500  |
| Leipzig University             | 1409 | 29,500  |
| University of Rostock          | 1419 | 14,000  |
| University of Greifswald       | 1456 | 12,000  |
| University of Freiburg         | 1457 | 20,500  |
| University of Munich           | 1472 | 44,000  |
| University of Tübingen         | 1477 | 23,500  |
| University of Halle-Wittenberg | 1502 | 18,500  |
| University of Marburg          | 1527 | 24,000  |
| University of Jena             | 1558 | 21,000  |





## Свидетели иных климатических состояний

Эрратические валуны (ледниковые камни) переносились ледником или плавучим льдом, оторвавшимся от ледника, на значительные расстояния от коренных выходов материнских пород



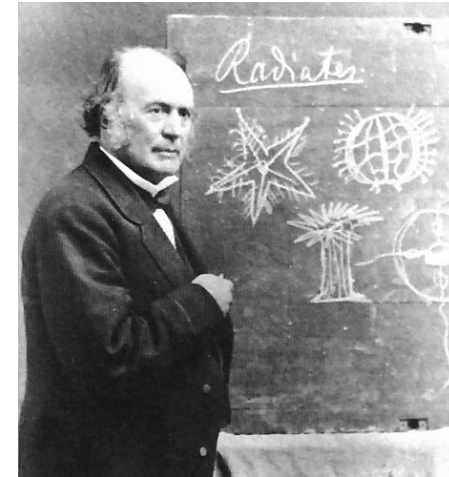
Иоганн Шарпентьер  
(1786–1855)

Горный инженер  
Фрайберг, Бекс



Л. Агассис  
(1807–1873)

Геолог  
Нёшатель, Гарвард



Также: Игнац Венец (1822), Карл Шимпер (1835)

## Антарктические данные

Антарктика  
Станция “Восток”  
Среднегодовая  
температура  
 **$-55\text{ }^{\circ}\text{C}$**   
Высота над уровнем  
моря 3488 м

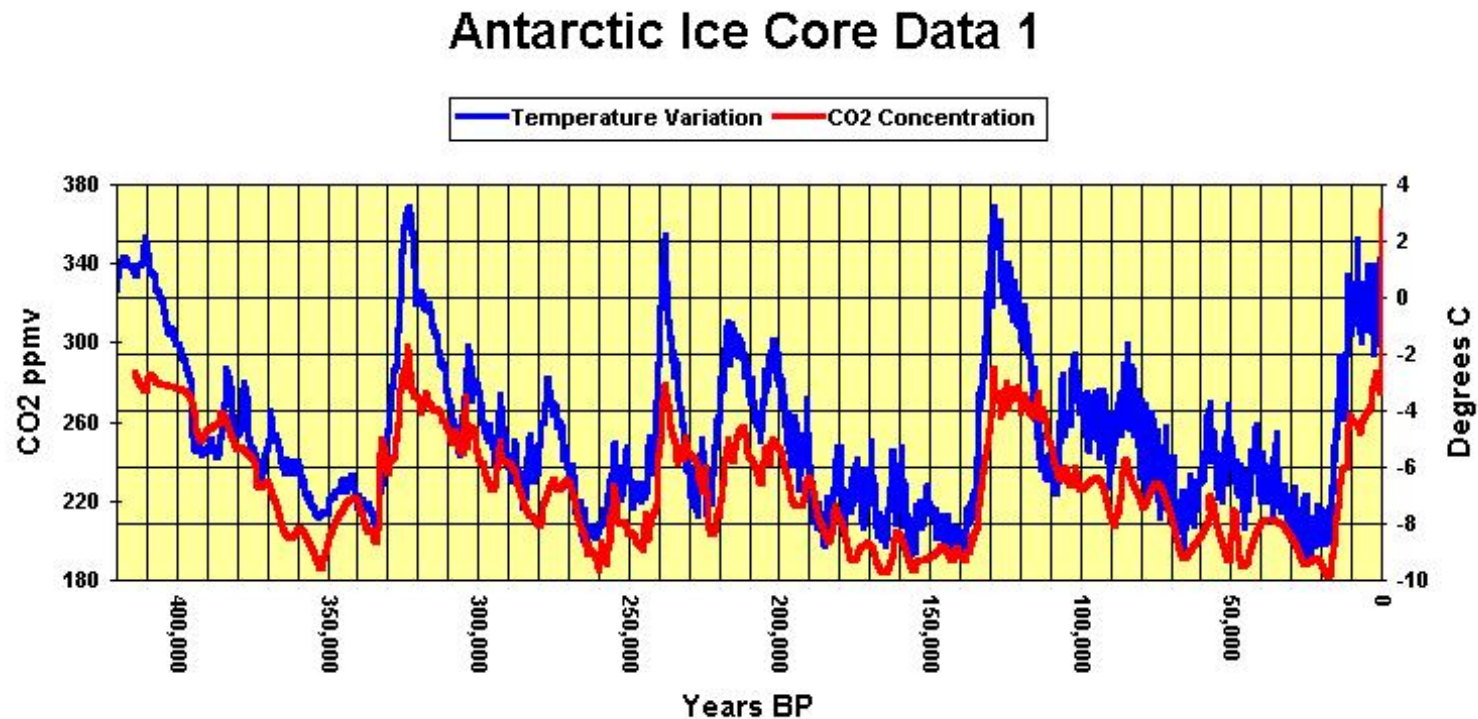


Толщина льда 3730 м  
Возраст около 420 000 лет



# Температура Земли

Отношение концентраций изотопов  $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$  позволяет восстановить температуру.



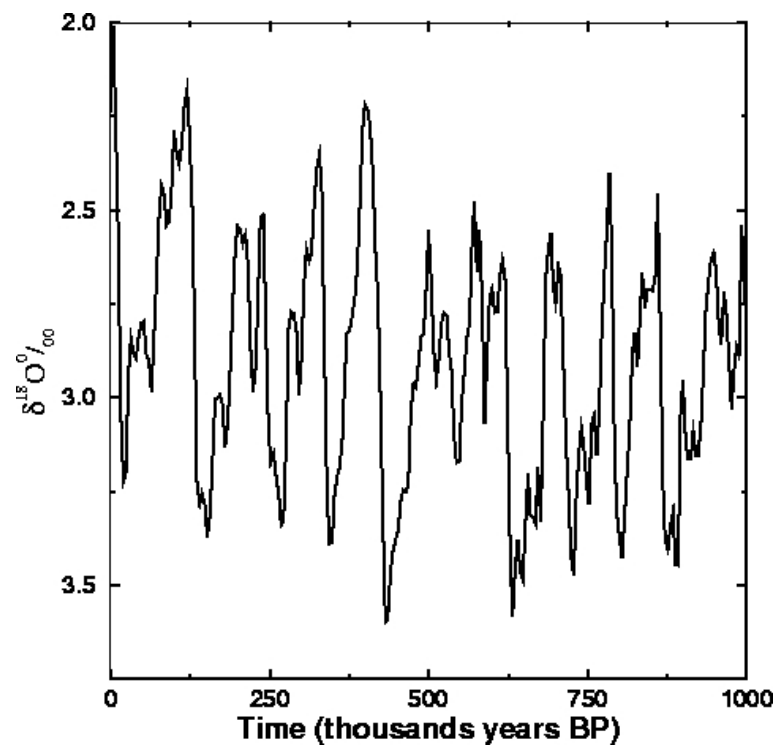
Четыре ледниковые эпохи.

Относительно быстрые переходы к межледниковым периодам.

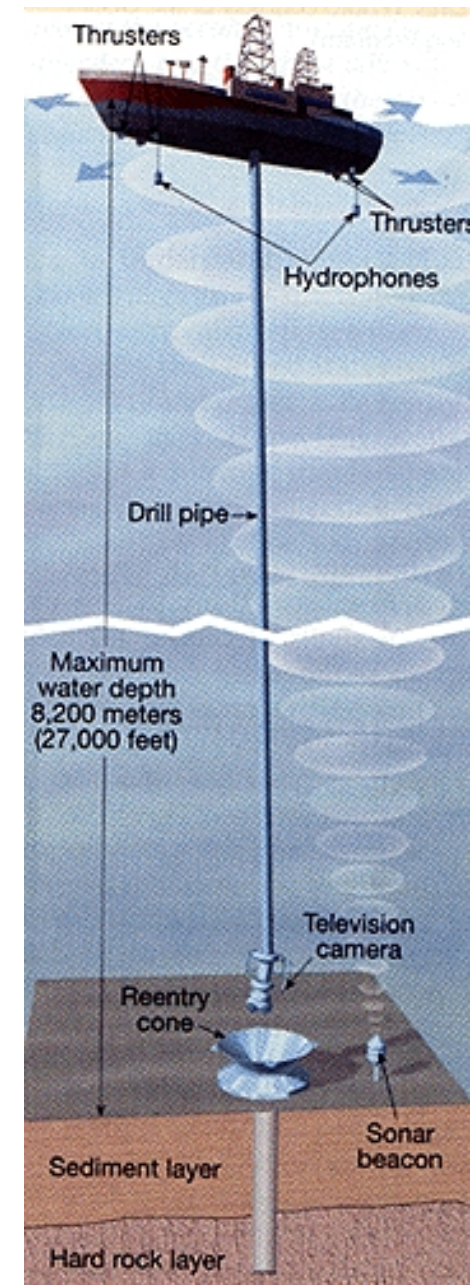
Текущий межледниковый период — голоцен — начался около 10 000 лет назад.

## Анализ осадочных пород

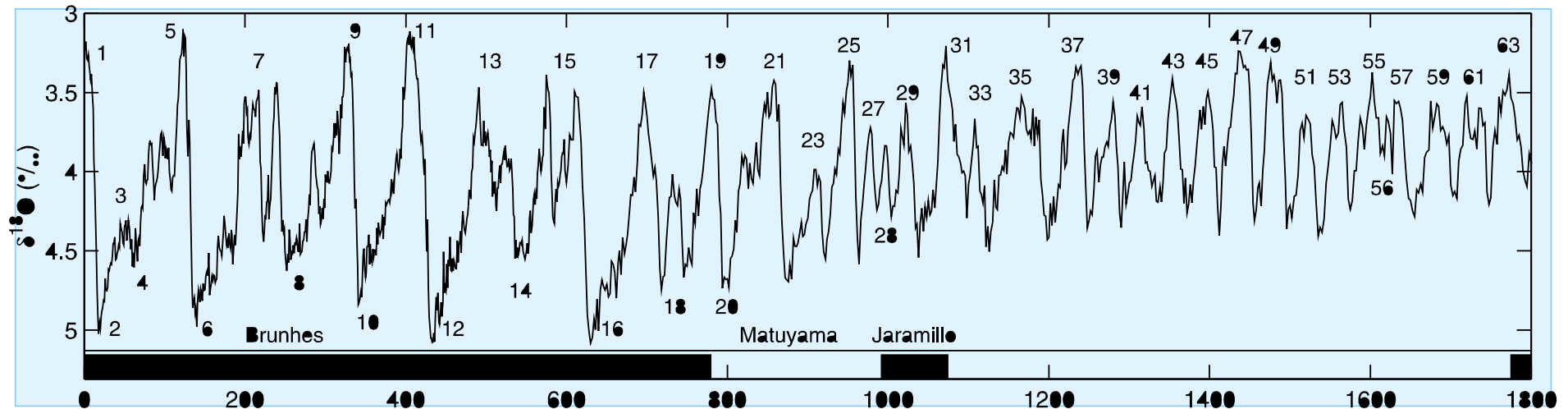
Информация о климате за последний 1 000 000 лет:



10 ледниково-межледниковых циклов.



## Исследования палеоклимата



Lisiecki and Raymo (Paleoceanography, 20, 2005): статистический анализ изменения концентрации изотопов  $^{18}O$  и  $^{16}O$  из океанических отложений 57 на основании данных из 57 различных источников.

