Поиск равновесий в многостадийных моделях транспортных потоков

А.В Гасников[1]

[1]Факультет управления и прикладной математики
МФТИ

26 декабря 2015

Рассмотрим транспортную сеть, заданную ориентированным графом $\Gamma^1 = \left\langle V^1, E^1 \right\rangle$. Часть его вершин $O^1 \subseteq V^1$ — источники, а другая часть вершин $D^1 \subseteq V^1$ — стоки. Множество всех пар источник-сток обозначим $OD^1 \subseteq O^1 \otimes D^1$. Пусть каждой паре $w^1 \in OD^1$ соответствует своя корреспонденция $d^1_{w^1} := d^1_{w^1} \cdot M$ $(M \gg 1)$ пользователей, которые хотят в единицу времени перемещаться из источника в сток, соответствующих заданной корреспонденции w^1. Пусть ребра Γ^1 разделены на два типа: $E^1 = \tilde{E}^1 \coprod \bar{E}^1$. Ребра типа $\tilde{E}^1$ характеризуются неубывающими функциями затрат $\tau^1_{e^1}\left(f^1_{e^1}\right) := \tau^1_{e^1}\left(f^1_{e^1}/M\right)$. Затраты $\tau^1_{e^1}\left(f^1_{e^1}\right)$ несут те пользователи, которые используют в своем пути ребро $e^1 \in \tilde{E}^1$, в предположении, что поток пользователей по этому ребру равен $f^1_{e^1}$.

Пары вершин, задающие ребра типа $\bar{E}^1$, являются, в свою очередь, парами источник-сток OD^2 (с корреспонденциями $d^2_{w^2} = f^1_{e^1}$, $w^2 = e^1 \in \bar{E}_1$) в транспортной сети следующего уровня $\Gamma^2 = \left\langle V^2, E^2 \right\rangle$, ребра которой, в свою очередь, разделены на два типа: $E^2 = \tilde{E}^2 \coprod \bar{E}^2$. Ребра типа $\tilde{E}^2$ характеризуются неубывающими функциями затрат $\tau^2_{e^2}\left(f^2_{e^2}\right) := \tau^2_{e^2}\left(f^2_{e^2}/M\right)$. Затраты $\tau^2_{e^2}\left(f^2_{e^2}\right)$ несут те пользователи, которые используют в своем пути ребро $e^2 \in \tilde{E}^2$, в предположении, что поток пользователей по этому ребру равен $f^2_{e^2}$.

Пары вершин, задающие ребра типа $\bar{E}^2$, являются, в свою очередь, парами источник-сток OD^3 (с корреспонденциями $d^3_{w^3} = f^2_{e^2}$, $w^3 = e^2 \in \bar{E}^2$) в транспортной сети более высокого уровня $\Gamma^3 = \left\langle V^3, E^3 \right\rangle$, и т. д. Будем считать, что всего имеется m уровней: $\tilde{E}^m = E^m$. Обычно в приложениях число m небольшое: 2—10.

Введем необходимые в дальнейшем обобзначения:

$$g_{p^m}^m(t) = \sum_{e^m \in \tilde{E}^m} \delta_{e^m p^m} t_{e^m} = \sum_{e^m \in E^m} \delta_{e^m p^m} t_{e^m},$$

$$g_{p^k}^k(t) = \sum_{e^k \in \tilde{E}^k} \delta_{e^k p^k} t_{e^k} - \sum_{e^k \in \bar{E}^k} \delta_{e^k p^k} \gamma^{k+1} \psi_{e^k}^{k+1}\left(t \middle/ \gamma^{k+1}\right), \quad k = 1, \ldots, m-1,$$

$$\psi_{w^k}^k(t) = \ln\left(\sum_{p^k \in P_{w^k}^k} \exp\left(-g_{p^k}^k(t)\right)\right), \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$\psi^1(t) = \sum_{w^1 \in OD^1} d_{w^1}^1 \psi_{w^1}^1(t).$$

Предположим, что каждый пользователь l транспортной сети, использующий корреспонденцию $w^k \in OD^k$ на уровне k (ребро $e^{k-1} \left(= w^k\right) \in \bar{E}^{k-1}$ на уровне $k-1$), выбирает маршрут следования $p^k \in P^k_{w^k}$ на уровне k, если

$$p^k = \arg \max_{q^k \in P^k_{w^k}} \left\{ -g^k_{q^k}\left(t\right) + \xi^{k,l}_{q^k} \right\},$$

