58-я научная конференция МФТИ

Структура вакуума в обобщенной модели Джейнса — Каммингса

Лучников Илья, ФОПФ

Москва 2015

Гамильтониан обобщенной модели Джейнса — Каммингса

$$H = H_a + H_f - e * (r, E)$$

$$H_f = \sum_k \omega_k (a_k^+ a_k + \frac{1}{2})$$

$$H_a = \frac{1}{2} \Omega \sigma_z$$

$$-e(r, E) = \sum_k g_k (\sigma_+ + \sigma_-) (a_k^+ + a_k)$$

ω_k — частота k-й моды поля

Ω — частота атомного перехода

g_k — константа взаимодействия атома с k-й модой поля

$\hbar=1$

RW — приближение

Два типа вкладов в гамильтониан взаимодействия:

- $\sigma_+ a_k$, $\sigma_- \, a_k^+$ $\qquad \Delta E_{RW} = |\Omega - \omega|$
- $\sigma_+ a_k^+$, $\sigma_- a_k$ $\qquad \Delta E_{CRW} = |\Omega + \omega|$

Вклады CRW далеки от резонанса, получаем приближенный гамильтониан:

$$H_{RW} = H_a + H_f - \sum_k g_k(\sigma_+ a_k + \sigma_- \, a_k^+)$$

Спектр задачи в RW — приближении, одномодовый случай

$$\left[\omega a^+ a + \frac{1}{2}\Omega\sigma_z + g(\sigma_+ a + \sigma_- a^+), a^+ a + \frac{1}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

Ищем собственные состояния гамильтониана в виде:

$$A_n|-\rangle|n\rangle + B_n|+\rangle|n-1\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$|\psi_n^+\rangle = \mathrm{Cos}(\theta_n)|+\rangle|n-1\rangle + Sin(\theta_n)|-\rangle|n\rangle$$
$$|\psi_n^-\rangle = -Sin(\theta_n)|+\rangle|n-1\rangle + Cos(\theta_n)|-\rangle|n\rangle$$

$$\tan(2\theta_n) = -\frac{g\sqrt{n}}{\omega - \Omega}$$

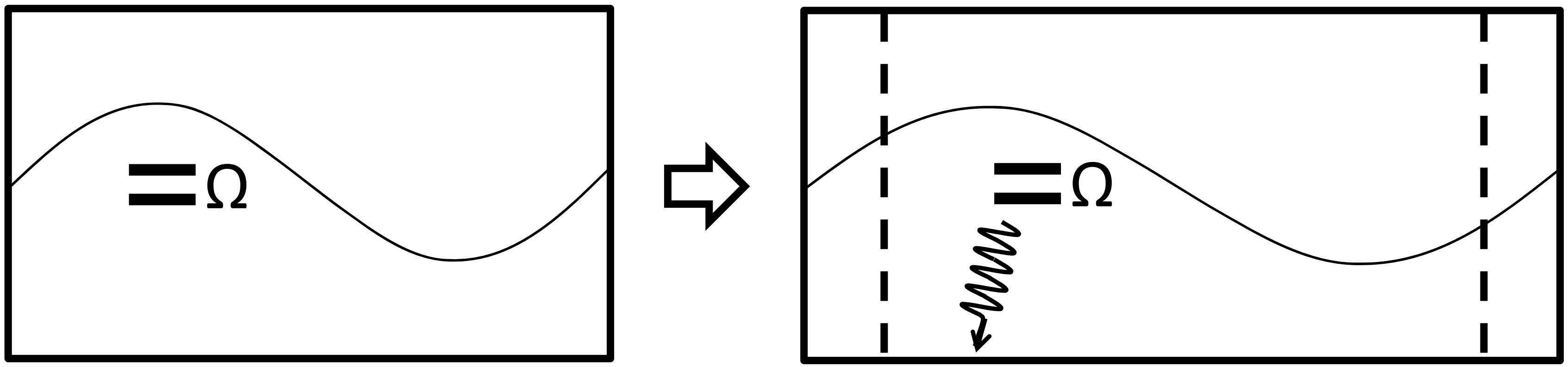
Задачи, требующих учета CRW вкладов.