Интересные особенности:

- от 0 до  $-1$  миллиона лет: период около 100 000 лет
- от  $-1$  до  $-1.8$  миллиона лет: период около 45 000 лет

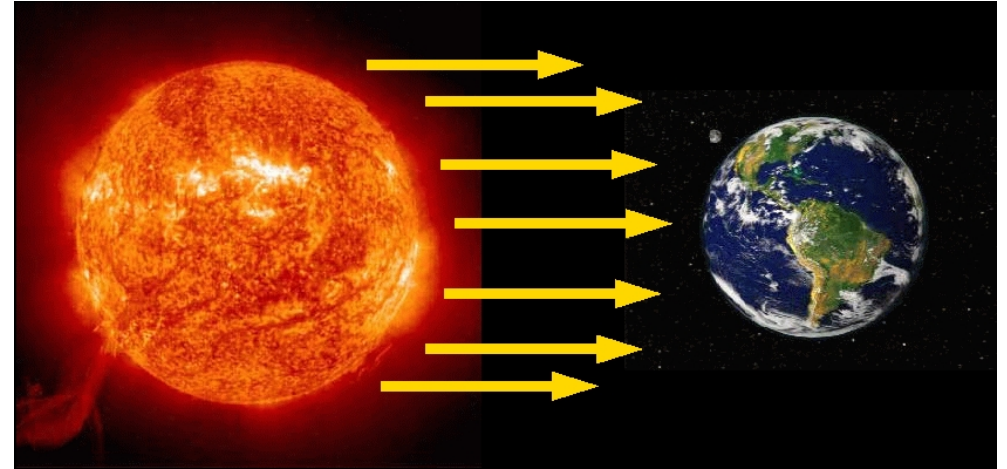
Как объяснить периодичность?

## Астрономические факторы

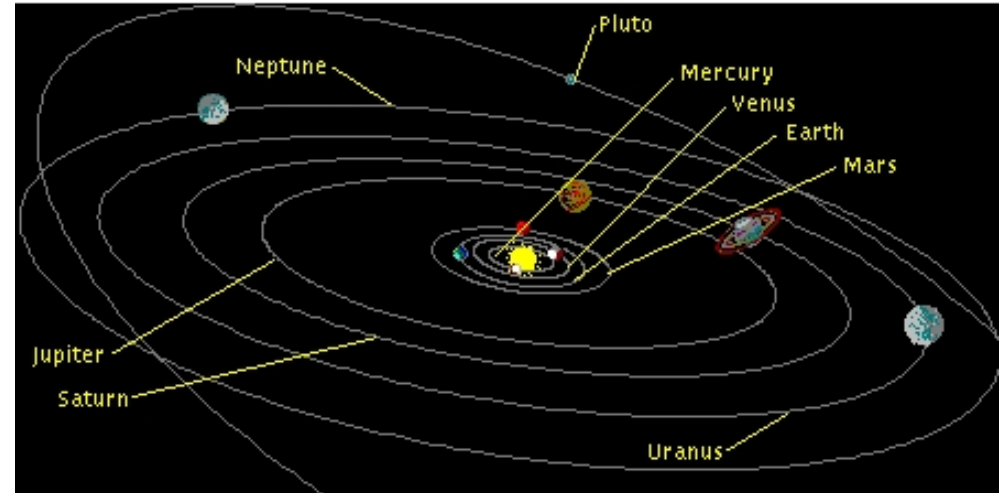
Источник энергии — Солнце.

Солнечная постоянная

$$Q \approx 1366 \text{ W/m}^2$$



Планеты движутся по эллиптическим орбитам.



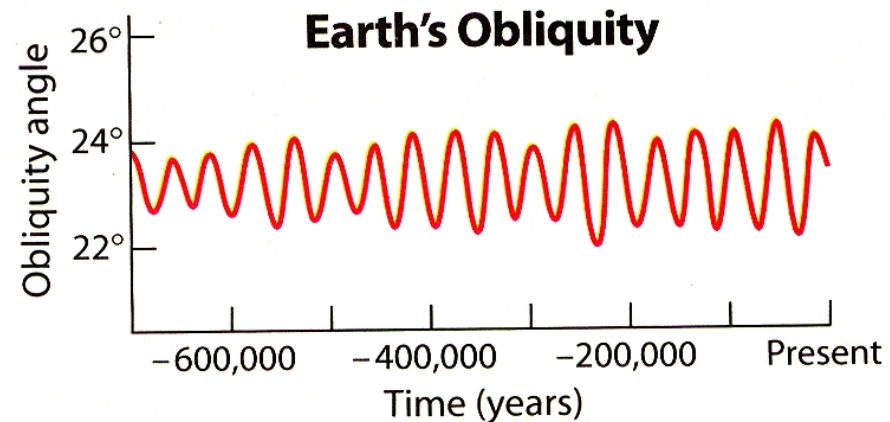
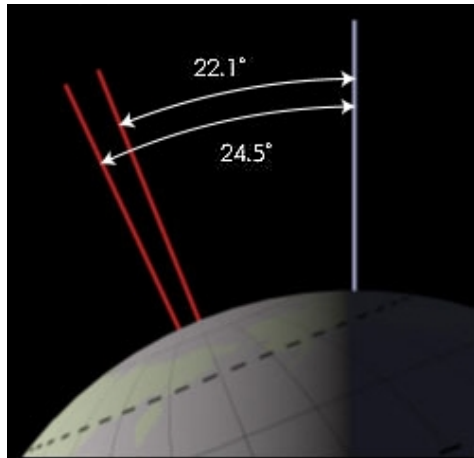
Количество солнечной энергии зависит, в частности, от расстояния между Землей и Солнцем и от угла падения лучей Солнца на поверхность.

Существуют ли астрономические процессы с периодами 100 000 или 45 000 лет?

## Циклы Миланковича

Миланкович (1920): Причина колебаний достигающего Земли количества солнечного излучения на Земле:

Прецессия (25 750 лет), нутация (41 000) и колебания эксцентриситета орбиты Земли (93 000 лет).

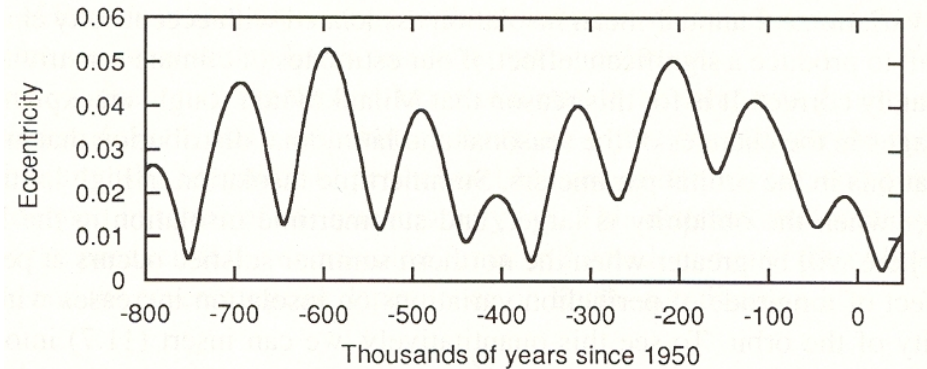
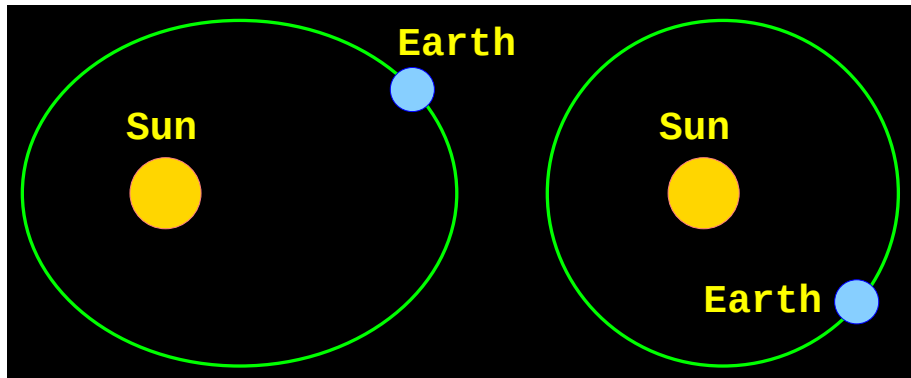


Нутация: колебания угла наклона земной оси к плоскости её орбиты с периодом около 41 000 лет

Большой наклон влечёт большую сезональную разницу получаемой энергии.

## Циклы Миланковича

Эксцентриситет орбиты Земли: 93 000 лет



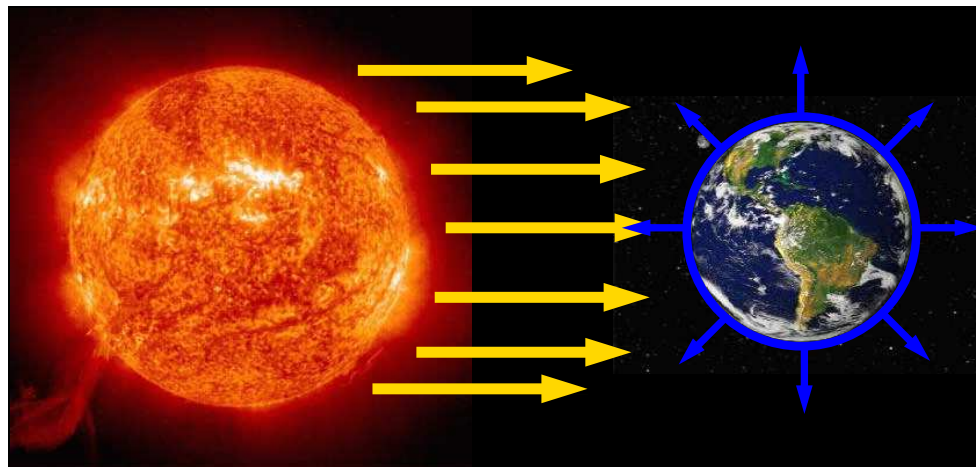
Причина: влияние Юпитера и Сатурна  
В настоящее время: 0.017.

При больших значениях эксцентриситета времена года вдали от Солнца делятся дольше.

Математическая модель: упрощённое уравнение радиационного баланса

$$c \frac{d}{dt} T_t = R_{\text{in}} - R_{\text{out}}$$

- $T$  — усреднённая температура Земли
- $t$  — время
- $c$  — теплоёмкость
- $R_{\text{in}}$  — поглощённая радиация
- $R_{\text{out}}$  — эффективное излучение



