

А. Азраев

Кривизна: Баранский подход

Пусть M^n — замкнутое n -мерное многообразие.

Мы минимизируем функционал

$$J_t: (q(\cdot), u(\cdot)) \mapsto \int_0^t L(q(\tau), u(\tau)) d\tau,$$

$$\text{где } q(\tau) \in M^n, \quad u(\tau) \in \mathbb{R}^k,$$

$$\dot{q}(\tau) = f_0(q(\tau)) + \sum_{i=1}^k u_i'(\tau) f_i(q(\tau)).$$

Здесь $f_0, f_i \in \text{Vec } M^n$;

$L: M^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная типа Тюринга
(т.е. $u \mapsto L(q, u)$ вычислима и имеет отсрочку (u)).

Пусть $u, v \in \mathbb{R}^k$;

$$C_t(q_0, q_1) = \{ \inf_t T(q_{i.1}, u_{i.1}) : q_{i.0} = q_0, q_{i.1} = q_1 \}.$$

Там же то же самое $H: T^*M^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(p, q) = \max_u \left(\langle p, f_0(q) + \sum_{i=1}^k u f_i(q) \rangle - L(q, u) \right).$$

Пусть $(p(\cdot), q(\cdot))$ — произвольная гамма-функция системы:

$$\begin{cases} \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}(p, q) \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(p, q) \end{cases} \quad \text{Тога } q(\cdot) \text{ — "географическая":}$$

$$\text{Т.е.} \quad \dot{q}(t) = f_0(q(t)) + \sum_{i=1}^n u_i(t) f_i(q(t)) \quad u$$

$$C_{t'-t}^{t-t} (q(t), q(t')) = \int_t^{t'} L(q(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \text{если } t'-t \text{ мало.}$$

- 4 -

Судимых заглази: $L(q, u) = \frac{1}{2} |u|^2$, $R_0 = 0$

$$\Rightarrow H(p, q) = \sum_{i=1}^k \langle p, R_i(q) \rangle^2. \quad \text{Тогда:}$$

$$L_t(q_0, q_1) = \frac{1}{2t} S^2(p_0, q_1), \quad \text{где } S - \text{судимых расстояние}$$

Если, кроме того, $\text{span}\{R_1, \dots, R_k\} = \mathbb{R}^n$,

то S -риманово расстояние, т.е.

$H|_{\mathbb{R}^M}$ — положительно определенная
квадратичная форма.

Налия ку бура одо~~во~~во~~во~~ параметру
секундоту ку бура:

мерет откритие 2t C (q, q)

от кура еброго бо метрски
пу q, дузку и по макс t.

-6-

$$N \subset T_0 \quad \Delta_q = \text{span}\{f_1(q), \dots, f_k(q)\}.$$

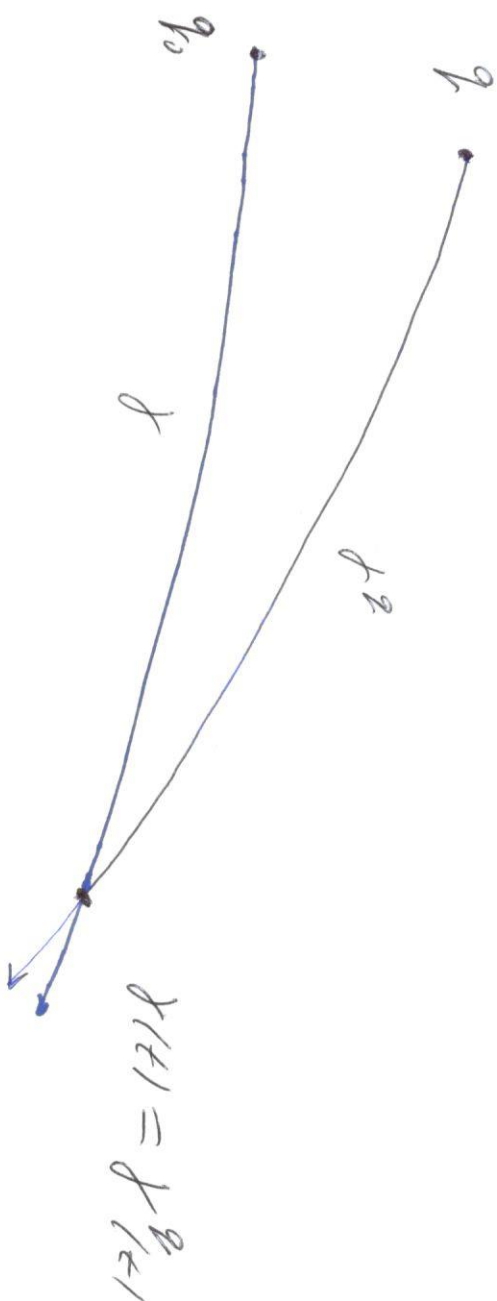
Кривизна в точке q есть тензор
 квадратичной формы $R: \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}, p \in T_q^* M^n$.

Форма $R_0: \Delta_0 \rightarrow \mathbb{R}$ называется кривизной
 геодезической $j: t \mapsto q_t$, где

$$\begin{cases} \dot{p}_t = - \frac{\partial H}{\partial q}(p_t, q_t) & \text{Движение:} \\ \dot{q}_t = \frac{\partial H}{\partial p}(p_t, q_t). & R_{p_0} \doteq R_t \end{cases}$$

- 7 -

Сформулируем лемму:



$$B^t: q \mapsto \frac{1}{2} |\dot{\gamma}^q(t) - \dot{\gamma}(t)|^2$$

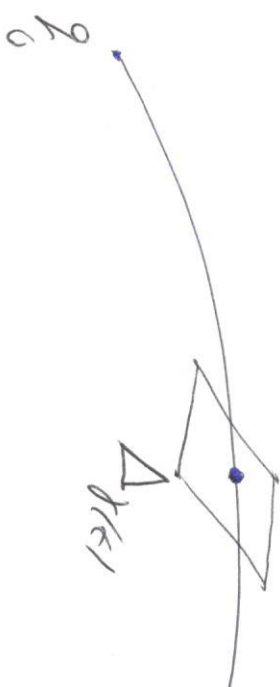
Теорема

$$B_{q_0}^2 B^t(V) = \frac{1}{2} Q(V) + R_\delta(V) + O(t), \quad V \in \Delta_{q_0};$$

$$Q(V) \geq |V|^2; \quad \text{Spec } Q = \{n_1^2, \dots, n_d^2\}, \quad \sum_{i=1}^d d_i = n, \quad d = \dim \Delta_{q_0}.$$

Пусть $\varphi^t: M^n \rightarrow M^n$ — поток, все траектории которого — горизонтальные кривые, пусть $\varphi^t(q_0) = \gamma(t)$.

Положим $\varphi_x^t \Delta_{\gamma(t)} = \Delta^t \subset T M^n$



$$\text{Прав: } \Delta^{(i)} = \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}} \Delta^t / t=0,$$

$$\Delta_{q_0} = \Delta^{(1)} \subset \Delta^{(2)} \subset \dots \subset \Delta^{(n)} = T_{q_0} M^n$$

Диаграмма Форда:

