Стохастические игры с непрерывным временем

Юрий Авербух

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
УрО РАН
ayv@imm.uran.ru

Большой семинар кафедры теории вероятностей МГУ
18 ноября 2015

Содержание

1. Введение.
2. Стратегии и движения: формализация стохастической игры с непрерывным временем.
3. Оценка функции цены.
4. Приложение: детерминированные дифференциальные игры.

Игра с непрерывным временем

- u – управление первого игрока;
- v – управление второго игрока;
- (t_0, x_0) – начальная позиция;
- $X(t; t_0, x_0, u, v)$, $t \in [0, T]$ – случайный процесс, описывающий положение системы, порожден выбором u и v;
- цель первого игрока минимизировать, а второго максимизировать значение $\mathbb{E}g(X(T; t_0, x_0, u, v))$.

Стратегии первого игрока

- детерминированное программное управление: $u(t)$;
- стохастическое программное управление: $u(t, \omega)$;
- детерминированная позиционная стратегия: $u(t, x)$;
- стохастическая стратегия с памятью: $u(t, x(\cdot), \omega)$.

Функция цены

$$c(t_0, x_0) = \min_u \max_v \mathbb{E} g(X(T; t_0, x_0, u, v)).$$

Стохастические дифференциальные игры

$$dX(t) = f(t, X(t), u, v)dt + \sigma(t, X(t))dW(t).$$

Здесь

- $t \in [0, T]$,
- $X(t) \in \mathbb{R}^d$,
- $u \in U$, $v \in V$
- $W(\cdot)$ – стандартный d-мерный винеровский процесс.

Функция цены удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle \nabla c, f(t, x, u, v) \rangle + \frac{\sigma^2(t, x)}{2} \triangle c = 0,$$
$$c(T, x) = g(x).$$

Марковские игры с непрерывным временем

- S – множество состояний, S не более чем счетно;
- $X(t)$ – состояние марковской цепи с матрицей переходных вероятностей $Q_{ij}(t,u,v)$:

$$Q_{ij}(t,u,v) \geq 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{j\in S} Q_{ij}(t,u,v) = 0.$$

Функция цены удовлетворяет уравнению

$$\frac{dc(t,i)}{dt} + \min_{u\in U}\max_{v\in V}\left[\sum_{j\in S} Q_{ij}(t,u,v)c(t,j)\right] = 0,$$

$$c(T,i) = g(i).$$

Дифференциальные игры

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), u, v)dt.$$

Здесь

- $t \in [0, T]$,
- $x(t) \in \mathbb{R}^d$,
- $u \in U$, $v \in V$

Функция цены удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle \nabla c, f(t, x, u, v) \rangle = 0,$$
$$c(T, x) = g(x).$$

Управление с моделью [Н.Н. Красовский, А.И. Субботин]

- (t_0, x_0) – начальная позиция, $X(t)$ – случайный процесс, описывающий положение системы;
- управление первого игрока постоянно между моментами t_i, $i = 0, \ldots, n$;
- $Y(t)$ – модель системы, строится первым игроком;
- обычно $Y(t)$ описывается некой управляемой системой, при этом управления выбираются первым игроком кусочно программно на интервалах $[t_{i-1}, t_i)$.
- первый игрок формирует управление на интервале $[t_i, t_{i+1})$ на основании положения системы $X(t_i)$ и модели $Y(t_i)$.
- фактически, управление на $[t_i, t_{i+1})$ определяется $X(t_0), \ldots, X(t_i)$.

Управление с моделью

- Красовский, Субботин, 1972: *исходная система* описывается дифференциальным уравнением, *модель* – копия исходной системы;
- Красовский, Котельникова, 2009, 2010: *исходная система* описывается дифференциальным уравнением, *модель* – стохастичсеким дифференциальным уравнением;
- Авербух, 2015: *исходная система* описывается марковской цепью, *модель* – дифференциальным уравнением.