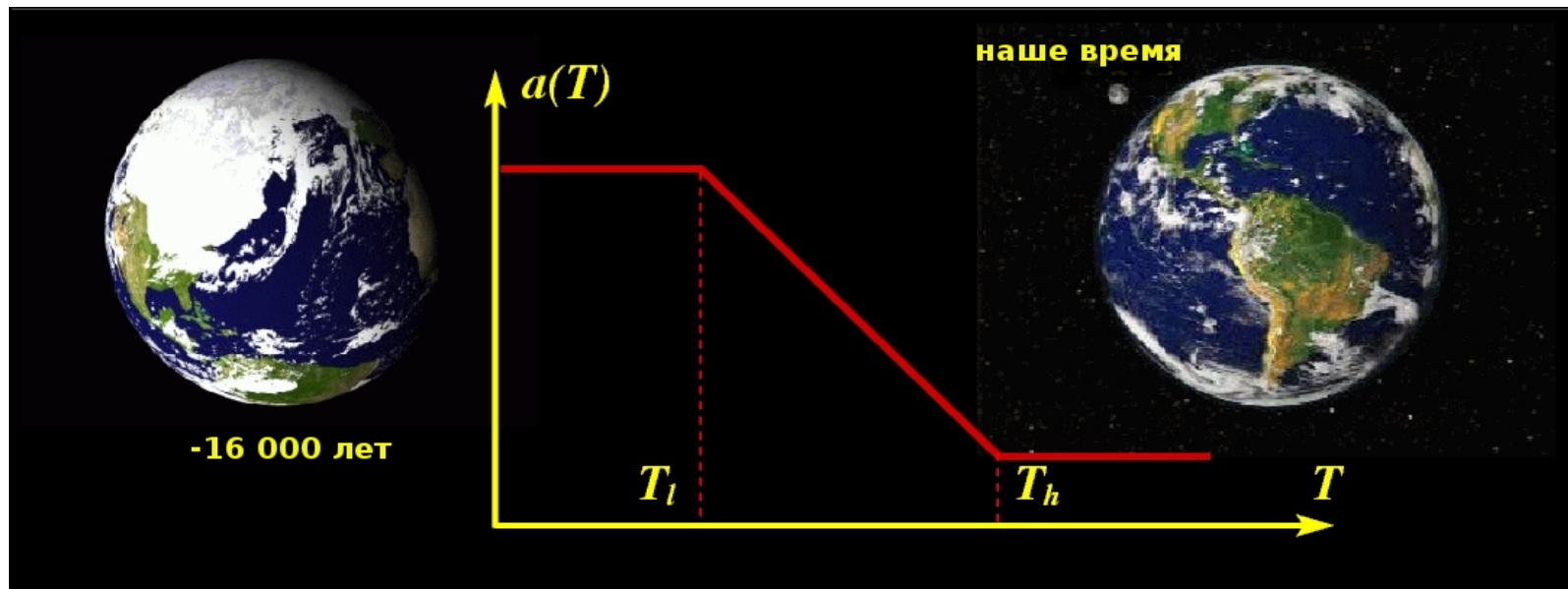
По работам: Benzi, Parisi, Sutura, Vulpiani ('81,'82,'83); C. Nicolis ('82)

Поглощённая радиация  $R_{\text{in}}$  (модель Будыко–Селлерса '69)

$$R_{\text{in}} = Q(1 - a(T))$$

- $Q(t) = Q_0(1 + A \sin \Omega t)$
- $\Omega = \frac{2\pi}{100\,000} \left[ \frac{1}{\text{год}} \right]$ ,  $A$  малая величина,  $A \approx 0.001$
- альбеда

$$a(T) = \frac{\text{отражённая солнечная радиация}}{\text{солнечная радиация, приходящая на внешнюю границу атмосферы}}$$



Свежий снег 0.75–0.95, трава 0.12–0.30, лес 0.05–0.20

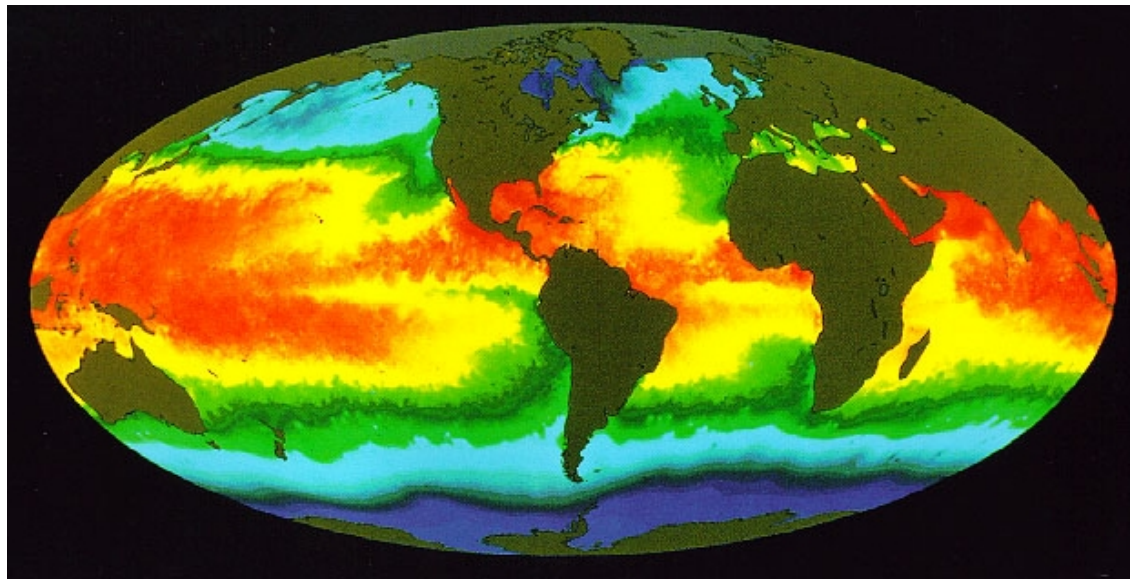
## Эффективное излучение $R_{\text{out}}$

Предположим, что Земля — это чёрное тело

Закон Стефана–Больцмана — интегральный закон излучения абсолютно чёрного тела

$$R_{\text{out}} = \sigma T^4$$

- $T$  — температура Земли (в настоящее время около  $15^\circ\text{C}$ )
- $\sigma = 5.669 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$  — постоянная Стефана–Больцмана

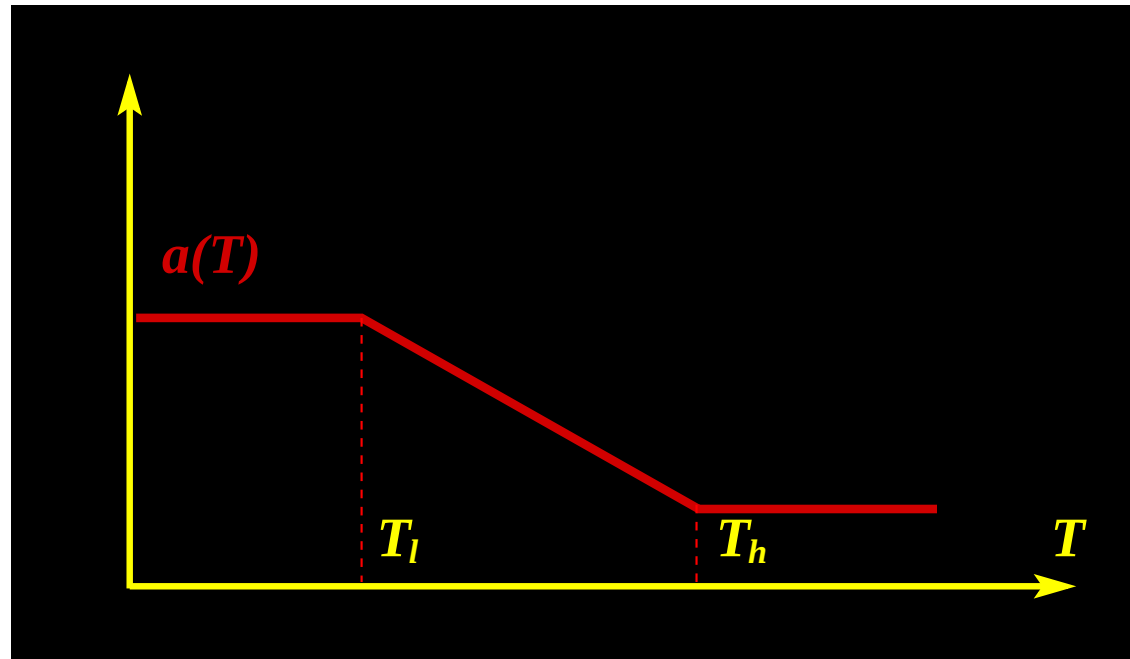


# Равновесные состояния

$$T'_t = 0$$

$$cT'_t = R_{\text{in}} - R_{\text{out}} = 0$$

$$cT'_t = Q(t)(1 - a(T_t)) - \sigma T_t^4 = 0$$

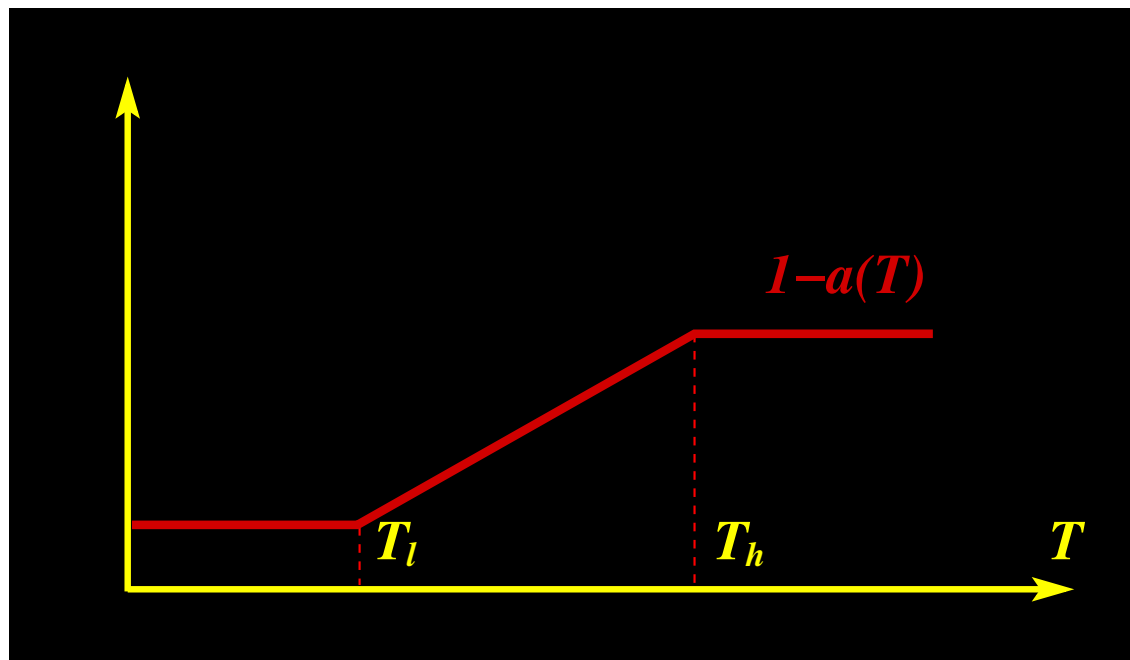


# Равновесные состояния

$$T'_t = 0$$

$$cT'_t = R_{\text{in}} - R_{\text{out}} = 0$$

$$cT'_t = Q(t)(1 - a(T_t)) - \sigma T_t^4 = 0$$

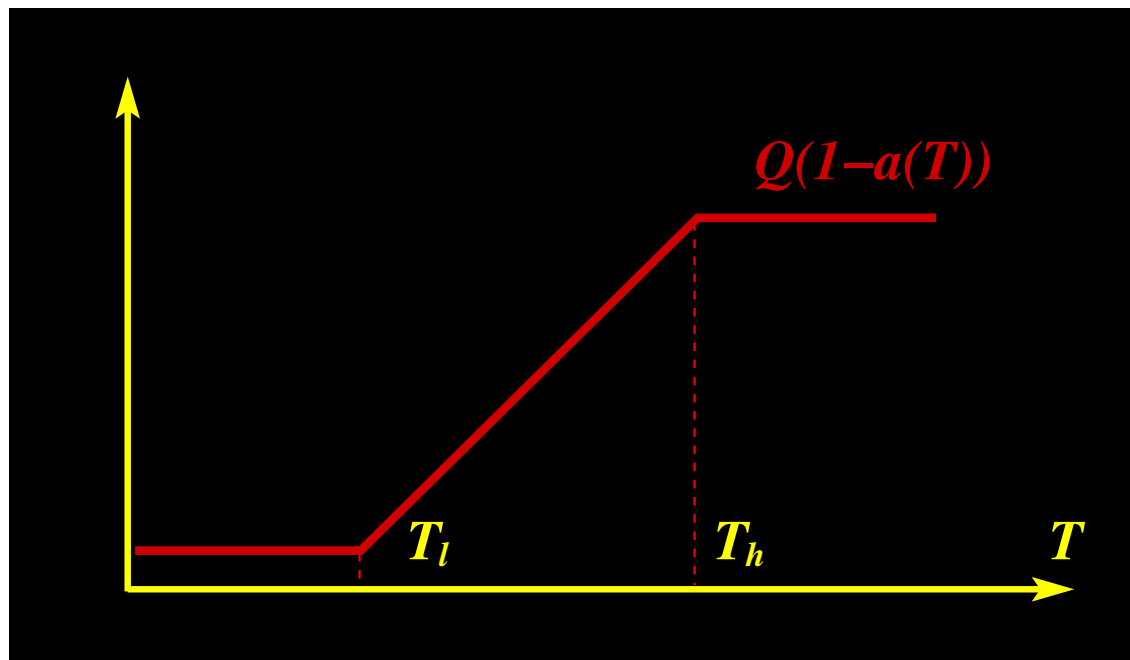


# Равновесные состояния

$$T'_t = 0$$

$$cT'_t = R_{\text{in}} - R_{\text{out}} = 0$$

$$cT'_t = Q(t)(1 - a(T_t)) - \sigma T_t^4 = 0$$

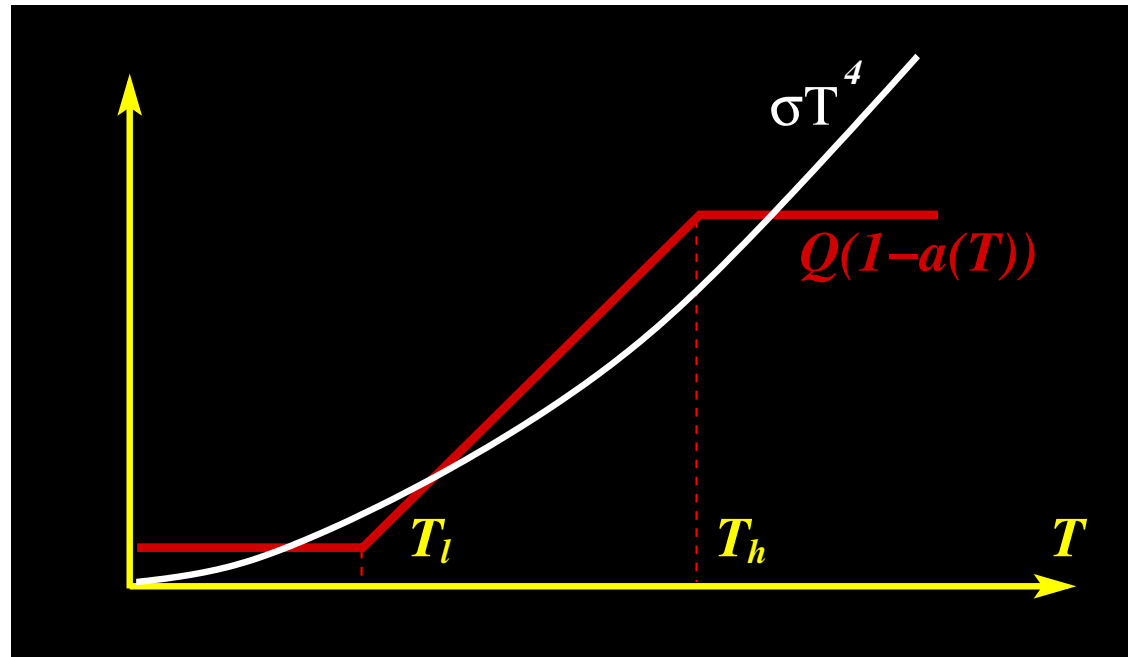


# Равновесные состояния

$$T'_t = 0$$

$$cT'_t = R_{\text{in}} - R_{\text{out}} = 0$$

$$cT'_t = Q(t)(1 - a(T_t)) - \sigma T_t^4 = 0$$

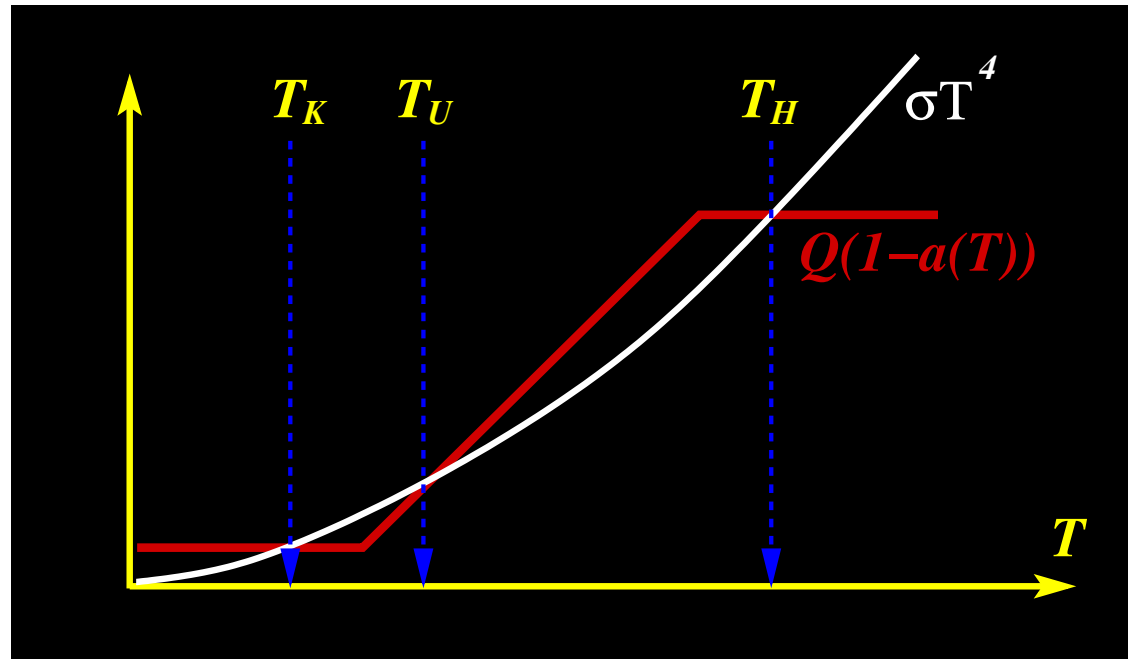


# Равновесные состояния

$$T'_t = 0$$

$$cT'_t = R_{\text{in}} - R_{\text{out}} = 0$$

$$cT'_t = Q(t)(1 - a(T_t)) - \sigma T_t^4 = 0$$



Два устойчивых состояния:

“ледниковое”  $T_K \approx 5^\circ\text{C}$  и “межледниковое”  $T_H \approx 15^\circ\text{C}$ .

Неустойчивое состояние  $T_U$

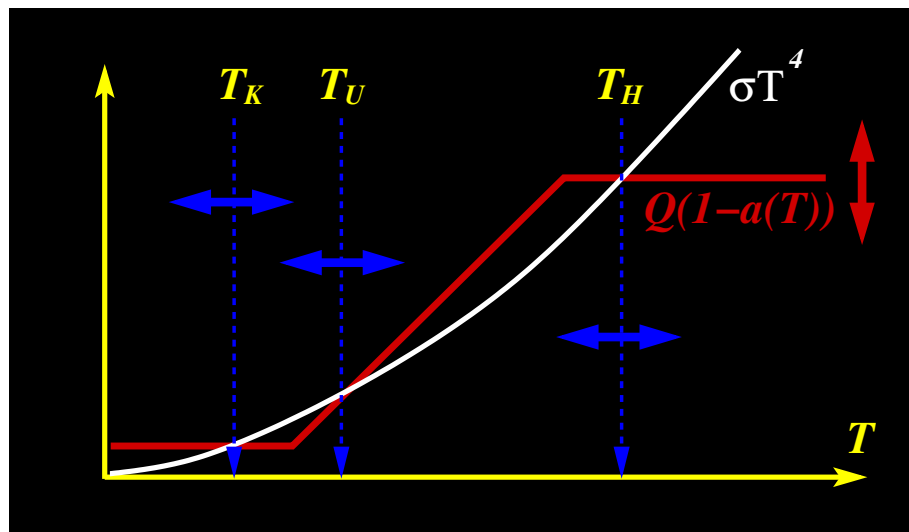
# Смена климата невозможна

$$Q(t) = Q_0(1 + A \sin(\Omega t))$$

Малые ( $A \approx 0.1\%$ )

колебания

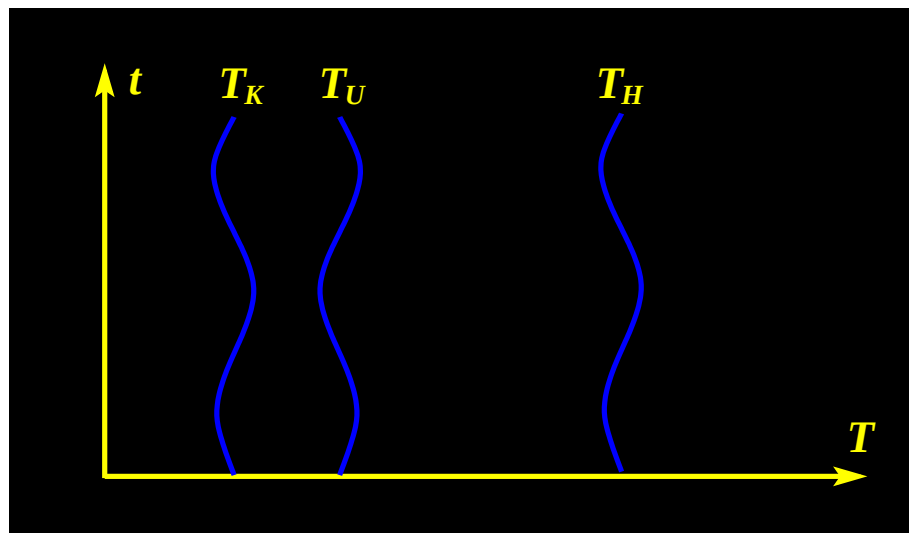
солнечной постоянной...