Основное состояние в RW приближении совпадает с основным состоянием невзаимодействующих атома и поля: $|-\rangle|0\rangle$

$$\Downarrow$$

Нужно учитывать CRW вклад. Он приведет к Лэмбовскому сдвигу энергии основного состояния и изменению структуры вакуума.

Задача о динамическом эффекте Лэмба.



$$H(t) = H_{\omega_1}^{(JC)} + (\omega(t) - \omega_1)\, a^+ a + \frac{i\dot{\omega}}{4\omega}(a^2 - {a^+}^2)$$

Метод получения CRW поправок.

Применим следующее унитарное преобразование U к гамильтониану:

$$H = H_0 + H_1 \qquad\qquad U = e^{S}$$

$$H_0 = \omega a^{+} a + \frac{1}{2}\Omega\sigma_z \qquad\qquad S = g\xi(\sigma_+ + \sigma_-)(a^{+} - a)$$

$$H_1 = g(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^{+})$$

Получим: $e^{S} H e^{-S} = e^{S} H_0 e^{-S} + e^{S} H_1 e^{-S}$

$$e^{S} H_0 e^{-S} = H_0 + [S, H_0] + \frac{1}{2}\big[S, [S, H_0]\big] + \cdots$$

$g^0 \quad g^1 \quad g^2 \quad g^3$

$$e^{S} H_1 e^{-S} = H_1 + [S, H_1] + \frac{1}{2}\big[S, [S, H_1]\big] + \cdots$$

$$H_0' = H_0 = \omega a^+ a + \frac{1}{2}\Omega\sigma_z$$

$$H_1' = [S, H_0] + H_1 = g[(1 - \xi(\omega + 2\Omega))\,(\sigma_- a + \sigma_+\, a^+) + (1 -$$
$$- \xi(\omega - 2\Omega))\,(\sigma_+ a + \sigma_-\, a^+)]$$

$$H_2' = \frac{1}{2}\big[S, [S, H_0]\big] + [S, H_1] = g^2\xi^2(\omega + 2\Omega(a + a^+)^2\sigma_z) -$$
$$- 2g^2\,\xi$$

Если $\xi = \frac{1}{\omega+2\Omega}$*, то гамильтониан примет вид:*

$$H = \omega a^+ a + \frac{1}{2}\Omega\sigma_z + g(1 - \frac{\omega-2\Omega}{\omega+2\Omega})\,(\sigma_+ a + \sigma_-\, a^+) -$$
$$- g^2\,\frac{\omega+4\Omega}{(\omega+2\Omega)^2} + g^2\,\frac{2\Omega}{(\omega+2\Omega)^2}\,(a^+ - a)^2\sigma_z + O(g^3)$$

Применим ещё одно унитарное преобразование:

$$e^T, T = g^2 t\left(a^{+2} - a^2\right)\sigma_z, t = \frac{\Omega}{\omega(\omega+2\Omega)^2}$$

Получаем гамильтониан:

$$H = \omega a^+ a + \frac{1}{2}\Omega\sigma_z + g(1 - \frac{\omega-2\Omega}{\omega+2\Omega})\,(\sigma_+ a + \sigma_- a^+) -$$
$$- g^2\frac{\omega+4\Omega}{(\omega+2\Omega)^2}(1 + \frac{2\Omega}{\omega+4\Omega}(1 + 2a^+ a)\sigma_z) + O(g^3)$$