Исходная система

Положение системы $X(t)$ определяется управляемым марковским процессом с генератором

$$
\begin{aligned}
L_t^1[u,v]\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle G^1(t,x,u,v)\nabla,\nabla\rangle\varphi(x) \\
+ \langle f^1(t,x,u,v),\nabla\rangle\varphi(x) \\
+ \int_{\mathbb{R}^d}[\varphi(x+y)-\varphi(x)-\langle y,\nabla\varphi(x)\rangle\mathbf{1}_{B_1}(y)]\nu^1(t,x,u,v,dy)].
\end{aligned}
$$

- u – управление первого игрока;
- v – управление второго игрока.
- первый игрок стремится минимизировать, а второй – максимизировать величину $\mathbb{E}g(X(T))$.

Исходная система

Пусть $\mathcal{D}^1$ таково, что $\mathcal{D}^1 \subset C^2(\mathbb{R}^d)$, $C_b^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}^1$, и функции $x \mapsto \langle a, x \rangle$, $x \mapsto \|x - a\|^2$ лежат в $\mathcal{D}^1$.

Предположение: для всех $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ и постоянных $u \in U$, $v \in V$ существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_s\}_{s \in [0,T]}, P)$ и случайный процесс X такие, что

- $X(t_0) = x_0$ P-п.н.;
- для всех $\varphi \in \mathcal{D}^1$ процесс

$$\varphi(X(t)) - \int_{t_0}^{t} L_\tau^1[u, v]\varphi(X(\tau))d\tau$$

является мартингалом.

Стратегии с памятью первого игрока

Набор $\mathfrak{u} = (\Omega^U, \mathcal{F}^U, \{\mathcal{F}^U_s\}_{s\in[t_0,T]}, u_{x(\cdot)}, P^U_{x(\cdot)})$ называется стратегией первого игрока, если

1. $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, \{\mathcal{F}^U_s\}_{s\in[t_0,T]})$ пространство с фильтрацией;
2. $u_{x(\cdot)}$ – $\{\mathcal{F}^U_s\}_{s\in[t_0,T]}$-прогрессивно измеримый случайный процесс со значениями в U;
3. $P^U_{x(\cdot)}$ – вероятность на $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, \{\mathcal{F}^U_s\}_{s\in[t_0,T]})$.
4. зависимость $x(\cdot) \mapsto u_{x(\cdot)}(t,\omega)$ измерима для всех $t \in [t_0, T]$ и $\omega \in \Omega^U$;
5. если $y(s) = x(s)$, $s \in [t_0, t]$, то $u_{x(\cdot)}(s) = u_{y(\cdot)}(s)$, $s \in [t_0, t]$ и для любого $A \in \mathcal{F}^U_t$ $P^U_{x(\cdot)}(A) = P^U_{y(\cdot)}(A)$.

Здесь $x(\cdot) : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ (реализовавшаяся траектория).

Пошаговая стратегия

Стратегия $\mathfrak{u} = (\Omega^U, \mathcal{F}^U, \{\mathcal{F}^U_s\}_{s\in[t_0,T]}, u_{x(\cdot)}, P^U_{x(\cdot)})$ называется пошаговой, если существует разбиение $\Delta = \{t_i\}_{i=0}^n$ интервала $[t_0, T]$ такое, что из свойства

$$x(t_k) = y(t_k) \quad k = 0, \ldots, r-1$$

следует равенство

$$u_{x(\cdot)}(s) = u_{y(\cdot)}(s), \quad P_{x(\cdot)}(A) = P_{y(\cdot)}(A)$$

при всех $s \in [0, t_r)$ and $A \in \mathcal{F}^U_{t_r-0}$.

Движение

Пусть

- $\mathfrak{u} = (\Omega^U, \mathcal{F}^U, \{\mathcal{F}^U_s\}_{s\in[t_0,T]}, u_{x(\cdot)}, P^U_{x(\cdot)})$ – стратегия первого игрока;
- $\mathfrak{v} = (\Omega^V, \mathcal{F}^V, \{\mathcal{F}^V_s\}_{s\in[t_0,T]}, v_{x(\cdot)}, P^V_{x(\cdot)})$ – стратегия второго игрока;
- (t_0, x_0) – начальная позиция.