...влекут малые

колебания

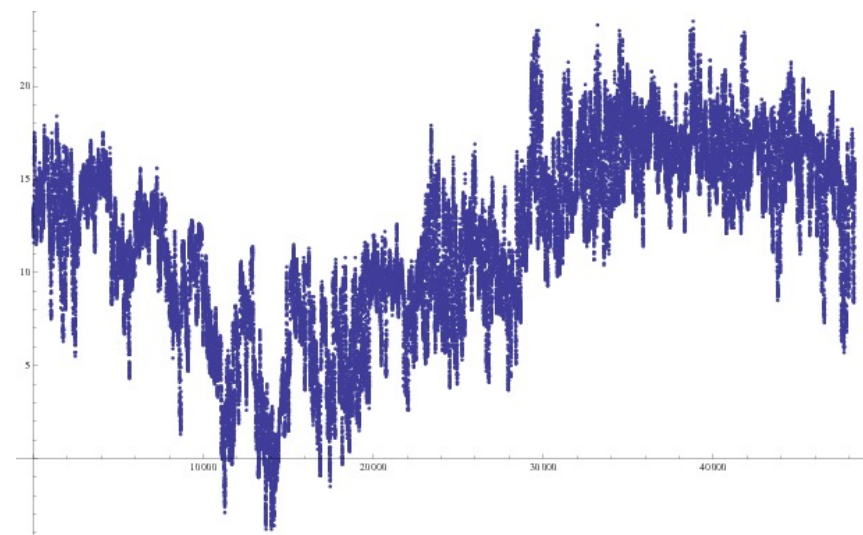
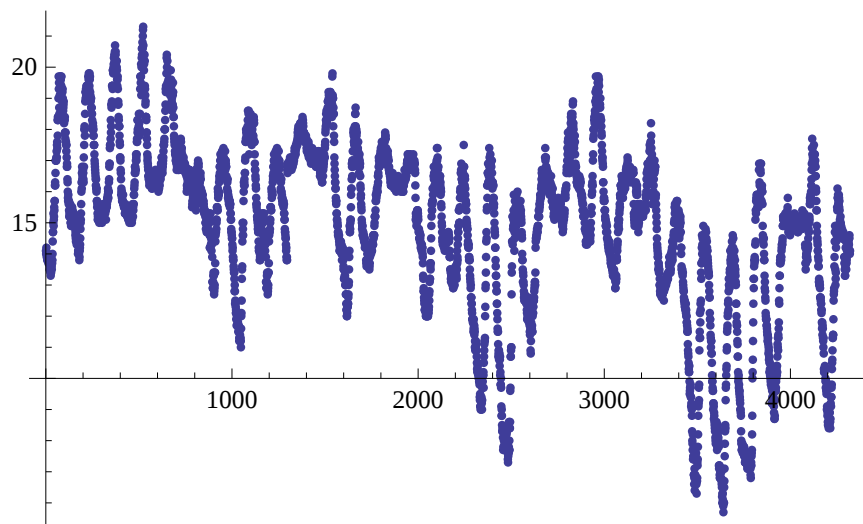
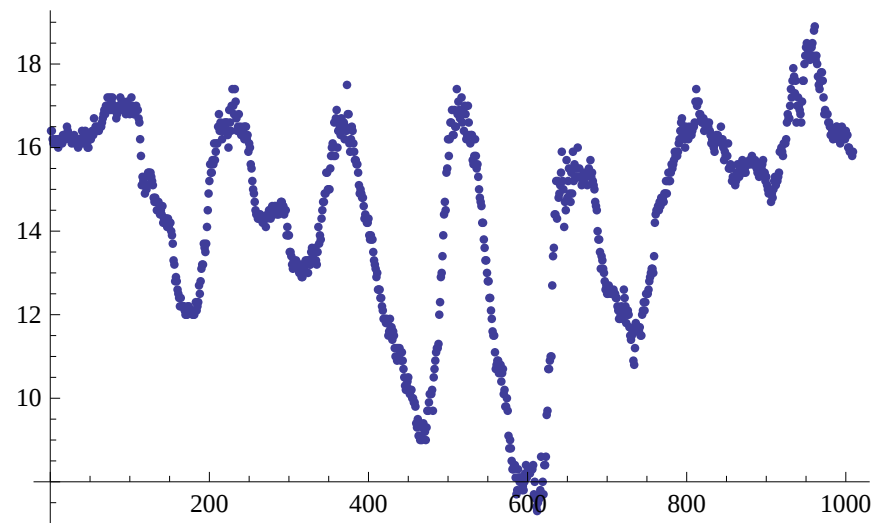
равновесных температур



# Источник шума: быстрые атмосферные процессы (погода)

Быстрые случайные флуктуации температуры (Hasselmann '76)

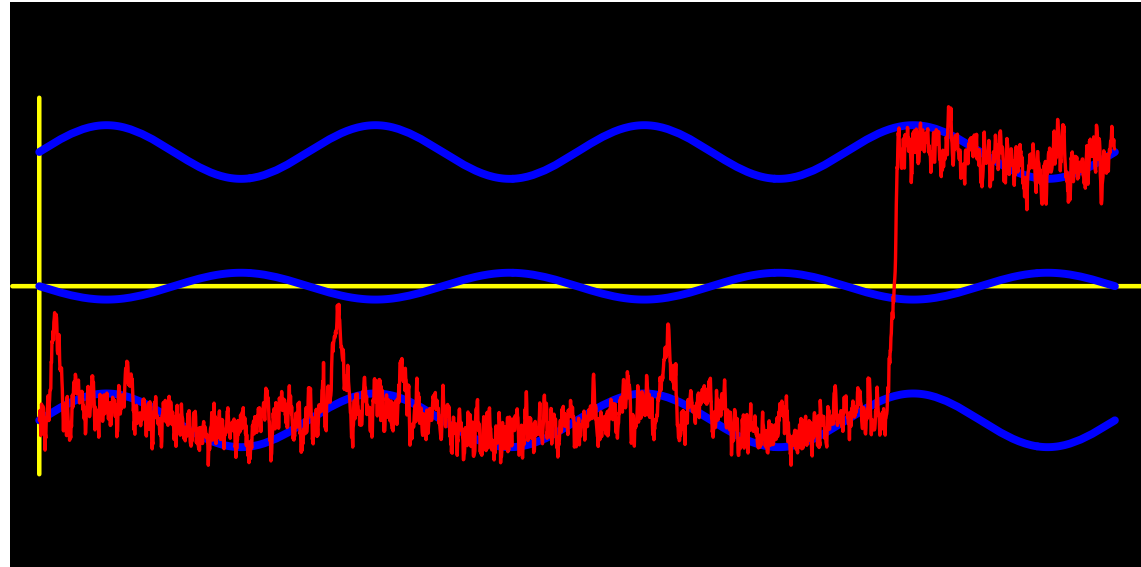
$$\dot{T}(t) = f(t, T(t)) + (\text{белый}) \text{ шум}$$



# Периодический сигнал + шум: нереалистичные сценарии

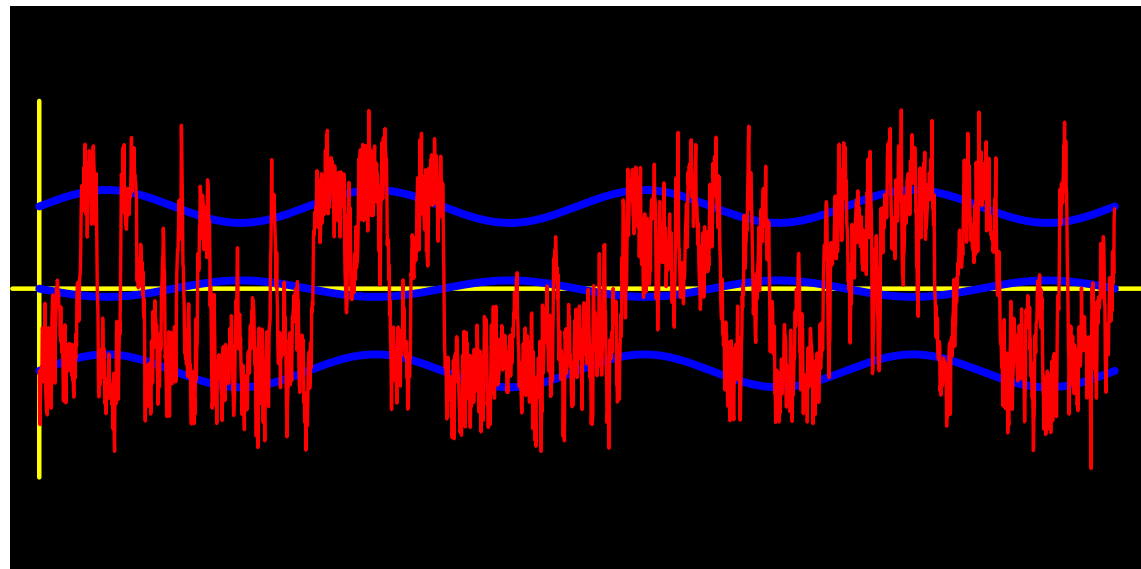
Малая

амплитуда шума



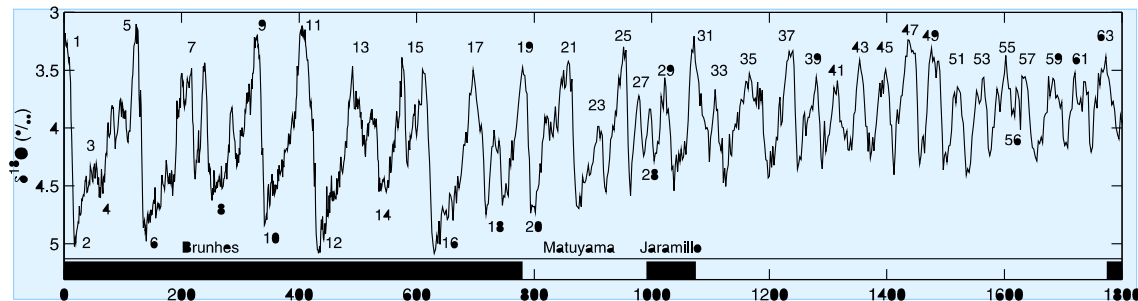
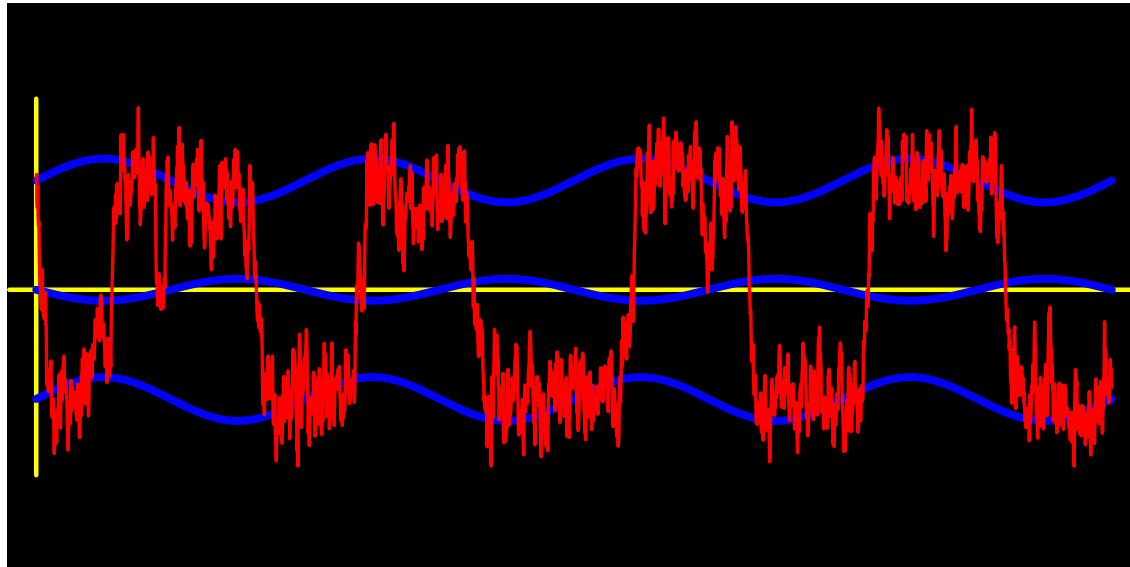
Большая

