Лоренцевы алгебры Каца–Муди и автоморфные формы. Введение

В.В. Никулин, МИАН

29.9.2015

Резюме: Мой доклад следует моей статье:

В.В. Никулин, *Теория лоренцевых алгебр Каца–Муди*,

Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 1999, том 69., 147–167. Опубликована также на английском и в arXiv:math/9810001.

Там же можно найти все точные ссылки и детали.

Также я бы рекомендовал более продвинутый обзор

В.А. Гриценко и В.В. Никулин, *О классификации лоренцевых алгебр Каца–Муди,* УМН, 2002, том 57, выпуск 5 (347), 79–138, Напомню аксиомы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Это k-алгебра (k — поле или коммутативное кольцо) с умножением, обозначаемым [,] (скобка Ли), удовлетворяющая

(1) $[Y, X] = -[X, Y]$

(2) $[\mathrm{X}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]]+[\mathrm{Y}, [\mathrm{Z}, \mathrm{X}]]+[\mathrm{Z}, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]=0$ (тождество Якоби).

для $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Оператор $[X, \ \cdot]$ обозначается как $ad\, X$

Для супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\overline{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\overline{1}}$ соответственно должны выполняться

$$[X, Y] = -(-1)^{(deg\, X)(deg\, Y)}[Y, X],$$

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + (-1)^{(deg\, X)(deg\, Y)}[Y, [X, Z]].$$

1 Некоторые общие результаты по алгебрам Каца–Муди

Все определения и результаты могут быть найдены в классической книге Виктора Каца "Бесконечномерные алгебры Ли," М. Мир, 1993, 425с.

Обобщенная матрица Картана — это квадратная матрица $A = (a_{ij})$ конечного ранга, все $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, диагональные элементы $a_{ii} = 2$, недиагональные элементы $a_{ij} \le 0$ $(i \ne j)$.

Рассматриваются обычно *симметризуемые матрицы Картана*, то есть существует диагональная матрица D с положительными диагональными рациональными элементами такая, что

$$B = DA$$

целочисленна и симметрична. B называется симметризацией A. По определения, $sign(A) = sign(B)$.

A неразложима, если не существует разбиения индексов $I = I_1 \cup I_2$ матрицы A такого, что $a_{ij} = 0$ для всех $i \in I_1$, $j \in I_2$.

Алгебра Ли Каца–Муди $\mathfrak{g}(A)$ над $\mathbb{C}$ задается образующими $h_i,\ e_i,\ f_i,\ i \in I$, с соотношениями

$$[h_i, h_j] = 0,\ [e_i, f_i] = h_i,\ [e_i, f_j] = 0,\ \text{if } i \ne j;$$
$$[h_i, e_j] = a_{ij}e_j,\ [h_i, f_j] = -a_{ij}f_j,$$
$$(ad\ e_i)^{1-a_{ij}}e_j = (ad\ f_i)^{1-a_{ij}}f_j = 0,\ if\ i \ne j. \tag{1.1}$$

(тождество Серра).

$\mathfrak{g}(A)$ проста после факторизации по известному идеалу.

Общие свойства алгебр Каца–Муди $\mathfrak{g}(A)$.

1. Симметризация B определяет свободный $\mathbb{Z}$-модуль

$$Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$$

с образующими α_i, $i \in I$, с симметрической билинейной формой

$$((\alpha_i, \alpha_j)) = B, \quad B - \text{symmetrization},$$

Q называется *решеткой корней.* Алгебра $\mathfrak{g}(A)$ *градуирована решеткой корней Q.* Образующие h_i, e_i, f_i имеют веса 0, α_i, $-\alpha_i$ соответственно;

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha \in -\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \right),$$

$\mathfrak{g}_\alpha$ являются конечномерными линейными подпространствами,

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta},$$

подалгебра $\mathfrak{g}_0 = Q \otimes \mathbb{C}$ коммутативна и называется *подалгеброй Картана.* Элемент $0 \neq \alpha \in Q$ называется *корнем,* если $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. Подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ называется *корневым подпространством,* соответствующим α.

$$mult(\alpha) = dim \, \mathfrak{g}_\alpha$$

называется *кратностью корня α.*

Выше Δ — множество всех корней. Оно делится на множество $\Delta_+ \subset \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_+ \alpha_i$ *положительных* и множество $-\Delta_+$ *отрицательных* корней.

Корень α *вещественный,* если $(\alpha, \alpha) > 0$.
и *мнимый,* если $(\alpha, \alpha) \leq 0$.

Вещественный корень α определяет *отражение*

$$s_\alpha : x \ \rightarrow \ x - (2(x, \alpha)/(\alpha, \alpha))\alpha, \ \ x \in Q.$$

Ключевое свойство отражения: $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ и $s_\alpha \,|\, \alpha_Q^\perp = identity$. Они порождают *группу Вейля* $W \subset O(Q)$. Множество корней Δ и их кратности инвариантны относительно W.

