

Семинар по теории операторов и теории функций

По понедельникам, ПОМИ, ауд. 311, 17:30–19:00.

Заседание 07.12.2015

Н. Н. Осипов

Два типа операторов Рубио де Франсия на пространствах Трибеля–Лизоркина и Бесова
(совместная работа с Е. В. Малинниковой)

Рассмотрим не более чем счетное семейство $\{I_m\}$ попарно непересекающихся интервалов на $\mathbb{R}$, и пусть $\{\varphi_m\}$ — семейство функций, построенных с помощью сдвигов и растяжений из одной функции $\varphi \in \mathcal{S}$ таким образом, что $\text{supp } \widehat{\varphi}_m \subset I_m$. Рассмотрим два оператора, которые преобразуют скалярно-значные функции в последовательности функций по формулам

$$Sf = \{f * \varphi_m\} \quad \text{и} \quad \widetilde{S}f = \{e^{-2\pi i a_m x} (f * \varphi_m)\},$$

где a_m — левые концы интервалов I_m . В 1983 Рубио де Франсия доказал, что

$$\|\widetilde{S}f\|_{L^p(I^2)} \leq C_{p,\varphi} \|f\| \quad \text{для} \quad 2 \leq p < \infty,$$

где константа $C_{p,\varphi}$ не зависит ни от функции f , ни от семейства $\{I_m\}$. Множители $e^{-2\pi i a_m x}$ играют существенную роль в доказательстве, но поскольку L^p -нормы инвариантны относительно вращений, эти экспоненты можно исключить из формулировки утверждения. Таким образом мы видим, что оператор S будет также ограничен на L^p -пространствах. Теперь отметим, что пространства Трибеля–Лизоркина $\dot{F}_{pq}^s$, помимо пространств Лебега, включают в себя пространства Соболева, ВМО, пространства гладких функций и т.д., и при этом свойство инвариантности относительно вращений будет выполняться лишь для L^p -пространств. Нормы в пространствах Бесова $\dot{B}_{pq}^s$ также не удовлетворяют этому свойству.

Мы наметили контуры общей картины о поведении операторов S и $\widetilde{S}$ на пространствах $\dot{F}_{pq}^s$ и $\dot{B}_{pq}^s$, в рамках которой был обнаружен интересный феномен: только оператор $\widetilde{S}$ будет ограничен на некоторых из пространств $\dot{F}_{pq}^s$ и $\dot{B}_{pq}^s$, но при этом сразу оба оператора $\widetilde{S}$ и S оказываются ограниченными на некоторых других таких пространствах, нормы в которых не инвариантны относительно вращений.