Движение

$(\Omega^X, \mathcal{F}^X, \{\mathcal{F}_s^X\}_{s\in[t_0,T]}, X(\cdot), P)$ называется реализацией движения если

1. $(\Omega^X, \mathcal{F}^X, \{\mathcal{F}_s^X\}_{s\in[t_0,T]})$ – пространство с фильтрацией.
2. P – вероятность на $\Omega^X \times \Omega^U \times \Omega^V$.
3. $X(\cdot)$ – случайный процесс, определённый на $\Omega^X \times \Omega^U \times \Omega^V$ со значениями в $\mathbb{R}^d$; $X(t_0) = x_0$ P-п.н.
4. $$\varphi(X(t)) - \int_{t_0}^{t} L^1_\tau[u(\tau), v(\tau)]\varphi(X(\tau))d\tau$$
   является мартингалом. Здесь
   $u(\tau, \omega^X, \omega^U, \omega^V) \triangleq u_{X(\cdot,\omega^X,\omega^U,\omega^V)}(\tau, \omega^U)$,
   $v(\tau, \omega^X, \omega^U, \omega^V) \triangleq v_{X(\cdot,\omega^X,\omega^U,\omega^V)}(\tau, \omega^V)$.
5. если ξ (соответственно, η) – случайная величина, определённая на Ω^U (соответственно, Ω^V), то
   $$\mathbb{E}^U_{x(\cdot)}\xi = \mathbb{E}(\xi|X(\cdot) = x(\cdot)), \quad \mathbb{E}^V_{x(\cdot)}\eta = \mathbb{E}(\eta|X(\cdot) = x(\cdot)).$$

Результат

$$J^*(t_0, x_0, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}) \triangleq \sup\{\mathbb{E}g(X(T)) :$$
$$(\Omega^X, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_s^X\}_{s\in[0,T]}, X(\cdot), P) \text{ реализующим движение,}$$
$$\text{порожденное стратегиями } \mathfrak{u} \text{ и } \mathfrak{v}$$
$$\text{и начальной позицией } (t_0, x_0)\}.$$

$$J_*(t_0, x_0, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}) \triangleq \inf\{\mathbb{E}g(X(T)) :$$
$$(\Omega^X, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_s^X\}_{s\in[0,T]}, X(\cdot), P) \text{ реализующим движение,}$$
$$\text{порожденное стратегиями } \mathfrak{u} \text{ и } \mathfrak{v}$$
$$\text{и начальной позицией } (t_0, x_0)\}.$$

Верхняя и нижняя функции цены

Гарантированый результат первого игрока (верхняя функция цены):

$$\Gamma_1(t_0, x_0) = \inf_{\mathfrak{u}} \sup_{\mathfrak{v}} J^*(x_0, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}).$$

Гарантированый результат второго игрока (нижняя функция цены):

$$\Gamma_2(t_0, x_0) = \sup_{\mathfrak{v}} \inf_{\mathfrak{u}} J_*(x_0, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}).$$

Свойство

$$\Gamma_1(t_0, x_0) \geq \Gamma_2(t_0, x_0).$$

Моделирующая система

$$
\begin{aligned}
L_t^2[u,v]\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle G^2(t,x,u,v)\nabla,\nabla\rangle\varphi(x) \\
+ \langle f^2(t,x,u,v),\nabla\rangle\varphi(x) \\
+ \int_{\mathbb{R}^d}[\varphi(x+y)-\varphi(x)-\langle y,\nabla\varphi(x)\rangle\mathbf{1}_{B_1}(y)]\nu^2(t,x,u,v,dy)].
\end{aligned}
$$

$u \in U$, $v \in V$.

u-стабильность

Функция $c_+ : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется *u-стабильной* относительно генератора L^2, если