2. Тождество Вейля—Каца для знаменателя, позволяет вычислять кратности корней:

$$e(-\rho) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{mult(\alpha)} = \sum_{w \in W} \det(w) e(-w(\rho)). \qquad (1.2)$$

где $e(\cdot) \in \mathbb{Z}[Q]$—формальные экспоненты, $\rho \in Q^*$ — вектор Вейля, определяемый условием

$$(\rho, \alpha_i) = -\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}, \ \ \forall i \in I.$$

Это тождество комбинаторное, и формулы для кратностей $mult(\alpha)$ корней в общем случае не известны. Один из подходов к решению этой проблемы заключается в замене формальной функции выше на неформальную, например, заменой формальных экспонент на неформальные, при которой получается функция с "хорошими"свойствами. Эти хорошие свойства могут помочь найти формулы для кратностей.

2 Конечный и аффинный случаи

Имеются два случая, когда есть очень ясная картина (или теория) алгебр Каца–Муди.

Конечный случай. Обобщенная матрица Картана A положительно определена, $A > 0$. Тогда $\mathfrak{g}(A)$ конечномерна, получаем классическую теорию *конечномерных полупростых алгебр Ли.*

Аффинный случай. Обобщенная матрица Картана полуположительно определена, $A \geq 0$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}(A)$ называется *аффинной.*

В обоих случаях имеются три очень хороших свойства:

(I) Имеется классификация всех возможных обобщенных матриц Картана A. Они классифицируются (эквивалентны) диаграммами Дынкина в конечном случае и расширенными диаграммами Дынкина в аффинном случае.

(II) В тождестве для знаменателя формальные экспоненты могут быть заменены на неформальные, что дает функцию с очень хорошими свойствами. В конечном случае получается полином. В аффинном случае автоморфная форма Якоби. Используя эти свойства (или непосредственно), можно вычислить все кратности.

(III) Оба случая чрезвычайно важны в математике и физике.

Хотелось бы построить подобную теорию для *лоренцева (или гиперболического случая,* когда обобщенная матрица Картана A *гиперболична,* т. е. имеет ровно один отрицательный квадрат, все ее остальные квадраты положительны или нулевые.

Имеется необозримое множество гиперболических обобщенных матриц Картана, найти их все и классифицировать невозможно.

С другой стороны, вероятно, не все они дают интересные алгебры Каца–Муди, поэтому следует найти естественные условия на эти матрицы.

3 Лоренцев случай. Пример Борчердса.

Имеется следующий ключевой пример, найденный Борчердсом (R. Borcherds) в 1988–1995.

В примере Борчердса решетка корней $Q = S$, где S — *четная унимодулярная решетка сигнатуры* $(25, 1)$.

Решетка означает: "целочисленная симметрическая билинейная форма,"то есть свободный $\mathbb{Z}$-модуль S со спариванием $(x, y) \in \mathbb{Z}$ для $x, y \in S$, которое билинейно над $\mathbb{Z}$ и симметрично.

Четная означает, что $x^2 = (x, x)$ четно для любого $x \in S$.

Унимодулярная означает, что двойственная решетка S^* совпадает с S: любую $\mathbb{Z}$-линейную функцию на S можно записать как $(f, \cdot)$ для некоторого $f \in S$. Эквивалентно, для $\mathbb{Z}$- базиса $e_1, \ldots, e_{26}$ решетки S определитель матрицы Грама $((e_i, e_j))$ равен ± 1.

Известно, что такая решетка S единственна с точностью до изоморфизма.

В примере Борчердса группа Вейля W порождена отражениями

$$s_\alpha : x \ \to \ x - (x,\alpha)\alpha, \quad x \in S,$$

во всех элементах $\alpha \in S$ с $\alpha^2 = 2$ (называемых 2-конями). Ключевое свойство отражения: $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ и $s_\alpha \,|\, \alpha_S^\perp = identity$. Группа W дискретна в гиперболическом пространстве (пространстве Лобачевского)

$$\mathcal{L}(S) = V^+(S)/\mathbb{R}_{++}$$

где $V^+(S)$ — пола светового конуса

$$V(S) = \{x \in S \otimes \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$$

решетки S. Пространство $\mathcal{L}(S)$ состоит из лучей, выходящих из нуля и лежащих в $V^+(S)$.

Фундаментальная камера $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(S)$ для W задается множеством P элементов $\alpha \in S$ с $\alpha^2 = 2$, которые ортогональны камере $\mathcal{M}$. Множество P имеет следующее описание, полученное Конвеем (J.H. Conway) в 1983.

Существует ортогональное разложение $S = [\rho, e] \oplus L$, где матрица Грама элементов ρ, e равна

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

в частности $\rho^2 = 0$, и L — решетка Лича, т. е. положительно определенная четная унимодулярная решетка ранга 24, не имеющая элементов с квадратом 2.