где независимые случайные величины $\xi^{k,l}_{q^k}$ имеют одинаковое двойное экспоненциальное распределение, также называемое *распределением Гумбеля*:

$$P\left(\xi^{k,l}_{q^k} < \zeta\right) = \exp\left\{-e^{-\zeta/\gamma^k - E}\right\}.$$

Отметим также, что если взять $E \approx 0,5772$ — константа Эйлера, то

$$M\left[\xi^{k,l}_{q^k}\right] = 0, \quad D\left[\xi^{k,l}_{q^k}\right] = \left(\gamma^k\right)^2 \pi^2 \Big/ 6.$$

Распределение Гиббса (логит-распределение)

$$x_{p^k}^k = d_{w^k}^k \frac{\exp\left(-g_{p^k}^k(t)\big/\gamma^k\right)}{\sum\limits_{\tilde{p}^k \in P_{w^k}^k} \exp\left(-g_{\tilde{p}^k}^k(t)\big/\gamma^k\right)}, \quad p^k \in P_{w^k}^k. \tag{1}$$

получается в пределе, когда число агентов на каждой корреспонденции $w^k \in OD^k$, $k = 1, \ldots, m$ стремится к бесконечности (случайность исчезает и описание переходит на средние величины). Полезно также в этой связи иметь в виду, что

$$\gamma^k \psi_{w^k}^k\left(t\big/\gamma^k\right) = M_{\left\{\xi_{p^k}^k\right\}_{p^k \in P_{w^k}^k}}\left[\max_{p^k \in P_{w^k}^k}\left\{-g_{p^k}^k(t) + \xi_{p^k}^k\right\}\right].$$

Таким образом, если каждый пользователь сориентирован на вектор затрат t на ребрах E (одинаковый для всех пользователей) и на каждом уровне (принятия решения) пытается выбрать кратчайший путь, исходя из зашумленной информации и исходя из усреднения деталей более высоких уровней (такое усреднение можно обосновывать, если, например, ввести разный масштаб времени (частот принятия решений) на разных уровнях, а можно просто постулировать, что пользователь так действует, как это принято в моделях типа Nested Logit), то такое поведение пользователей (в пределе, когда их число стремится к бесконечности) приводит к описанию распределения пользователей по путям/ребрам (1). Равновесная конфигурация характеризуется тем, что вектор t породил, согласно формуле (1), такой вектор $f = \Theta x$, что имеет место соотношение $t = \{\tau_e(f_e)\}_{e \in E}$. Поиск такого t (неподвижной точки) приводит к следующей задаче.

Рассмотрим граф

$$\Gamma = \coprod_{k=1}^{m} \Gamma^k = \left\langle V, E = \coprod_{k=1}^{m} \tilde{E}^k \right\rangle.$$

Обозначим через $t_e = \tau_e(f_e)$ (здесь специально упрощаем обозначения, поскольку, ввиду предыдущего раздела, контекст должен восстанавливаться однозначным образом). Запишем задачу выпуклой оптимизации, решение которой дает искомую неподвижную точку (далее мы используем обозначение $\mathrm{dom}\,\sigma^*$ — область определения сопряженной к σ функции)

$$\Psi = \min_{t \in \mathrm{dom}\,\sigma^*} \left\{ \gamma^1 \psi^1 \left(t/\gamma^1 \right) + \sum_{e \in E} \sigma_e^* \left(t_e \right) \right\}, \qquad (2)$$

$$\sigma_e^*(t_e) = \max_{f_e} \left\{ f_e t_e - \int_0^{f_e} \tau_e(z)\, dz \right\},$$

$$\frac{d\sigma_e^*(t_e)}{dt_e} = \frac{d}{dt_e} \max_{f_e} \left\{ f_e t_e - \int_0^{f_e} \tau_e(z)\, dz \right\} = f_e : \quad t_e = \tau_e(f_e), \quad e \in E.$$