1. $c_+(T, x) = g(x)$;
2. для любых $t, \theta,\ t < \theta$ существует измеримое пространство с фильтрацией $(\widetilde{\Omega}^{t,\theta}, \widetilde{\mathcal{F}}^{t,\theta}, \{\widetilde{\mathcal{F}}_s^{t,\theta}\}_{s\in[t,\theta]})$ такое, что для всех $v \in V$, и $\xi \in \mathbb{R}^d$ можно подобрать случайные процессы $\mu_{\xi,v}^{t,\theta}$, $Y_{\xi,v}^{t,\theta}$ со значениями в $\mathrm{rpm}(U)$ и $\mathbb{R}^d$ соответственно и вероятность $\widetilde{P}_{\xi,v}^{t,\theta}$ на $\widetilde{\Omega}^{t,\theta}$ со свойствами: $Y_{\xi,v}^{t,\theta}(t) = \xi$,
$$\varphi(Y_{\xi,v}^{t,\theta}(s)) - \int_t^s \int_U L_\tau^2[u, v]\varphi(Y_{\xi,v}^{t,\theta}(\tau))\mu_{\xi,v}^{t,\theta}(\tau, du)d\tau$$
является мартингалом для всех $\varphi \in \mathcal{D}^2$ и
$$c_+(t, \xi) \geq \widetilde{\mathbb{E}}_{\xi,v}^{t,\theta} c_+(\theta, Y_{\xi,v}^{t,\theta}(\theta));$$

Здесь $\widetilde{\mathbb{E}}_{\xi,v}^{t,\theta}$ – математическое ожидание, соответствующее вероятности $\widetilde{P}_{\xi,v}^{t,\theta}$.

Обозначения

$$\Sigma^i(t,x,u,v) \triangleq \sum_{j=1}^{d} G^i_{jj}(t,x,u,v) + \int_{\mathbb{R}}^{d} \|y\|^2 \nu^i(t,x,u,v,dy),$$

$$b^i(t,x,u,v) \triangleq f^i(t,x,u,v) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_1} y\nu^i(t,x,u,v,dy).$$

Условия

- U, V – компакты;
- G^i, f^i непрерывны;
- ν^i слабо непрерывна;
- существуют функции $\alpha^i(\cdot)$, $i = 1, 2$ такие, что $\alpha^i(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и для всех $s, t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in U$, $v \in V$

$$\|b^i(t, x, u, v) - b^i(s, x, u, v)\| \le \alpha^i(t - s);$$

Условия

- существуют константы M_0^i и M_1^i, $i = 1, 2$, такие что для всех $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in U$, $v \in V$

$$|\Sigma^i(t, x, u, v)| < M_0^i, \quad \|b^i(t, x, u, v)\| \leq M_1^i;$$

- существуют константы K^i, $i = 1, 2$ такие, что

$$\|b^i(t, x, u, v) - b^i(t, y, u, v)\| \leq K^i \|x - y\|^2;$$

- g липшицева с контантой R.

Условие Айзекса

Выполнено одно из двух условий:

(1) для всех $t \in [0, T]$, $x, \xi \in \mathbb{R}^d$, $u \in U$, $v \in V$

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle \xi, b^1(t, x, u, v) \rangle = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle \xi, b^1(t, x, u, v) \rangle.$$

(2) для всех $t \in [0, T]$, $x, \xi \in \mathbb{R}^d$, $u \in U$, $v \in V$

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle \xi, b^2(t, x, u, v) \rangle = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle \xi, b^2(t, x, u, v) \rangle.$$

Теорема

Пусть c_+ – u-стабильная относительно генератора L^2 функция.

Для любого разбиения Δ интервала $[t_0, T]$ существует пошаговая стратегия $\hat{\mathfrak{u}}_\Delta$ такая, что

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup\{J^*(t_0, x_0, \hat{\mathfrak{u}}_\Delta, \mathfrak{v})\} \leq c_+(t_0, x_0) + R\cdot C\sqrt{\Theta}.$$

$$\Theta = \varkappa + M_0^1 + M_0^2,$$

$$\varkappa \triangleq \sup_{t\in[0,T], x\in\mathbb{R}^d, u\in U, v\in V} \left\| b^1(t,x,u,v) - b^2(t,x,u,v)\right\|^2,$$

$$C = \sqrt{Te^{(3+2K^i)T}},$$

$i = 1$, если условие Айзекса выполнено для исходной системы, и $i = 2$, если условие Айзекса выполнено для модельной системы.