Множество P корней, ортогональных фундаментальной камере $\mathcal{M}$ (или множество *простых корней* группы Вейля W), равно

$$P = \{\alpha \in S \mid (\alpha, \alpha) = 2 \ and \ (\rho, \alpha) = -1\}.$$

Это значит, что фундаментальная камера $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(S)$ равна

$$\mathcal{M} = \{\mathbb{R}_{++}x \in \mathcal{L}(S) \mid (x, P) \leq 0\}, \qquad (3.1)$$

и P минимально с таким свойством. Фундаментальная камера $\mathcal{M}$ имеет "почти конечный объем." Это значит, что камера $\mathcal{M}$ конечна в любом угле гиперболического пространства $\mathcal{L}(S)$ с вершиной в бесконечно удаленной точке $\mathbb{R}_{++}\rho$.

Матрица

$$A = ((\alpha, \alpha')), \quad \alpha, \ \alpha' \in P$$

является обобщенной матрицей Картана и ρ является вектором Вейля

$$(\rho, \alpha) = -(\alpha, \alpha)/2, \quad \forall \alpha \in P. \qquad (3.2)$$

Таким образом, A определяет лоренцеву алгебру Каца—Муди $\mathfrak{g}(A)$, градуированную гиперболической решеткой S.

Но алгебра $\mathfrak{g}(A)$— не та алгебра, которая рассматривается в примере Борчердса.

Алгебру Ли $\mathfrak{g}(A)$ следует "откорректировать".

Имеется классическая $SL_2(\mathbb{Z})$-модулярная форма Δ веса 12 на верхней полуплоскости $im\ \tau > 0$

$$\Delta = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{m\geq 0}\tau(m)q^m.$$

где $q = exp(2\pi i\tau)$. Имеем

$$\Delta^{-1} = \sum_{n\geq 0}p_{24}(n)q^{n-1},$$

где $p_{24}(n)$ — положительные целые числа.

Борчердс (1990) доказал *тождество*

$$\Phi(z) = exp(-2\pi i(\rho, z))\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-exp(-2\pi i(\alpha, z)))^{p_{24}(1-(\alpha,\alpha)/2)} =$$

$$= \sum_{w\in W}\det(w)\sum_{m>0}\tau(m)exp(-2\pi i(w(m\rho), z)). \qquad (3.3)$$

Здесь

$$\Delta_+ = \{\alpha\in S \mid \alpha^2 = 2\ and\ (\alpha,\rho) < 0\}\cup(S\cap\overline{V^+(S)} - \{0\}).$$

Переменная z пробегает

$$z\in\Omega(V^+(S)) = S\otimes\mathbb{R} + iV^+(S)$$

— *комплексифицированный конус* светового конуса $V^+(S)$.

Кроме того, Борчердс доказал (1994, 1995), что $\Phi(z)$ является *автоморфной формой веса 12* относительно группы $O^+(T)$, где $T = U \oplus S$ — расширенная решетка сигнатуры $(26, 2)$. Группа $O^+(T)$ естественно действует в эрмитовой симметрической области типа IV (ниже 0 обозначает компоненту связности, одну из двух)

$$\Omega(T) = \{\mathbb{C}\omega \subset T \otimes \mathbb{C} \mid (\omega, \omega) = 0, \quad (\omega, \overline{\omega}) < 0\}_0,$$

которая канонически отождествляется с $\Omega(V^+(S))$ следующим образом: $z \in \Omega(V^+(S))$ определяет элемент $\mathbb{C}\omega_z \in \Omega(T)$ где $\omega_z = (((z,z)/2)e_1 + e_2) \oplus z \in T \otimes \mathbb{C}$ и e_1, e_2 — базис решетки U с приведенной выше матрицей Грама U.

Здесь "автоморфная форма веса 12"означает, что функция $\widetilde{\Phi}(\lambda\omega_z) = \lambda^{-12}\Phi(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, однородна степени -12 (это очевидно) в однородном конусе $\widetilde{\Omega(T)}_0$ над $\Omega(T)_0$, и $\widetilde{\Phi}(g\omega) = \det(g)\widetilde{\Phi}(\omega)$ для любых $\omega \in \widetilde{\Omega(T)}_0$ и $g \in O^+(T)$, где $O^+(T)$—подгруппа индекса 2 группы $O(T)$, сохраняющая компоненту связности выше, отмеченную 0.

Тождество Борчердса (3.3) выше очень похоже на тождество для знаменателя алгебры Каца–Муди, но имеется некоторое отличие.