Теорема 1. *Решение задачи выпуклой оптимизации (2)* $t \geq 0$ *существует и единственно. По этому решению однозначно можно восстановить вектора потоков по ребрам* f *и путям* x *(если какой-то из* $\gamma^k \to 0+$, *то однозначность восстановления* x *может потеряться)*

$$f = \Theta x = -\nabla \psi^1 \left(t / \gamma^1 \right),$$

или, что то же самое,

$$f = \Theta x,$$

$$x^k_{p^k} = d^k_{w^k} \frac{\exp\left(-g^k_{p^k}(t) \middle/ \gamma^k \right)}{\sum\limits_{\tilde{p}^k \in P^k_{w^k}} \exp\left(-g^k_{\tilde{p}^k}(t) \middle/ \gamma^k \right)},$$

$$p^k \in P^k_{w^k}, \quad w^k \in OD^k, \quad k = 1, ..., m.$$

Композитный быстрый градиентный метод (и различные его вариации с адаптивным подбором константы Липшица градиента, универсальный метод и др.) обладает прямо-двойственной структурой. Это означает, что генерируемые этим методом последовательности $\left\{t^i\right\}$ и $\left\{\tilde{t}^i\right\}$ обладают следующим свойством:

$$\gamma^1\psi^1\left(\tilde{t}^N/\gamma^1\right)+\sum_{e\in E}\sigma_e^*\left(\tilde{t}_e^N\right)-$$
$$-\min_{t\in\mathrm{dom}\,\sigma^*}\left\{\frac{1}{A_N}\left[\sum_{i=0}^N a_i\cdot\left(\gamma^1\psi^1\left(t^i/\gamma^1\right)+\left\langle\nabla\psi^1\left(t^i/\gamma^1\right),t-t^i\right\rangle\right)\right]+\right.$$
$$\left.\sum_{e\in E}\sigma_e^*\left(t_e\right)\right\}\le\frac{CL_2R_2^2}{A_N},$$

где C – небольшая (как правило, $\leq$10) константа, зависящая от метода, $a_N\sim N$, $A_N=\sum\limits_{i=0}^N a_i$, $A_N\sim N^2$, R_2 – евклидов размер решения задачи (2).

Теорема 2. *Пусть задача (2) решается прямо-двойственным методом, генерирующим последовательности* $\left\{t^i\right\}$ и $\left\{\tilde{t}^i\right\}$, *тогда*

$$0 \le \left\{\gamma^1 \psi^1 \left(\tilde{t}^N \big/ \gamma^1\right) + \sum_{e \in E} \sigma_e^* \left(\tilde{t}_e^N\right)\right\} - \Psi \le \frac{CL_2 R_2^2}{A_N},$$

где

$$f^i = \Theta x^i = -\nabla \psi^1 \left(t^i / \gamma^1\right), \quad x^i = \left\{x_{p^k}^{k,i}\right\}_{p^k \in P_{w^k}^k, w^k \in OD^k}^{k=1,\dots,m},$$

$$x_{p^k}^{k,i} = d_{w^k}^k \frac{\exp\left(-g_{p^k}^k\left(t^i\right) \big/ \gamma^k\right)}{\sum\limits_{\tilde{p}^k \in P_{w^k}^k} \exp\left(-g_{\tilde{p}^k}^k\left(t^i\right) \big/ \gamma^k\right)},$$

$$\bar{f}^N = \frac{1}{A_N} \sum_{i=0}^{N} a_i f^i, \quad \bar{x}^N = \frac{1}{A_N} \sum_{i=0}^{N} a_i x^i.$$

Приведенная теорема 2 оценивает число необходимых итераций. Но на каждой итерации необходимо считать $\nabla\psi^1\left(t/\gamma^1\right)$, а для ряда методов и $\psi^1\left(t/\gamma^1\right)$ (например, для всех адаптивных методов, настраивающихся на параметры гладкости задачи). Можно показать (с помощью сглаженного варианта метода Форда – Беллмана), что для этого достаточно сделать $\mathrm{O}\left(\left|O^1\right|\left|E\right|L\right)$ арифметических операций, где L – число ребер в самом длинном пути. Однако необходимо обговорить один нюанс. Для возможности использовать сглаженный варианта метода Форда – Беллмана необходимо предположить, что любые движения по ребрам графа с учетом их ориентации являются допустимыми, т. е. множество путей, соединяющих заданные две вершины (источник и сток), — это множество всевозможных способов добраться из источника в сток по ребрам имеющегося графа с учетом их ориентации.