амплитуда шума



# Периодический сигнал + шум: стохастический резонанс

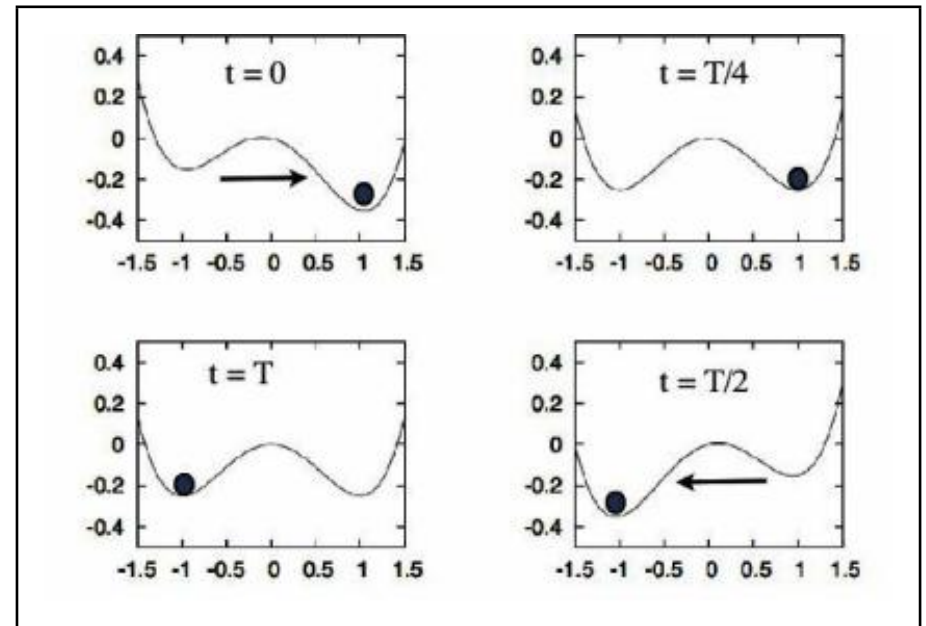
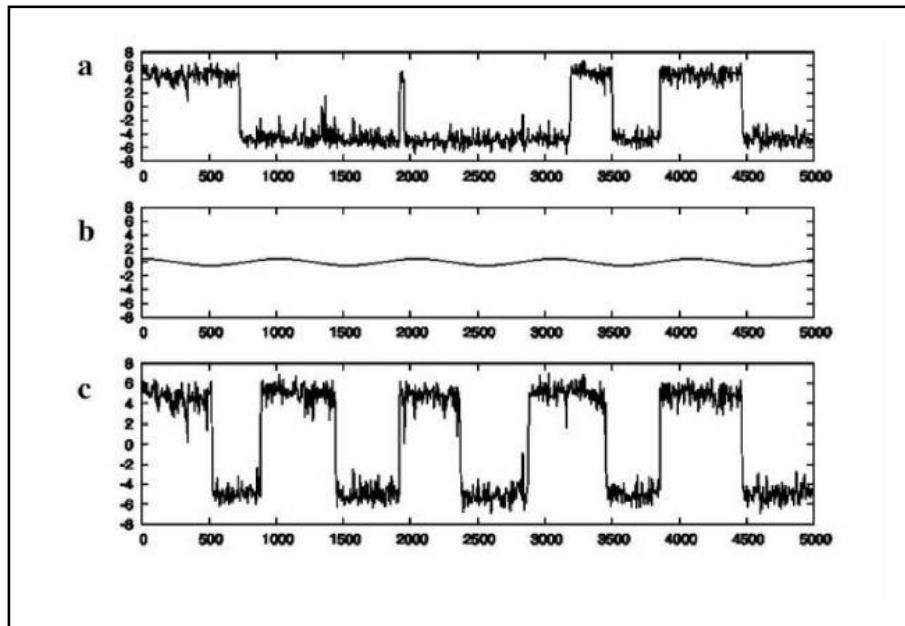
“Оптимальная” амплитуда шума



# Простая диффузионная модель

$$dX_t = -U'(X_t) dt + a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt + \varepsilon dW_t,$$

$$U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$



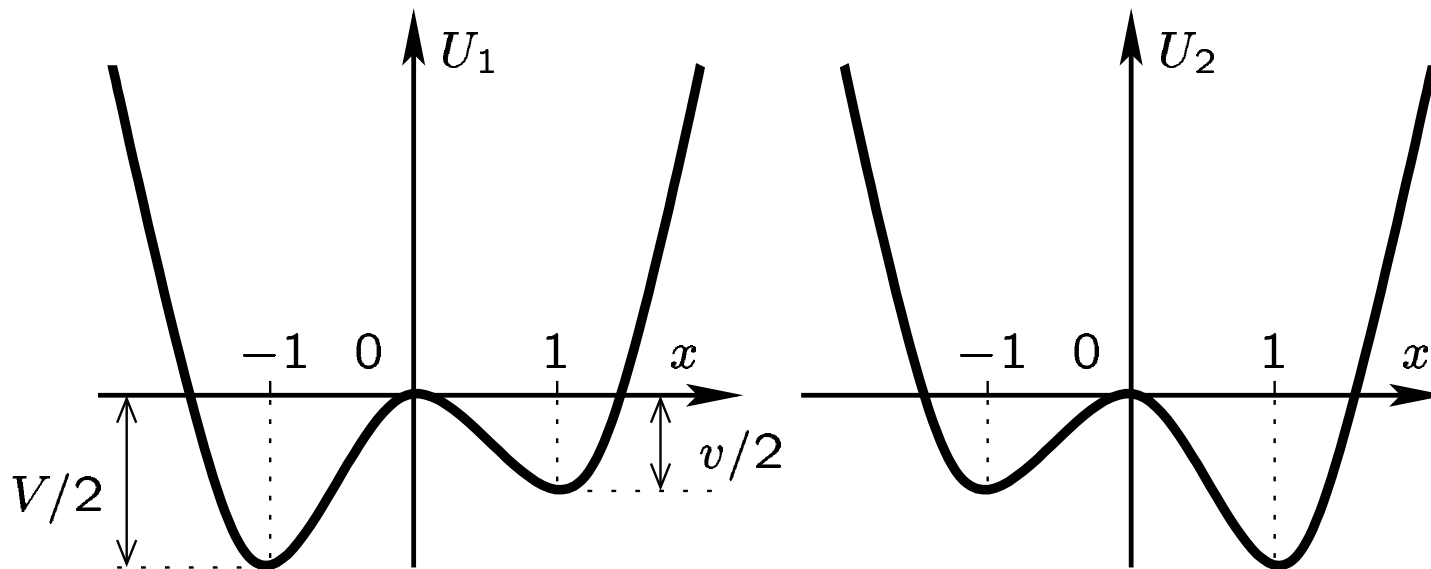
Вопросы:

1. В каком смысле мы понимаем “периодичность” траекторий?
2. Как найти оптимальную настройку  $\varepsilon = \varepsilon(T)$  для данной меры периодичности?

## Ещё более простая диффузионная модель

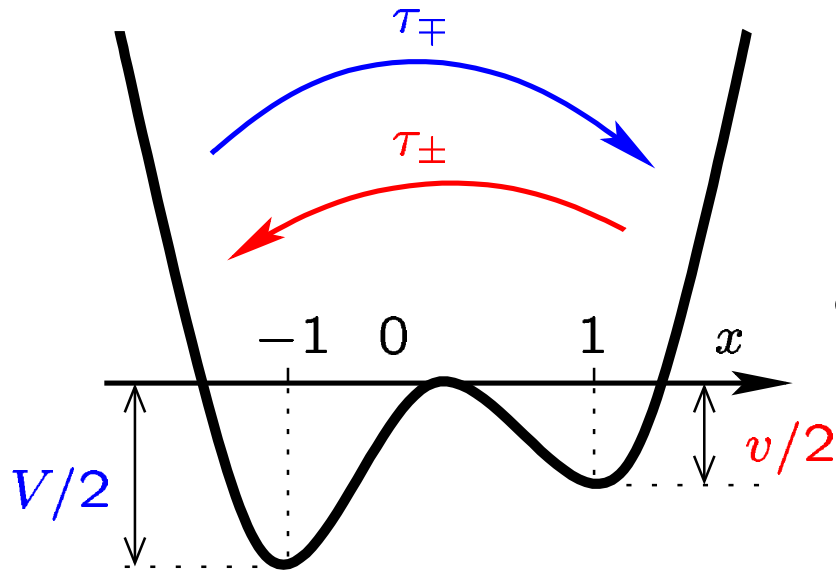
Броуновская диффузия в потенциале с двумя ямами:

$$dX_t^{\varepsilon, T} = -U' \left( X_t^{\varepsilon, T}, \frac{t}{2T} \right) dt + \varepsilon dW_t.$$



Мультивибраторная модель: потенциал  $t \mapsto U(\cdot, t)$  переключается между двумя асимметричными состояниями  $U_1$  и  $U_2$  периодически во времени с периодом  $2T$ .

Большие уклонения. Подход Фрейдлина (Physica D, 2000)



$$dX_t^\varepsilon = -U'(X_t^\varepsilon) dt + \varepsilon dW_t$$

Однородная диффузия обладает двумя характерными временными шкалами: временами жизни в левой и правой потенциальной яме.

$$\mathbf{P}(e^{(V-\delta)/\varepsilon^2} < \tau_{\mp} < e^{(V+\delta)/\varepsilon^2}) \rightarrow 1 \quad \mathbf{P}(e^{(v-\delta)/\varepsilon^2} < \tau_{\pm} < e^{(v+\delta)/\varepsilon^2}) \rightarrow 1$$

Времена Крамерса:

$$\mathbf{E}\tau_{\mp} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{U''(-1)|U''(0)|}} e^{V/\varepsilon^2} \quad \mathbf{E}\tau_{\pm} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{U''(1)|U''(0)|}} e^{v/\varepsilon^2}$$

Условие для стохастического резонанса (Фрейдлин, Physica D, 2000)

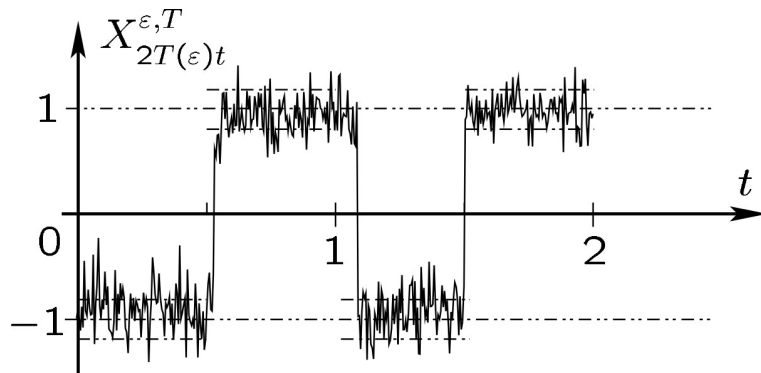
Теорема. Пусть  $T = T(\varepsilon) \sim e^{\lambda/\varepsilon^2}$ ,  $\lambda > 0$ , а также  $A > 0$  и  $\delta > 0$ .

Тогда

$$0 < \lambda < v \quad \Rightarrow \quad \text{meas} \left( t \in [0, A]: |X_{2Tt}^{\varepsilon, T} - \text{sgn } X_0| > \delta \right) \rightarrow 0,$$

$$\lambda > v \quad \Rightarrow \quad \text{meas} \left( t \in [0, A]: |X_{2Tt}^{\varepsilon, T} - \phi(t)| > \delta \right) \rightarrow 0,$$

по вероятности в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



$$\phi(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & t \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

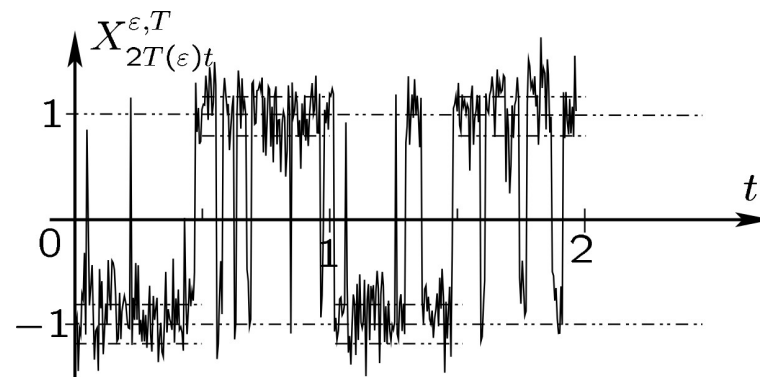
$$\phi(t) = \phi(t + 1).$$

## Проблема с оптимальной настройкой

Найдена нижняя граница для временной шкалы  $T = T(\varepsilon)$ , которая позволяет получить “периодические” траектории

$$\varepsilon \ln T(\varepsilon) = \lambda > v$$

Если  $\lambda > V$ , периодичность (в общем смысле) разрушается



“Физическая” мера для СР — коэффициент усиления

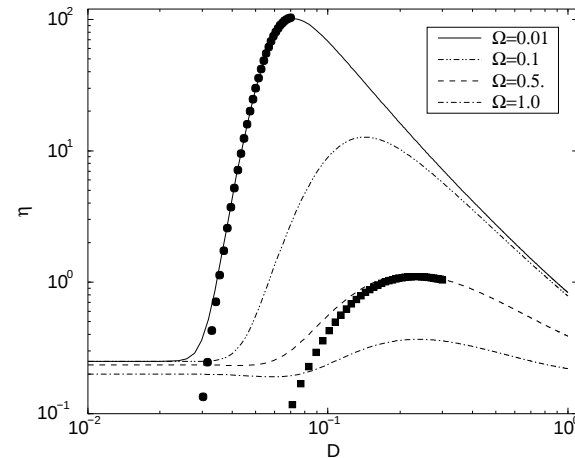
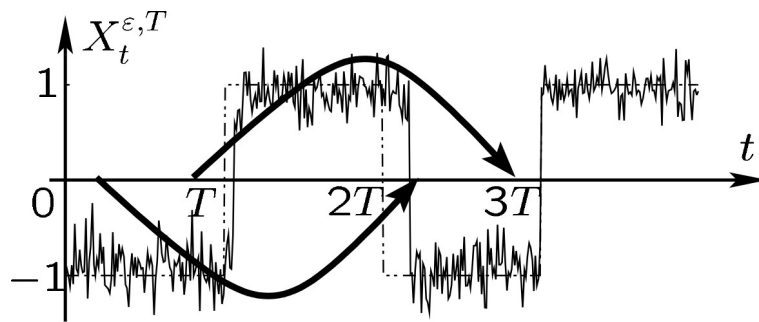
Обозначим  $\mu = \mu^{\varepsilon, T}(x, t)$  плотность инвариантной меры  $X^{\varepsilon, T}$ .