Чтобы проинтерпретировать (3.3) как тождество для знаменателя алгебры Ли, Борчердс определил (1988) *обобщенные алгебры Каца–Муди* $\mathfrak{g}(A')$, соответствующие более общим матрицам, чем обобщенные матрицы Картана. Разница заключается в том, что обобщенная матрица Картана A' может иметь также неположительные вещественные числа $a_{ij} \le 0$ на диагонали и вне диагонали, но все $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, если $a_{ii} = 2$. Определение обобщенной алгебры Каца—Муди $\mathfrak{g}(A')$, соответствующей обобщенной матрице Картана A', аналогично (1.1). Следует заменить последнюю строку в (1.1) на

$$(ad\ e_i)^{1-a_{ij}} e_j = (ad\ f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0,\ if\ i \ne j\ and\ a_{ii} = 2,$$

и добавить соотношение

$$[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0,\ if\ a_{ij} = 0.$$

Борчердс показал, что обобщенные алгебры Каца–Муди аналогичны обычным алгебрам Каца—Муди. Они также имеют тождество для знаменателя, которое имеет более общую форму, чем (1.2), и содержит (3.3) как частный случай.

Тождество (3.3) является тождеством для знаменателя обобщенной алгебры Каца—Муди $\mathfrak{g}(A')$, где A' — обобщенная матрица Картана, равная матрице Грама $A' = ((\alpha, \alpha'))$, $\alpha, \alpha' \in P'$, где

$$P' = P \cup 24\rho \cup 24(2\rho) \cup \cdots \cup 24(n\rho) \cup \ldots$$

— последовательность элементов решетки S. Здесь $24(n\rho)$ означает, что при определении матрицы Грама A' элемент $n\rho$ берется 24 раза.

Множество P' называется *множеством простых корней.* Оно делится на множество

$$P'^{re} = P$$

простых вещественных корней (они ортогональны фундаментальной камере $\mathcal{M}$ группы Вейля W и имеют положительный квадрат) и дополнительную последовательность

$$P'^{im} = 24\rho \cup 24(2\rho) \cup \cdots \cup 24(n\rho) \cup \ldots$$

(элементы P'^{im} имеют неположительные квадраты), задающуюся коэффициентами Фурье суммы в тождестве (3.3). Они называются простыми мнимыми корнями. Вместе простые вещественные и мнимые корни определяют обобщенную алгебру Каца–Муди $\mathfrak{g}(A')$.

Пример Борчердаса фундаментален и красив. Он имеет важные приложения в математике (например, к Монстру (moonshine)) и физике (например, к Теории Струн).

4 Теория лоренцевых алгебр Каца–Муди

Анализируя пример Борчердса, можно предложить общий класс лоренцевых алгебр Каца—Муди (или автоморфных алгебр Каца—Муди) $\mathfrak{g}$, см. работы В.А. Гриценко и автора.

Берутся нижеприведенные данные (1) — (5).

(1) Гиперболическая решетка S (т. е. целочисленная симметрическая билинейная форма сигнатуры $(n, 1)$), где $n \geq 1$.

(2) Группа отражений (или группа Вейля) $W \subset O(S)$, порожденная отражениями в корнях решетки S. Напомним, что $\alpha \in S$ называется корнем, если $\alpha^2 > 0$ и $\alpha^2 | 2(\alpha, S)$. Любой корень α дает отражение

$$s_\alpha : x \to x - (2(x, \alpha)/\alpha^2)\alpha, \quad x \in S$$

являющийся автоморфизмом решетки S.

(3) Множество P ортогональных корней к фундаментальной камере $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(S)$ группы W. Это означает, что множество P корней решетки S должно иметь свойство (3.1) (напомним)

$$\mathcal{M} = \{\mathbb{R}_{++}x \in \mathcal{L}(S) \mid (x, P) \leq 0\}, \tag{4.1}$$

и должно быть минимально с данным свойством. Кроме того, множество P должно иметь вектор Вейля $\rho \in S \otimes \mathbb{Q}$, определенный равенством (3.2) (правильнее называть его *решеточным вектором Вейля*). Напомним:

$$(\rho, \alpha) = -(\alpha, \alpha)/2, \quad \forall \alpha \in P. \tag{4.2}$$

Основным инвариантом данных (1) — (3) является обобщенная матрица Картана

$$A = \left(\frac{2(\alpha, \alpha')}{(\alpha, \alpha)} \right), \quad \alpha,\ \alpha' \in P. \tag{4.3}$$

Она определяет данные (1) — (3) с точностью до очень ясного отношения эквивалентности и задает множество P *простых вещественных корней алгебры* $\mathfrak{g}$, которую мы хотим построить.