Основное состояние данного гамильтониана легко находится:

$$|g\rangle = |-\rangle|0\rangle$$

Основное состояние в обобщенной модели Джейнса — Каммингса

$$|0\rangle_{JC} = \frac{U(g\xi)_{sh} + U(-g\xi)_{sh}}{2} U(-2tg^2)_{sq}|-\rangle|0\rangle$$
$$+ \frac{U(g\xi)_{sh} - U(-g\xi)_{sh}}{2} U(-2tg^2)_{sq}|+\rangle|0\rangle$$

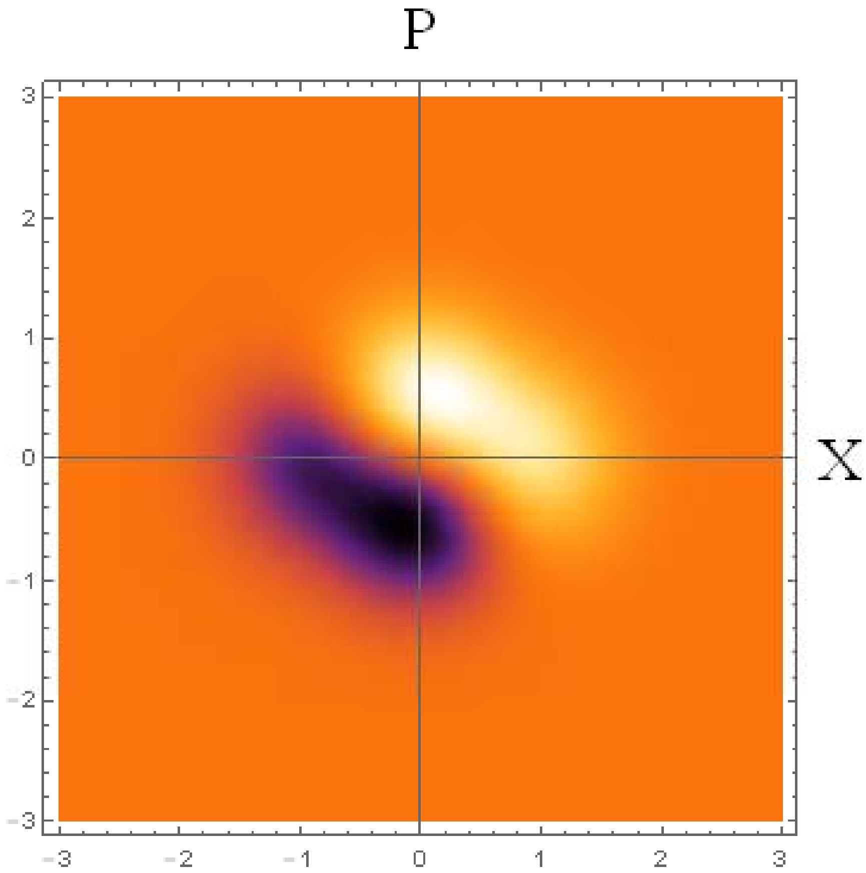
Здесь U_{sh} — оператор сдвига, U_{sq} — оператор сжатия.