Следствие

Пусть c_+ – u-стабильная относительно генератора L^2 функция. Тогда для верхней цены игры, определяемой генератором L^1, справедлива оценка:

$$\Gamma_1(t_0, x_0) \leq c_+(t_0, x_0) + R \cdot C\sqrt{\Theta}.$$

v-стабильность

Функция $c_- : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется v-стабильной относительно генератора L^2 если

1. $c_-(T, x) = g(x)$;
2. для любых t, θ, $t < \theta$ существует измеримое пространство с фильтрацией $(\overline{\Omega}^{t,\theta}, \overline{\mathcal{F}}^{t,\theta}, \{\overline{\mathcal{F}}_s^{t,\theta}\}_{s \in [t,\theta]})$ такое, что для всех $u \in U$, и $\xi \in \mathbb{R}^d$ можно подобрать случайные процессы $\mu_{\xi,u}^{t,\theta}$, $Y_{\xi,u}^{t,\theta}$ со значениями в $\mathrm{rpm}(V)$ и $\mathbb{R}^d$ соответственно и вероятность $\overline{P}_{\xi,u}^{t,\theta}$ на $\widetilde{\Omega}^{t,\theta}$ со свойствами: $Y_{\xi,u}^{t,\theta}(t) = \xi$,
$$\varphi(Y_{\xi,u}^{t,\theta}(s)) - \int_t^s \int_U L_\tau^2[u, v]\varphi(Y_{\xi,u}^{t,\theta}(\tau))\mu_{\xi,u}^{t,\theta}(\tau, dv)d\tau$$
является мартингалом для всех $\varphi \in \mathcal{D}^2$ и
$$c_-(t, \xi) \geq \overline{\mathbb{E}}_{\xi,u}^{t,\theta} c_+(\theta, Y_{\xi,u}^{t,\theta}(\theta));$$

Здесь $\overline{\mathbb{E}}_{\xi,u}^{t,\theta}$ – математическое ожидание, соответствующее вероятности $\overline{P}_{\xi,u}^{t,\theta}$.

Следствие

Пусть c_- – v-стабильная относительно генератора L^2 функция. Тогда для нижней цены игры, определяемой генератором L^1, справедлива оценка:

$$\Gamma_2(t_0, x_0) \geq c_-(t_0, x_0) - R \cdot C\sqrt{\Theta}.$$

Конструкция стратегии с моделью

Пусть $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, $u \in U$, $v \in V$

- если условие Айзекса выполнено для исходной системы, то

$$\varpi(t, x, y, u, v) \triangleq \langle x - y, b^1(t, x, u, v)\rangle;$$

- если условие Айзекса выполнено для модельной системы, то

$$\varpi(t, x, y, u, v) \triangleq \langle x - y, b^2(t, y, u, v)\rangle.$$

Конструкция стратегии с моделью

Пусть

- в момент t_i реализовалось положение системы x_i, а положение модели y_i.
- $$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \varpi(t_i, x_i, y_i, u, v) = \max_{v \in V} \varpi(t_i, x_i, y_i, u_i, v).$$
- $$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \varpi(t_i, x_i, y_i, u, v) = \min_{u \in U} \varpi(t_i, x_i, y_i, u, v_i).$$

Конструкция стратегии с моделью

Для $t \in [t_i, t_{i+1})$

$$\hat{\mathrm{u}}_\Delta(t) \triangleq u_i.$$

Положение модели на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ определяется случайным процессом $Y^{t_i,t_{i+1}}_{y_i,v_i}(t)$ таким, что

$$\varphi(Y^{t_i,t_{i+1}}_{y_i,v_i}(s)) - \int_t^s \int_U L^2_\tau[u, v_i]\varphi(Y^{t_i,t_{i+1}}_{y_i,v_i}(\tau))\mu^{t,\theta}_{\xi,v_i}(\tau, du)d\tau$$