(4) Автоморфная (голоморфная) форма $\Phi(z)$ на эрмитовой симметрической области типа IV, $z \in \Omega(V^+(S)) = \Omega(T)$, относительно подгруппы $G \subset O^+(T)$ конечного индекса расширенной решетки $T = U(k) \oplus S$, где

$$U(k) = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(Есть более общее определение, см. нашу статью с Гриценко, 1998, Int. J. Math, 9, N 2.) Авт. форма $\Phi(z)$ должна иметь разложение Фурье, имеющее вид тождества для знаменателя обобщенной алгебры Каца—Муди с гиперболической обобщенной матрицей Картана, а именно

$$\Phi(z) = \sum_{w \in W} \det(w)(exp(-2\pi i(w(\rho), z)) -$$

$$- \sum_{a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}} m(a) exp(-2\pi i(w(\rho + a), z))), \tag{4.4}$$

где все коэффициенты $m(a)$ должны быть целыми. Автоморфная форма Φ определяет множество *простых мнимых корней алгебры* $\mathfrak{g}$.

Как и в примере Борчердса, данные (1) — (4) задают обобщенную алгебру или супералгебру (если некоторые из коэффициентов $m(a)$ отрицательны) Каца—Муди $\mathfrak{g}$. (Определение $\mathfrak{g}$ см. ниже) Используя автоморфные свойства $\Phi(z)$, хотелось бы вычислить *бесконечное произведение в тождестве для знаменателя*

$$\Phi(z) = exp(-2\pi i(\rho, z)) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - exp(-2\pi i(\alpha, z)))^{mult(\alpha)} \ , \quad (4.5)$$

которое дает кратности $mult(\alpha)$ корней алгебры $\mathfrak{g}$. В случае супералгебры кратность

$$mult(\alpha) = \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{0}} - \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{1}} \qquad (4.6)$$

является разностью размерностей четной и нечетной частей корневого пространства $\mathfrak{g}_\alpha$.

Естественно дополнительно предполагать (по крайней мере, чтобы иметь результаты конечности) следующее дополнительное условие:

(5) Автоморфная форма Φ в области $\Omega(V^+(S)) = \Omega(T)$ должна быть *рефлективна.* Это означает, что дивизор (нулей) формы Φ является объединением квадратичных дивизоров, ортогональных корням расширенной решетки. Здесь для корня $\alpha \in T$ (определение корня решетки T то же, что и для решетки S) *квадратичный дивизор, ортогональный* α*,* равен

$$D_\alpha = \{\mathbb{C}\omega \in \Omega(T) \mid (\omega, \alpha) = 0\}.$$

Свойство (5) имеет место в примере Борчердса и во всех известных случаях. Кроме того, оно верно в окрестности каспа, в котором сходится бесконечное призведение (4.5). Таким образом, мы хотим, чтобы оно выполнялось глобально.

Обобщенная супералгебра Каца—Муди $\mathfrak{g}$, соответствующая данным (1) — (4), задается последовательностью $P' \subset S$ *простых корней.* Она делится на множество ${P'}^{re}$ *простых вещественных корней* и множество ${P'}^{im}_{\overline{0}}$ *четных простых мнимых корней* и множество ${P'}^{im}_{\overline{1}}$ *нечетных простых мнимых корней.*

Для примитивного $a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}$ с $(a,a) = 0$ нужно найти $\tau(na) \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, из тождества с формальной переменной t:

$$1 - \sum_{k \in \mathbb{N}} m(ka)t^k = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - t^n)^{\tau(na)}.$$

Множество ${P'}^{re} = P$, где P определено в данных (3). Множество ${P'}^{re}$ является четным: ${P'}^{re} = {P'}^{re}_{\overline{0}}$, ${P'}^{re}_{\overline{1}} = \emptyset$. Полагаем

$${P'}^{im}_{\overline{0}} = \{m(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M},\ (a,a) < 0 \ and\ m(a) > 0\} \cup$$
$$\{\tau(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M},\ (a,a) = 0 \ and\ \tau(a) > 0\}; \qquad (4.7)$$

$${P'}^{im}_{\overline{1}} = \{m(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M},\ (a,a) < 0 \ and\ m(a) < 0\} \cup$$
$$\{\tau(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M},\ (a,a) = 0 \ and\ \tau(a) < 0\} \qquad (4.8)$$

Обобщенная супералгебра Каца—Муди $\mathfrak{g}$ является супералгеброй Ли, порожденной h_r, e_r, f_r, где $r \in P'$. Все образующие h_r четны, образующие e_r, f_r четны (соответственно нечетны), если r четно (соответственно нечетно).

Они имеют определяющие соотношения 1) — 5), приведенные ниже.

1) Отображение $r \to h_r$ для $r \in P'$ задает вложение $S \otimes \mathbb{C}$ в $\mathfrak{g}$ как абелевой подалгебры (она четна).

2) $[h_r, e_{r'}] = (r, r')e_{r'}$ и $[h_r, f_{r'}] = -(r, r')f_{r'}$.

3) $[e_r, f_{r'}] = h_r$, если $r = r'$, и равно 0, если $r \neq r'$.