$$\xi = \frac{1}{\omega + 2\Omega}$$

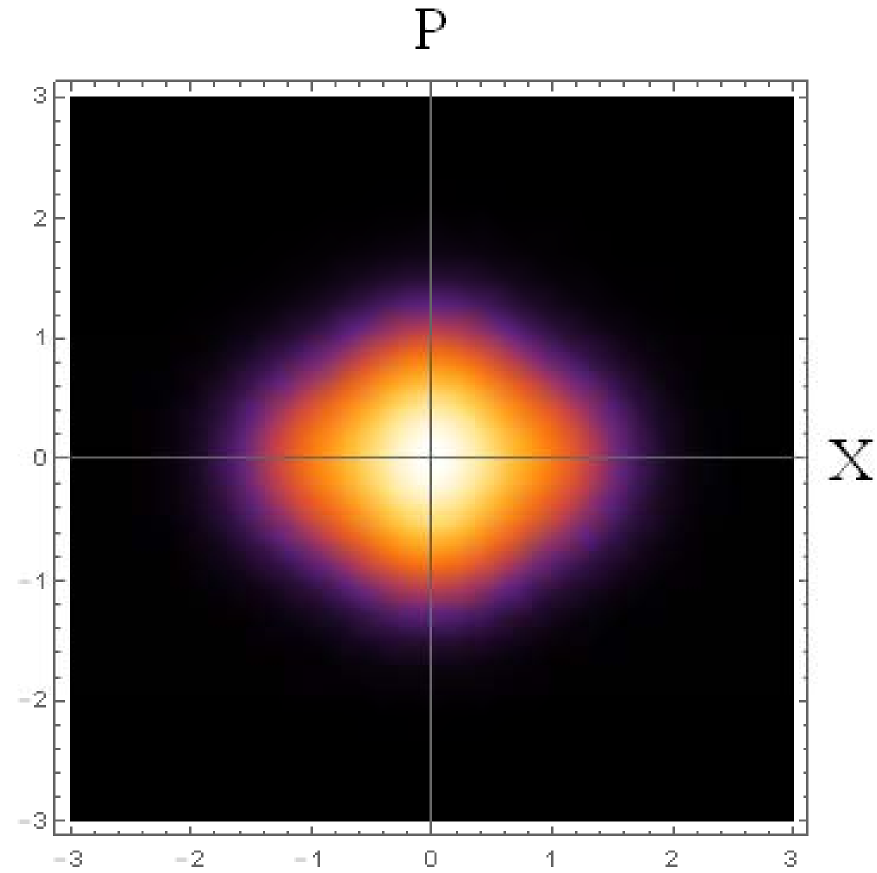
$$t = \frac{\Omega}{\omega(\omega + 2\Omega)^2}$$

Функции Вигнера для состояний поля с заданным состоянием атома

Возбужденный атом



Атом в основном состоянии



Голоморфное представление

Бозоны

$$(g,f) = \int \frac{dz d\bar{z}}{2i\pi} e^{-z\bar{z}} \overline{g(z)} f(z)$$

$$I(z,\bar{z}) = e^{z\bar{z}}$$

$$a^{+} \to \mathrm{z}$$

$$a \to \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{z^n}{\sqrt{n}}$$

Фермионы

$$(g,f) = \int \frac{d\theta d\bar{\theta}}{2i\pi} e^{-\theta\bar{\theta}} \overline{g(\theta)} f(\theta)$$

$$I(\theta,\bar{\theta}) = e^{\theta\bar{\theta}}$$

$$\sigma_{+} \to \theta$$

$$\sigma_{-} \to \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\theta^{2} = 0$$

$$\{1, \theta\}$$

Интеграл по путям

$$H = \omega z \frac{\partial}{\partial z} + \Omega\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + g(z + \frac{\partial}{\partial z})(\theta + \frac{\partial}{\partial\theta})$$

$$\langle\theta'', z''|e^{-\beta H}\left|\bar{\theta}', \bar{z}'\right\rangle = \int_{\bar{\theta}',\bar{z}'}^{\theta'',z''} D\theta D\bar{\theta} DzD\bar{z}\, e^{-\bar{\theta}(0)\theta(0)+\bar{z}(0)z(0)-S(\bar{\theta},\theta,\bar{z},z)}$$

$$S(\bar{\theta}, \theta, \bar{z}, z) = \int_0^\beta d\tau[\bar{\theta}\left(\dot{\theta} - \Omega\theta\right) + \bar{z}(-\dot{z} + \omega z) + g(\bar{\theta} + \theta)(\bar{z} + z)]$$

Выводы

- *Получена структура вакуума во втором порядке по константе взаимодействия*
- *Возможно построение теории возмущений по другим частям гамильтониана*
- *Задача переформулирована в рамках интеграла по путям(метод на данный момент не работает)*

Спасибо за внимание!