является мартингалом для всех $\varphi \in \mathcal{D}^2$ и

$$c_+(t_i, y_i) \geq \widetilde{\mathbb{E}}^{t_i,t_{i+1}}_{y_i,v_i} c_+(t_{i+1}, Y^{t_i,t_{i+1}}_{y_i,v_i}(t_{i+1})).$$

Дифференциальная игра

Динамика:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f^1(t, x(t), u(t), v(t)),$$
$$t \in [0, T], \quad x(t) \in \mathbb{R}^d, \quad u(t) \in U, \quad v(t) \in V.$$

Генератор:

$$L^1_t[u, v]\varphi(x) = \langle f^1(t, x, u, v), \nabla\varphi(x)\rangle.$$

Функция платы: $g(x(T))$.

Функция цены

$$\mathrm{Val}(t_0, x_0) = \Gamma_1(t_0, x_0) = \Gamma_2(t_0, x_0).$$

Val – решение уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle \nabla c, f(t, x, u, v) \rangle = 0,$$
$$c(T, x) = g(x).$$

Моделирующая система

Динамика:

$$dX(t) = f^1(t, X(t), u(t), v(t)) + \sigma dW(t),$$
$$t \in [0, T], \quad X(t) \in \mathbb{R}^d, \quad u(t) \in U, \quad v(t) \in V.$$

Генератор:

$$L_t^2[u, v]\varphi(x) = \langle \nabla \varphi, f^1(t, x, u, v) \rangle + \frac{\sigma^2}{2} \triangle \varphi(x).$$

Функция платы: $g(x(T))$.

Функция цены моделирующей системы

c_σ – решение уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \min_{u\in U}\max_{v\in V}\langle \nabla c, f(t,x,u,v)\rangle + \frac{\sigma^2}{2}\triangle c = 0,$$
$$c(T,x) = g(x).$$

c_σ – u- и v-стабильна относительно генератора L^2.

Оценка

$$|\mathrm{Val}(t_0, x_0) - c_\sigma(t_0, x_0)| \leq C\sigma.$$

Марковская цепь

Пусть

- h – положительное число,
- $f^1(t, x, u, v) = (f_1^1(t, x, u, v), \ldots, f_d^1(t, x, u, v))$,
- e^i обозначает i-й орт,
- $$\chi_i(t, x, u, v) \triangleq \begin{cases} e^i, & f_i^1(t, x, u, v) > 0, \\ -e^i, & f_i^1(t, x, u, v) < 0, \\ 0, & f_i^1(t, x, u, v) = 0. \end{cases}$$

Марковская игра

Матрица Колмогорова:

$$Q^h_{xy}(t,u,v) = \begin{cases} \frac{1}{h}|f_i(t,x,u,v)|, & y = x + h\chi_i(t,x,u,v), \\ -\frac{1}{h}\sum_{i=1}^d |f_i(t,x,u,v)|, & x = y, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\nu^2(t,x,u,v,A) \triangleq \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} |f_i(t,x,u,v)|\delta_{h\chi_i(t,x,u,v)}(A).$$

Генератор:

$$L^2_t[u,v]\varphi(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(x+y) - \varphi(x)]\nu^2(t,x,u,v,dy)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |f_i(t,x,u,v)| \frac{\varphi(x + h\chi_i(t,x,u,v)) - \varphi(x)}{h}.$$

Верхняя функция цены для марковской игры

$$\frac{d}{dt}\eta_h^+(t,x) + \min_{u\in U}\max_{v\in V}\sum_{i=1}^{d}|f_i(t,x,u,v)| \frac{\eta_h^+(t,x+h\chi_i(t,x,u,v)) - \eta_h^+(t,x)}{h} = 0,$$

$$\eta_h^+(T,x) = g(x)$$

где $x \in h\mathbb{Z}^d$ – параметр.

Теорема

Существует константа C_1 такая, что

$$|\mathrm{Val}(t,x) - \eta_h^+(t,x)| \le C_1\sqrt{h}.$$

Спасибо за внимание!