4) $(ad\ e_r)^{1-2(r,r')/(r,r)} e_{r'} = (ad\ f_r)^{1-2(r,r')/(r,r)} f_{r'} = 0$, если $r \neq r'$ и $(r, r) > 0$ (эквивалентно, $r \in P'^{\ re}$).

5) Если $(r, r') = 0$, то $[e_r, e_{r'}] = [f_r, f_{r'}] = 0$.

Используются работы Борчердса, Каца, Гриценко – Никулина, U. Ray. Для обычных алгебр Каца–Муди получаем обычное определение.

Обобщенные супералгебры Каца—Муди $\mathfrak{g}$, задаваемые данными (1) — (5), составляют теорию лоренцевых алгебр Каца—Муди (или автоморфных лоренцевых алгебр Каца—Муди), которую мы рассматриваем.

В силу (4) они имеют свойство, аналогичное свойству (II) для конечных или аффинных алгебр Ли: их тождество для знаменателя дает автоморфную форму. Для лоренцева случая — это автоморфная форма на эрмитовой симметрической области типа IV.

Что можно сказать по поводу аналога свойства (I) для конечных и аффинных алгебр Каца — Муди? Как много имеется данных (1) — (5)?

Далее предположим, что $\operatorname{rk} S \geq 3$. Это условие можно понимать как рассмотрение лоренцевых аналогов нетривиальных конечномерных полупростых алгебр Ли. Если $\operatorname{rk} S = 1,\ 2$, то классификация данных (1) — (5) другая и, по-видимому, более проста.

Теорема 4.1. *Если $\operatorname{rk} S \geq 3$, то множество возможных данных (1) — (3) в данных (1) — (4) конечно, если $\rho^2 = (\rho, \rho) < 0$ и "в существенном конечно," если $\rho^2 = 0$. Неравенство $\rho^2 > 0$ невозможно.*

Здесь "в существенном конечно" означает, что множество может быть бесконечно, но имеется очень ясное его описание. Например, множество возможных диаграмм Дынкина типа $\mathbb{A}_n$ бесконечно, но мы его очень ясно себе представляем.

Ключевой момент в даказательстве теоремы 4.1 заключается в том, что данные (1) — (4) дают $\rho^2 \leq 0$ и фундаментальная камера $\mathcal{M}$ имеет конечный объем, если $\rho^2 < 0$, и "почти конечный (как в примере Борчердса) объем," если $\rho^2 = 0$. Тогда число возможных решеток корней S конечно. Это следует из общих моих результатов и Винберга про арифметические группы, порожденные отражениями в пространствах Лобачевского.

Если дополнительно существует решеточный вектор Вейля ρ для P, то имеется конечность, если $\rho^2 < 0$, и почти конечность, если $\rho^2 = 0$, множеств групп Вейля W, фундаментальных камер $\mathcal{M}$ (с точностью до действия W) и множеств отогональных корней P к $\mathcal{M}$ (см. мои работы). Отмечу только, что все эти результаты очень нетривиальны. Это дает конечность или в существенном конечность множества возможных обобщенных матриц Картана A в (4.3)

Отсюда следует, что в принципе можно классифицировать все возможные данные (1) — (3) в данных (1) — (4). (Для $\operatorname{rk} S = 1,\ 2$ подобная классификация тривиальна.) Это делает теорию лоренцевых алгебр Каца—Муди очень похожей на теории конечных и аффинных алгебр Каца—Муди.

Было бы хорошо иметь результаты конечности также для данных (4), (5). Были получены некоторые частные результаты конечности в моих работах и работах Гриценко — Никулина, которые показывают, что автоморфные формы $\Phi(z)$ чрезвычайно редки. Это делает очень вероятным следующее утверждение.

Гипотеза 4.1. *Если* $\operatorname{rk} S \geq 3$*, то множество возможных данных (4), (5) в существенном конечно.*

Причина, по которой ожидается гипотеза 4.1, основана на принципе Кёхера: Любая голоморфная автоморфная форма на эрмитовой симметрической области Ω должна иметь нули в Ω, если $\dim \Omega - \dim \Omega_\infty \geq 2$.

Применяя этот принцип к ограничению $\Phi|\Omega(T_1)$ на все подобласти $\Omega(T_1) \subset \Omega(T)$, где $T_1 \subset T$— подрешетка сигнатуры $(k, 2)$, получаются очень сильные условия на решетку T, если она имеет рефлективную автоморфную форму Φ. Это было продемонстрировано в моих работах и в наших работах с Гриценко.

Предполагается, что Гипотеза 4.1 очень интересна. С нашей точки зрения, теория рефлективных автоморфных форм на областях типа IV $\Omega(T)$, где T — решетка сигнатуры $(n, 2)$, "аналогична *(Арифметическая Зеркальная Симметрия)* теории групп отражений W с фундаметальной камерой конечного или почти конечного объема гиперболических решеток S (см. мои работы и наши совместные работы с Гриценко).

