

Анализ устойчивости нормальной формы аффинных систем с ограниченным управлением

Alexander Pesterev

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
Russian Academy of Sciences

15/03/2016

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений вида (ограничимся стационарным случаем для простоты)

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = f_0(x) + f_1(x)u, \quad (1)$$

$f_0(x)$ и $f_1(x) \neq 0$ – непрерывные функции, $x \in D_x \subseteq R^n$,
 $|u| \leq \bar{u}$ – скалярное непрерывное управление.

Замыкание системы (1) обратной связью

$$u(x, t) = \text{sat}_{\bar{u}} \left(-\frac{\sigma(x) + f_0(x)}{f_1(x)} \right), \quad \sigma(x) = c^T x, \quad (2)$$

дает нелинейную систему вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = -\Phi(\sigma, x). \quad (3)$$

Задача: построить область притяжения нулевого решения системы (3).

Необходимое условие: $|f_0(0)/f_1(0)| < \bar{u}$.

Система сравнения

Наряду с (3) рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = -\beta(t)\sigma(x), \quad 0 < \beta_0 \leq \beta(t) \leq 1. \quad (4)$$

Система (4) абсолютно устойчива в угле (секторе) $[\beta_0, 1]$, если ее нулевое решение асимптотически устойчиво при любых $\beta(t)$, удовлетворяющих ограничению. Предположим, что правая часть нелинейной системы удовлетворяет “секторному” условию

$$0 < \beta_0 \leq \Phi(\sigma, x)/\sigma \leq 1 \quad \forall x \in R^n. \quad (5)$$

Утверждение. Для того, чтобы нелинейная система (3) была абсолютно устойчива в угле $[\beta_0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы решение $x = 0$ системы (4) было абсолютно устойчиво при любых измеримых функциях $\beta(t)$, удовлетворяющих секторному условию.

Инвариантная область системы

Условие (5) не выполняется в R^n , т.е. система (3) не является абсолютно устойчивой ни в каком секторе $[\beta_0, 1]$. Выход: вместо всего R^n рассмотреть *инвариантную область* системы (3), т.е. такую область, которая вместе с любой принадлежащей ей точкой содержит всю полутраекторию системы, начинающуюся в этой точке, при любых функциях $\Phi(\sigma, x)$, удовлетворяющих секторному условию (5). Как найти инвариантную область системы?

Теорема 1. Пусть система сравнения (4) абсолютно устойчива в секторе $[\beta_0, 1]$ и пусть $\Upsilon \subseteq D_x$ ее инв. область. Пусть в Υ выполняются секторные неравенства (5). Тогда Υ – инв. область системы (3) и при любых $x_0 \in \Upsilon$ и любых $\Phi(\sigma, x)$, удовлетворяющих условию (5), решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ стремится к положению равновесия $x = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Область устойчивости

Построение области устойчивости системы (3):

- (i) нахождение семейства инвариантных областей абсолютно устойчивой в секторе $[\beta_0, 1]$ системы сравнения;
- (ii) выбор такой области из этого семейства, которая принадлежит области определения системы (1) и в которой выполняется секторное условие (5);
- (iii) нахождение (или оценка) наименьшего $\beta_0 > 0$, при котором еще имеет место абсолютная устойчивость системы (4) в угле $[\beta_0, 1]$.

Инв. область будем строить с помощью квадратичной функции Ляпунова $\mathcal{L} = x^T P x$, где P – положительно-определенная матрица порядка n , т.е. искать инвариантное множество в виде эллипсоида

$$\Omega(P) = \{x : x^T P x \leq 1\}. \quad (6)$$

Инвариантные эллипсоиды

Перепишем систему сравнения в матричном виде

$$\dot{x} = A_{\beta}(t)x, \quad (7)$$

где

$$A_{\beta}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\beta(t)c_1 & -\beta(t)c_2 & -\beta(t)c_3 & \cdots & -\beta(t)c_n \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Обозначим через A_1 и A_{β_0} постоянные матрицы, получающиеся из (8) подстановкой $\beta(t) \equiv 1$ и $\beta(t) \equiv \beta_0$.

Инвариантные эллипсоиды системы сравнения

Известно, что для того чтобы система сравнения была абсолютно устойчива в секторе $[\beta_0, 1]$, достаточно, чтобы существовала общая квадратичная функция Ляпунова у линейных систем $\dot{x} = A_1 x$ и $\dot{x} = A_{\beta_0} x$.

В свою очередь, для того, чтобы у этих систем существовала общая квадратичная функция Ляпунова $\mathcal{L} = x^T P x$, необходимо и достаточно чтобы имела решение система линейных матричных неравенств

$$P A_1 + A_1^T P \leq 0, \quad P A_{\beta_0} + A_{\beta_0}^T P \leq 0. \quad (9)$$

Теорема 2. Пусть P – решение системы л.м.н. (9) при некотором β_0 и $\Omega(P)$ – соответствующий эллипсоид. Пусть $\Omega(P) \subseteq D_x$ и выполнено секторное условие (5) $\forall x \in \Omega$. Тогда $\Omega(P)$ – инвариантный эллипсоид системы (3) и при любых $x_0 \in \Omega(P)$ решение $x(t)$ системы (3) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ стремится к $x = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Выполнение секторного условия

Выполнение секторного условия можно обеспечить добавлением одного л.м.н.