В стационарном режиме

$$\text{Law}(X_{2Tt}^{\varepsilon, T}) = \text{Law}(X_{2T(t+1)}^{\varepsilon, T})$$

Другими словами,  $\mu = \mu^{\varepsilon, T}(x, t)$  плотность инвариантной меры двумерного однородного процесса

$$Z_t^{\varepsilon, T} = (X_{2Tt}^{\varepsilon, T}, t \pmod{2T}).$$



$$\eta^X(\varepsilon, T) = \left| \int_0^1 \mathbf{E}_\mu X_{2Ts}^{\varepsilon, T} \cdot e^{2\pi i s} ds \right|^2$$

энергия гармоника с периодом  $2T$ .

## Модель с двумя состояниями

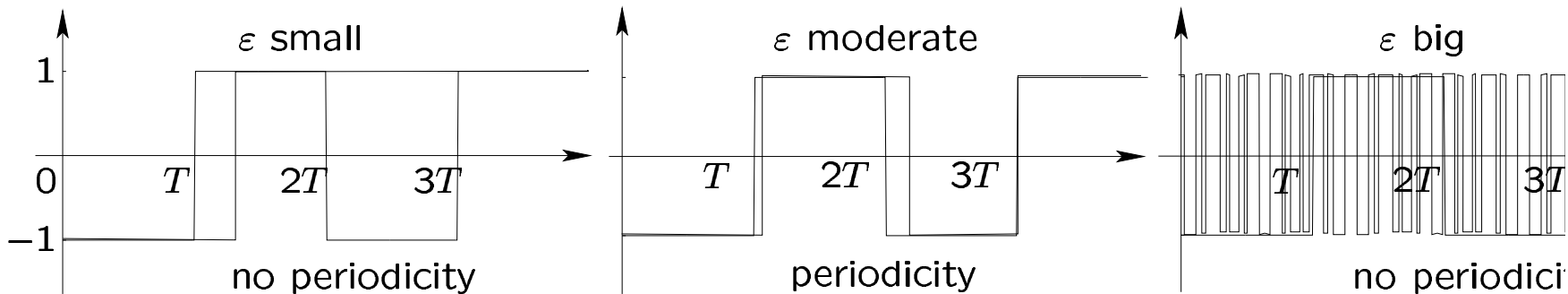
Отождествим потенциальные ямы со значениями  $-1$  и  $1$ .

Марковская цепь  $Y^{\varepsilon, T} = (Y_t^{\varepsilon, T})_{t \geq 0}$  с инфинитезимальными вероятностями

$$Q^{\varepsilon, T}(t) = \begin{cases} Q = \begin{pmatrix} -\varphi & \varphi \\ \psi & -\psi \end{pmatrix}, & t \in [0, T) \\ \bar{Q} = \begin{pmatrix} -\psi & \psi \\ \varphi & -\varphi \end{pmatrix}, & t \in [T, 2T) \end{cases}$$

$$\varphi = \underbrace{\frac{\sqrt{U''(-1)|U''(0)|}}{2\pi}}_{=p} e^{-V/\varepsilon^2}$$

$$\psi = \underbrace{\frac{\sqrt{U''(1)|U''(0)|}}{2\pi}}_{=q} e^{-v/\varepsilon^2}$$



# Инвариантное распределение для марковской цепи

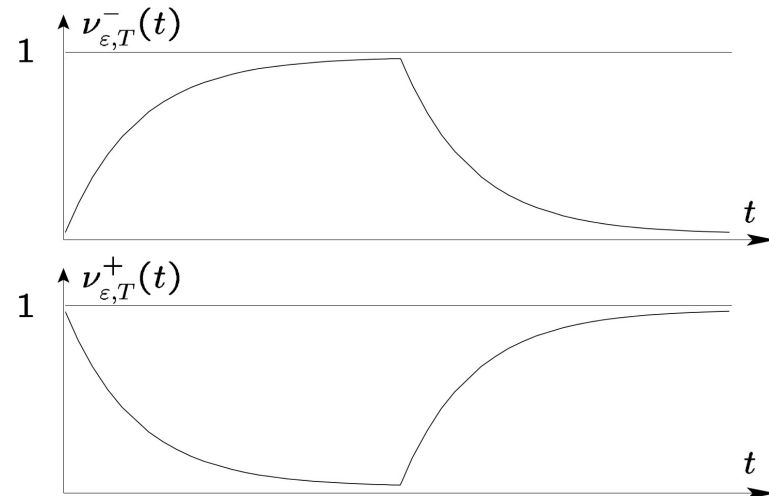
Инвариантное распределение  $(Y_{2Tt}^{\varepsilon, T})_{t \geq 0}$   
 $\nu(t) = (\nu^-(t), \nu^+(t)), t \in [0, 1)$ .

Условие непрерывности и антисимметрии  $\nu^\mp(0) = \nu^\pm(1/2)$

$$\frac{1}{2T} \frac{d}{dt} \nu(t) = Q^* \nu(t), \quad t \in (0, 1/2),$$

$$\nu^-(0) = \nu^+(1/2),$$

$$\nu^-(t) + \nu^+(t) = 1$$



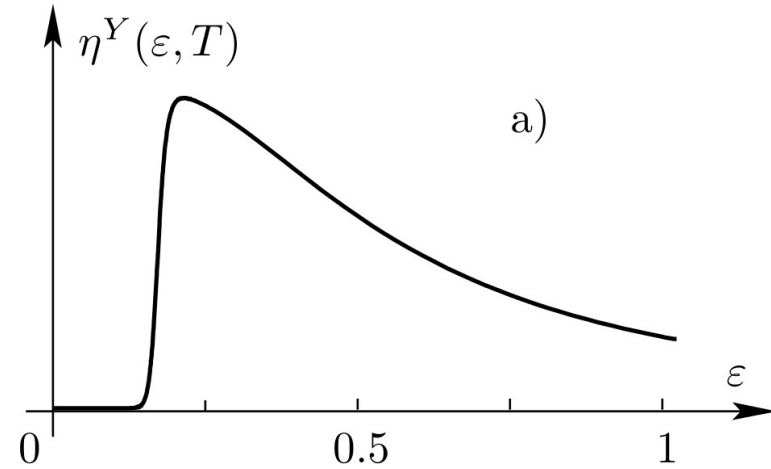
$$\nu^-(t) = \frac{\psi}{\varphi + \psi} + \frac{\varphi - \psi}{\varphi + \psi} \frac{e^{-2T(\varphi + \psi)t}}{1 + e^{-T(\varphi + \psi)t}}$$

$$\nu^+(t) = \frac{\varphi}{\varphi + \psi} - \frac{\varphi - \psi}{\varphi + \psi} \frac{e^{-2T(\varphi + \psi)t}}{1 + e^{-T(\varphi + \psi)t}}$$

# Коэффициент усиления для марковской цепи

$$\eta^Y(\varepsilon, T) = \left| \int_0^1 \mathbf{E}_\nu Y_{2Ts}^{\varepsilon, T} \cdot e^{2\pi i s} ds \right|^2$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \frac{(\varphi - \psi)^2 T^2}{\pi^2 + (\varphi + \psi)^2 T^2}$$



Максимизируем

$$\eta^Y(\varepsilon, T) \rightarrow \max_{\varepsilon} \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Оптимальный уровень шума при полупериоде  $T$ :

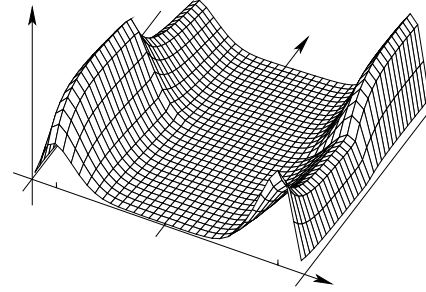
$$\varepsilon(T) \approx \frac{V + v}{2 \ln T}$$

$$T(\varepsilon) \approx \frac{\pi}{\sqrt{2pq}} \sqrt{\frac{v}{V - v}} e^{\frac{V+v}{2\varepsilon^2}}.$$

Вернёмся к диффузии...

Обозначим  $\mu = \mu(x, t)$  инв. плотность процесса  $\mathbf{X}_t = (X_{2Tt}^{\varepsilon, T}, t \bmod 1)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2T} \frac{\partial}{\partial t} \mu = \frac{\varepsilon^2}{2} f'' + (U' \mu)' \\ \mu(x, 0) = \mu(-x, 1/2), \end{cases}$$



Разделение переменных:  $\mu(x, t) = \Psi(x)\Theta(t)$

$$\frac{1}{2T} \Psi \dot{\Theta} = \frac{\varepsilon^2}{2} \Psi'' \Theta + (U' \Psi)' \Theta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2T} \frac{\dot{\Theta}}{\Theta} = \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\Psi''}{\Psi} + \frac{(U' \Psi)'}{\Psi} = -\lambda$$

Пусть  $-\lambda$  является собственным значением оператора  $L^* f = \frac{\varepsilon^2}{2} f'' + (U' f)'$ :

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \Psi'' + (U' \Psi)' = -\lambda \Psi \quad \Theta(t) = e^{-2T\lambda t}$$

Если спектр  $\{-\lambda_k, \Psi_k\}_{k \geq 0}$  оператора  $L^* f$  дискретный,  $-\lambda_k \rightarrow \infty$ , то ищем решение в виде

$$\mu(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Psi_k(x) e^{-2T\lambda_k t}$$

Спектр  $L^*$ : общие факты (Березин, Шубин, Ур-е Шрёдингера

Однородная диффузия  $dX^\varepsilon = -U'(X^\varepsilon) dt + \varepsilon dW$ ,  $U(x) = x^4$  для больших  $x$ .

диффузионный оператор  $Lf = \frac{\varepsilon^2}{2} f'' - U' f'$

сопряжённый оператор  $L^* f = \frac{\varepsilon^2}{2} f'' + (U' f)'$ ,  $\int Lf \cdot g dx = \int f \cdot L^* g dx$

оператор Шрёдингера  $lf = \frac{\varepsilon^2}{2} f'' - \left( \frac{(U')^2}{\varepsilon^4} - \frac{U''}{\varepsilon^2} \right) f$

$$lf = \frac{2}{\varepsilon^2} e^{-\frac{U}{\varepsilon^2}} L \left( f e^{\frac{U}{\varepsilon^2}} \right) = \frac{2}{\varepsilon^2} e^{\frac{U}{\varepsilon^2}} L^* \left( f e^{-\frac{U}{\varepsilon^2}} \right), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

- $l$  симметрический оператор,  $\int lf \cdot g dx = \int f \cdot lg dx$
- $(l, C_0^\infty)$  существенно самосопряжённый оператор
- $l$  обладает дискретным спектром
- собственные функции ортогональны в  $L^2(\mathbb{R})$ , их собственные пространства имеют размерность 1,  $k$ -я собственная функция имеет в точности  $k$  корней.