Было бы интересно классифицировать (или описать) гипотетически "конечное множество"данных (1) — (5). Даже конечное множество может иметь очень интересную структуру. В результате получим некоторую теорию лоренцевых алгебр Каца—Муди.

В заключении опишем небольшой фрагмент этой классификации, полученный в наших работах с Гриценко.

Имеется ровно 12 обобщенных матриц Картана данных (1) — (3) в (1) — (4), которые симметричны, имеют ранг 3, имеют решеточный вектор Вейля ρ с $\rho^2 < 0$ и некомпактный фундаментальный многогранник $\mathcal{M}$ (имеется еще 4 матрицы с компактным $\mathcal{M}$).

Список всех симметричных гиперболических обобщенных матриц Картана ранга 3 с некомпактным $\mathcal{M}$ и $vol(\mathcal{M}) < \infty$, имеющих решеточный вектор Вейля ρ:

$$A_{1,0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,I} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,III} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -6 & -7 \\ -6 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ -6 & -6 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{2,0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{2,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -6 \\ -6 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,III} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -8 & -16 & -18 & -14 & -8 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -8 & -14 & -18 & -16 & -8 \\ -8 & 0 & 2 & -2 & -8 & -16 & -18 & -14 \\ -16 & -8 & -2 & 2 & 0 & -8 & -14 & -18 \\ -18 & -14 & -8 & 0 & 2 & -2 & -8 & -16 \\ -14 & -18 & -16 & -8 & -2 & 2 & 0 & -8 \\ -8 & -16 & -18 & -14 & -8 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & -14 & -18 & -16 & -8 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{3,0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -5 \\ -5 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -5 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{3,II} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -10 & -14 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -10 & -14 & -10 \\ -10 & -2 & 2 & -2 & -10 & -14 \\ -14 & -10 & -2 & 2 & -2 & -10 \\ -10 & -14 & -10 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -10 & -14 & -10 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{3,III} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 \\ -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 \\ -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 \\ -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 \\ -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 \\ -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 \\ -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 \\ -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 \\ -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 \\ -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная камера является замкнутым многоугольником на гиперболической плоскости с углами $\pi/2, 0, \pi/3$;
$0, \pi/3, \pi/3$; $0, 0, 0$; .... ;
0, $\pi/3$, 0, $\pi/3$, 0, $\pi/3$, $0, \pi/3$, 0, $\pi/3$, 0, $\pi/3$. Все они касаются окружности с центром $\mathbb{R}_{++}\rho$.

Для 9-ти обобщенных матриц Картана $A_{i,j}$, $i = 1, 2, 3$, и $j = 0, I, II$, построены автоморфные формы Φ для данных (4), (5) и, в результате, построены соответствующие (автоморфные) лоренцевы алгебры Каца—Муди, найдены их разложения в бесконечное произведение (4.5). См. наши статьи с Гриценко. Интересно, что некоторые из этих автоморфных форм были хорошо известны. Например, автоморфная форма Φ для $A_{1,II}$ является классической. Она имеет вес 5 и является произведением всех четных тэта-констант рода два (их десять). Она автоморфна относительно $Sp_4(\mathbb{Z})$ с некоторым квадратичным характером и дает дискриминант модулей алгебраических кривых рода 2. Автоморфнмя форма Φ для $A_{1,0}$ имеет вес 35 и автоморфна относительно $Sp_4(\mathbb{Z})$. Она была найдено Игузой более 45 лет назад и является $Sp_4(\mathbb{Z})$-автоморфной формой наименьшего нечетного веса. Для обеих этих автоморфных форм были найдены разложения в бесконечные произведения (4.5), которые не были известны. Здесь используется изоморфизм области типа IV и размерности 3 с верхней полуплоскостью Зигеля рода 2.

Все другие автоморфные формы Φ для $A_{1,0} - A_{3,II}$ не были известны. Приведем одну из них.

Дадим Φ для $A_{3,II}$. Для этого случая

$$T = 2U(12) \oplus \langle 2 \rangle = U(12) \oplus S, \ where\ S = U(12) \oplus \langle 2 \rangle.$$

Решетка S дает данное (1). Используем базис $f_1,\ \hat{f}_3,\ f_2$ решетки S с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Группа Вейля W в данных (2) порождена отражениями во всех элементах с квадратом 2 решетки S. Множество P в данных (3) равно

$$P = \{\alpha_1 = (0,1,0),\ \alpha_2 = (0,-1,1),\ \alpha_3 = (1,-5,2),$$

$$\alpha_4 = (2,-7,2),\ \alpha_5 = (2,-5,1),\ \alpha_6 = (1,-1,0)\}.$$

Оно имеет матрицу Грама $A_{3,II}$. Вектор Вейля $\rho = (1/6, -1/2, 1/6)$.