## Спектр $L^*$ : общие факты

Спектр  $L$ :  $\{-\lambda_k, \Phi_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{\Phi_k\}$  ортогональный базис в  $L^2(\mathbb{R}; e^{-2U/\varepsilon^2} dx)$ .

Спектр  $L^*$ :  $\{-\lambda_k, \Psi_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{\Psi_k\} = \{e^{-2U/\varepsilon^2} \Phi_k\}$  орт. базис в  $L^2(\mathbb{R}; e^{2U/\varepsilon^2} dx)$ .

$$\langle Lf, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}; e^{-2U/\varepsilon^2} dx)} \leq 0 \Rightarrow \lambda_k \geq 0.$$

Вариационный принцип:

$$\lambda_0 = \frac{\langle -L\Phi_0, \Phi_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}; e^{-2U/\varepsilon^2} dx)}}{\langle \Phi_0, \Phi_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}; e^{-2U/\varepsilon^2} dx)}} = \inf_{0 \neq f \in \mathcal{D}_L} \frac{\langle -Lf, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}; e^{-2U/\varepsilon^2} dx)}}{\langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}; e^{-2U/\varepsilon^2} dx)}},$$

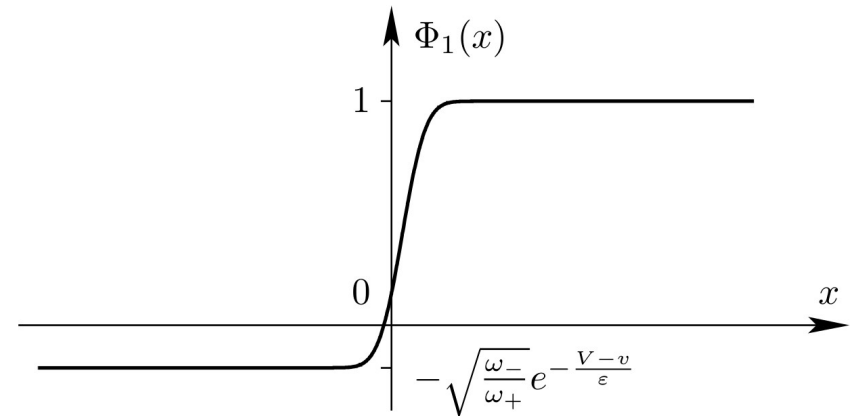
$$\lambda_k = \frac{\langle -L\Phi_k, \Phi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}; e^{-2U/\varepsilon^2} dx)}}{\langle \Phi_k, \Phi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}; e^{-2U/\varepsilon^2} dx)}} = \inf_{\mathcal{D}_L \ni f \perp \{\Phi_0, \dots, \Phi_{k-1}\}} \frac{\langle -Lf, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}; e^{-2U/\varepsilon^2} dx)}}{\langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}; e^{-2U/\varepsilon^2} dx)}},$$

## Верхние значения спектра

$\lambda_0 = 0$ ,  $\Phi_0 \equiv 1$ ,  $\Psi_k = e^{-2U/\varepsilon^2} \sim$  стационарная плотность диффузии  $X^\varepsilon$

$$\lambda_1^\varepsilon = \frac{\sqrt{U'''(0)|U'''(-1)|}}{2\pi} e^{-v/\varepsilon^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

$$\Psi_1 = e^{-2U/\varepsilon^2} \Phi_1$$



Разделение спектра

$$0 = \lambda_0 < \boxed{\lambda_1^\varepsilon < M \leq \lambda_2^\varepsilon} \leq \lambda_3^\varepsilon \leq \dots \rightarrow +\infty$$

## Коэффициент усиления для диффузии

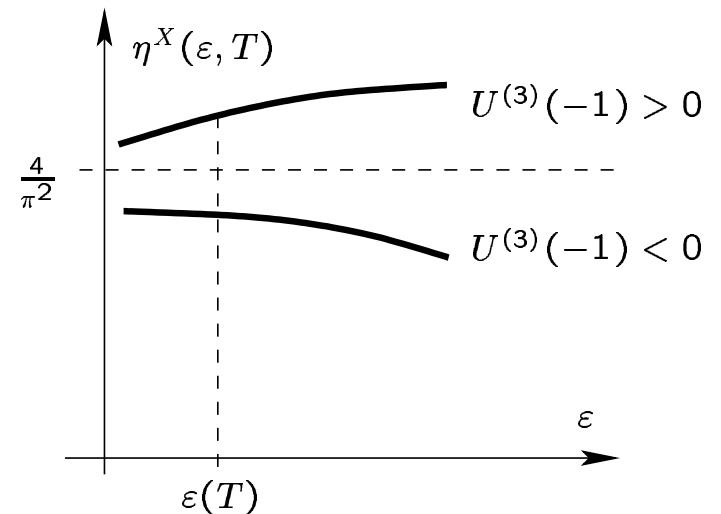
$$\mu(x, t) = \frac{e^{-2U/\varepsilon^2}}{\int e^{-2U/\varepsilon^2} dy} + a_1 \Psi_1^\varepsilon(x) e^{-2T\lambda_1^\varepsilon t} + R^{\varepsilon, T}(x, t)$$

$$\eta^X(\varepsilon, T) = \frac{4}{\pi^2} b_0^2 \frac{(\lambda_1 T)^2}{\pi^2 + (\lambda_1 T)^2} + r(\varepsilon, T) \quad \eta^Y(\varepsilon, T) = \frac{4}{\pi^2} \frac{(\varphi - \psi)^2 T^2}{\pi^2 + (\varphi + \psi)^2 T^2}$$

$$b_0^2 = \left( \frac{\int_{\mathbb{R}} y e^{-2U(y)/\varepsilon^2} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2U(y)/\varepsilon^2} dy} \right)^2 = 1 + \frac{U^{(3)}(-1)}{2U''(-1)^2} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

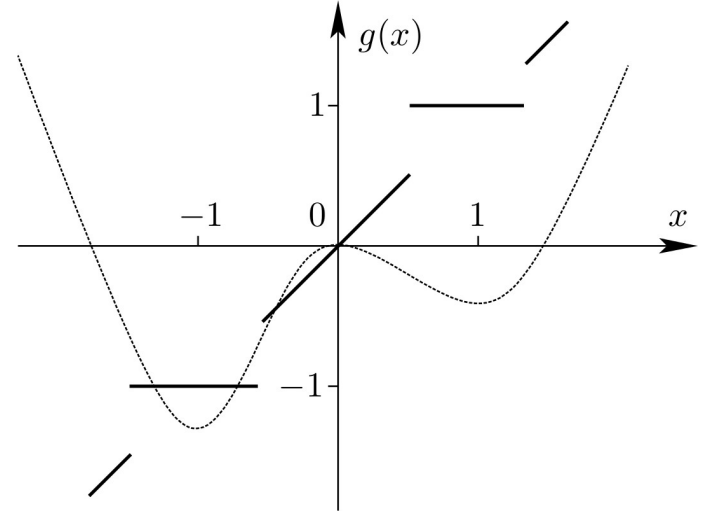
Теорема. Пусть  $0 < \delta < \frac{v}{3}$ ,  $\Delta > v + \delta$ ,  $\max_x \{U(x) - 2U(-x)\} < V + v$ . Тогда в пределе  $T \rightarrow \infty$  для  $\varepsilon \in [\frac{v+\delta}{\log T}, \frac{\Delta}{\log T}]$  выполняется равенство

$$\eta^X(\varepsilon, T) = \frac{4}{\pi^2} \left( 1 + \frac{U^{(3)}(-1)}{2U''(-1)^2} \cdot \varepsilon^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$



## Модифицированный коэффициент усиления

$$\tilde{\eta}^X(\varepsilon, T) = \left| \int_0^1 \mathbf{E}_\mu g(X_{2Ts}^{\varepsilon, T}) \cdot e^{2\pi i s} ds \right|^2$$



Теорема. В условиях предыдущей теоремы, для любого  $\gamma > 1$ , в пределе  $T \rightarrow \infty$  модифицированный коэффициент усиления  $\varepsilon \mapsto \tilde{\eta}^X(\varepsilon, T)$  имеет локальный максимум на интервале  $[\gamma^{-1} \frac{V+v}{2 \log T}, \gamma \frac{V+v}{2 \log T}]$ .

Таким образом оптимальный уровень шума для модифицированного коэффициента усиления диффузии асимптотически совпадает с оптимальным уровнем шума для коэффициента усиления марковской модели с двумя состояниями:

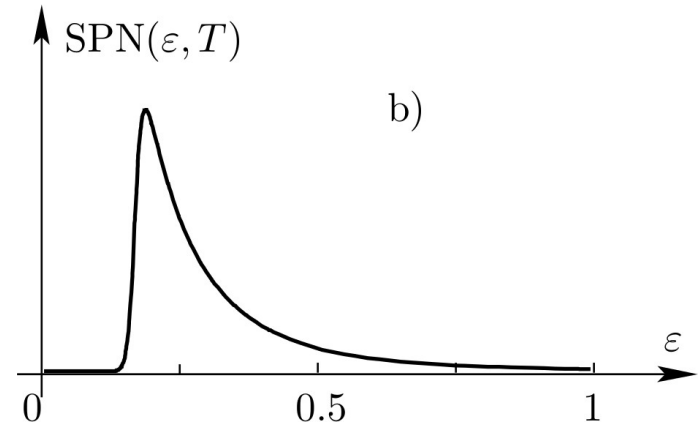
$$\varepsilon(T) \sim \frac{V + v}{2 \log T}, \quad T \rightarrow \infty$$

Другие меры периодичности (для модели с двумя состояниями)

Коэффициент усиление/шум

$$\xi^Y(\varepsilon, T) = \frac{1}{\varepsilon^2} \left| \int_0^1 \mathbf{E}_\nu Y_{2Ts}^{\varepsilon, T} \cdot e^{2\pi i s} ds \right|^2,$$

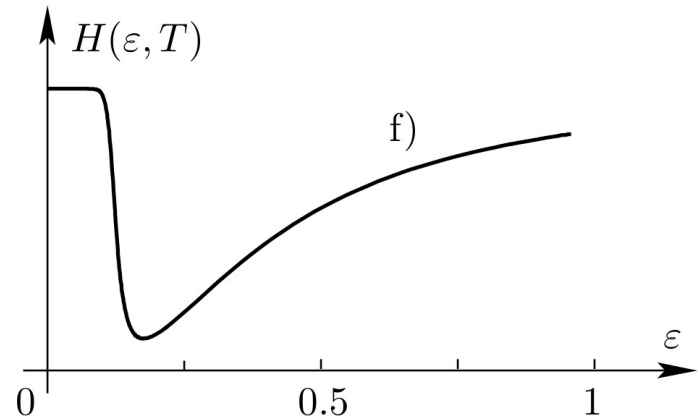
$$T(\varepsilon) \approx \frac{2\pi\sqrt{v}}{q\varepsilon} e^{v/\varepsilon^2}$$



Энтропия

$$H^Y(\varepsilon, T) = - \sum_{k=\pm} \int_0^1 \nu^k(s) \ln \nu^k(s) ds,$$

$$T(\varepsilon) \approx \frac{\pi^2}{3p} \frac{\varepsilon^2 v}{(V - v)^2} e^{V/\varepsilon^2}$$



## References

1. P. Imkeller, I. Pavlyukevich, Model reduction and stochastic resonance, *Stoch. Dyn.* 2, No. 4, 463-506 (2002).
2. P. Imkeller, I. Pavlyukevich, Stochastic resonance in two-state Markov chains, *Arch. Math.* 77, No. 1, 107-115 (2001).
3. S. Herrmann, P. Imkeller, Barrier crossings characterize stochastic resonance, *Stoch. Dyn.* 2, No. 3, 413-436 (2002).
4. S. Herrmann, P. Imkeller, I. Pavlyukevich, and D. Peithmann, Stochastic resonance: A mathematical approach in the small noise limit, volume 194 of the AMS Mathematical Surveys and Monographs, 2014.