Автоморфная форма Φ является автоморфной касп формой Δ_1 относительно $G = O^+(T)$ с некоторым характером порядка 6. Она имеет наименьший возможный вес 1, разложение Фурье и разложение в бесконечное произведение

$$\Delta_1(z_1,z_2,z_3)=$$
$$\sum_{M\ge1}\sum_{\substack{m>0,\ l\in\mathbb{Z}\\ n,m\equiv1 \bmod 6\\ 4nm-3l^2=M^2}}\left(\frac{-4}{l}\right)\left(\frac{12}{M}\right)\sum_{a|(n,l,m)}\left(\frac{6}{a}\right)q^{n/6}r^{l/2}s^{m/6}=$$
$$q^{1/6}r^{1/2}s^{1/6}\prod_{\substack{n,l,m\in\mathbb{Z}\\(n,l,m)>0}}(1-q^nr^ls^m)^{f_3(nm,l)},$$

где $q=exp(24\pi iz_1)$, $r=exp(4\pi iz_2)$, $s=exp(24\pi iz_3)$ и

$$\left(\frac{-4}{l}\right)=\begin{cases}\pm1, & if\ l\equiv\pm1 \bmod 4,\\ 0, & if\ l\equiv 0 \bmod 2;\end{cases}$$

$$\left(\frac{12}{M}\right)=\begin{cases}1, & if\ M\equiv\pm1 \bmod 12,\\ -1, & if\ M\equiv\pm5 \bmod 12,\\ -0, & if\ (M,12)\ne1;\end{cases}$$

$$\left(\frac{6}{a}\right)=\begin{cases}\pm1, & if\ a\equiv\pm1 \bmod 6,\\ 0, & if\ (a,6)\ne1.\end{cases}$$

Кратности $f_3(nm,l)$ бесконечного произведения определяются слабой формой Якоби

$$\phi_{0,3}(\tau,z)=\sum_{n\ge0,l\in\mathbb{Z}}f_3(n,l)q^nr^l$$

веса 0 и индекса 3 с целыми коэффициентами Фурье:

$$\phi_{0,3}(\tau, z) =$$

$$r^{-1}\left(\prod_{n\geq 1}(1+q^{n-1}r)(1+q^{n}r^{-1})(1-q^{2n-1}r^{2})(1-q^{2n-1}r^{-2})\right)^{2},$$

где $q = exp(2\pi i\tau)$, $im\ \tau > 0$, и $r = exp(2\pi iz)$.

Дивизор формы Δ_1 является суммой с кратностями один всех квадратичных дивизоров, ортогональных элементам решетки T с квадратом 2. Эти данные S, W, P и Δ_1 определяют обобщенную лоренцеву суперални Ли Каца–Муди $\mathfrak{g}$ с вышеприведенным тождеством для знаменателя.

Для построения автоморфной формы Δ_1 используется *арифметический подъем форм Якоби на эрмитовы симметрические области типа IV, построенный Гриценко* (1992), и использованный в наших совместных работах 1996 – 1998 годов. Для разложения Δ_1 в бесконечное произведение используется *подъем Борчердса* (1995), который является экспоненциальным аналогом арифметического подъема.

5 Физические приложения.

Рассмотренные выше лоренцевы алгебры Каца—Муди и соответствующие автоморфные формы нашли интересные приложения в физике: Теории Струн, Зеркальной Симметрии и др. Например, см. обзор G. Moore, String duality, automorphic forms, and generalized Kac–Moody algebras//Nucl. Phys. Proc. Suppl. - 1998. (67), pp. 56 – 67, и другие физические статьи.

Список литературы

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Groupes de Coxeter et systèmes de Tits, Groupes engendres par des reflexions, systèmes de racines*, Hermann, Paris VI, 1968.

[2] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Springer, 1988. 663 pages.

[3] V.V. Nikulin, *Integral symmetric bilinear forms and some of their geometric applications*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 111–177; English transl. in Math. USSR Izv. **14** (1980), no. 1, 103–167.

[4] V.V. Nikulin, *A lecture on Kac–Moody algebras of the arithmetic type*, Prepr. Queen's Univ.,Canada. – 1994. N 6, 12 pages, arXiv:alg-geom/9412003.

[5] V.V. Nikulin *Группы отражений в пространствах Лобачевского и тождество для знаменателя лоренцевых алгебр Каца–Муди* Изв. АН СССР. Сер. мат. (60), 1996, N 2, 73—106. arXiv:alg-geom/9503003.

V.V. Nikulin
Steklov Mathematical Institute,
ul. Gubkina 8, Moscow 117966, GSP-1, Russia;
nikulin@mi.ras.ru vvnikulin@list.ru vnikulin@liv.ac.uk
Personal page: http://vnikulin.com