Лемма 2. Пусть нижняя грань U_0 функции

$$U(x) = |f_1(x)|\bar{u} - |f_0(x)| \quad (10)$$

в некоторой содержащей $x = 0$ области $\Pi \subseteq D_x$ больше нуля (такая область всегда существует), $U_0 \equiv \inf_{x \in \Pi} U(x) > 0$, и пусть матрица P эллипсоида $\Omega \subseteq \Pi$ удовлетворяет л.м.н.

$$P \geq cc^T \frac{\beta_0^2}{U_0^2}, \quad (11)$$

Тогда, в Ω выполняется секторное условие (5).

В качестве $\Pi \in D_x$ будем брать *область с простой границей* (ограничена пов-тями 1-го и 2-го порядков), для которой условие $\Omega(P) \subseteq \Pi$ можно записать в виде л.м.н.

$$l_i(P) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (12)$$

Основная теорема

Примеры: $|x_k| \leq \alpha_k \iff J_k - P \leq 0, J_k = \text{diag}(0, \dots, 1/\alpha_k^2, \dots, 0)$
 $\|x\| \leq 1 \iff I - P \leq 0, I - \text{единичная матрица}$

Теорема 3. Пусть $\Pi \subseteq D_x$ – область с простой границей, заданная неравенствами $l_i(P) \leq 0, i = 1, \dots, m$, и пусть $U_0 = \min_{x \in \Pi} (|f_1(x)|\bar{u} - |f_0(x)|) > 0$. Пусть P – решение системы линейных матричных неравенств

$$PA_1 + A_1^T P \leq 0, PA_{\beta_0} + A_{\beta_0}^T P \leq 0, P \geq cc^T \frac{\beta_0^2}{U_0^2}, l_i(P) \leq 0, i = 1, \dots, m.$$

при некотором $0 < \beta_0 \leq 1$. Тогда, соответствующий эллипсоид $\Omega(P)$ является инвариантным эллипсоидом системы (3) и при любых $x_0 \in \Omega(P)$ решение $x(t)$ системы (3) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ стремится к положению равновесия $x = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Оценка нижней границы сектора устойчивости

Л.м.н. $PA_1 + A_1^T P \leq 0$, $PA_{\beta_0} + A_{\beta_0}^T P \leq 0$ имеют решение, если $\beta_0 \in [\beta_0^*, 1]$, где β_0^* нижняя граница сектора в котором система сравнения (а) абсолютно устойчива и (б) имеет квадратичную функцию Ляпунова, производная которой отрицательна при любых $\beta_0^* \leq \beta(t) \leq 1$.

Величина β_0^* зависит от порядка системы и коэффициентов обратной связи и легко может быть оценена численно: решаем л.м.н. для нескольких значений β_0 и берем в качестве оценки наименьшее значение, при котором система имела решение.

В случае кратного собственного значения $-\lambda$, $\lambda > 0$, матрицы A_1 доказано, что величина сектора не зависит от λ и определяется только порядком системы. Для $n = 2$ $\beta_0^* = 1/9$ (выведено аналитически). Для $n = 3$ $\beta_0^* = 1/5$ (получено численно).

Алгоритм построения области устойчивости

Дано: нелинейная система (1), коэффициенты c_i линейной функции $\sigma(x)$ в обратной связи (2) и оценка $[\beta_0^*, 1]$ сектора абсолютной устойчивости системы сравнения.

1. Задаемся некоторым $0 < U_0 < |f_1(0)|\bar{u} - |f_0(0)|$ и строим область с простой границей Π , в которой $U(x) \geq U_0$.

Записываем условия принадлежности искомого эллипсоида области Π в виде л.м.н. $l_i(P) \leq 0, i = 1, \dots, m$.

2. Выбираем значение $\beta_0 \in [\beta_0^*, 1]$.

3. Решаем систему л.м.н.

$$PA_1 + A_1^T P \leq 0, PA_{\beta_0} + A_{\beta_0}^T P \leq 0, P \geq c c^T \frac{\beta_0^2}{U_0^2}, l_i(P) \leq 0, i = 1, \dots, m.$$

Оценка области притяжения: $\Omega = \{x : x^T P x \leq 1\}$.

Для нахождения “наилучшего” эллипсоида решается задача минимизации функции $F(U_0, \beta_0)$ (например, $F = \text{tr}[P(U_0, \beta_0)]$).

Пример: интегратор

Область устойчивости нулевого решения интегратора

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = u, |u| \leq \bar{u}, \quad (13)$$

с обратной связью $u(x) = -\text{sat}_{\bar{u}}(\sigma(x))$.

$$f_0(x) \equiv 0, f_1(x) \equiv 1, D_x = R^n, U(x) \equiv \bar{u} \implies \Pi = R^n$$

Выбирая некоторое $\beta_0 \in [\beta_0^*, 1]$, решаем систему л.м.н.

$$PA_1 + A_1^T P \leq 0, PA_{\beta_0} + A_{\beta_0}^T P \leq 0, P \geq c c^T \beta_0^2 / \bar{u}^2, \quad (14)$$

Для нахождения “наилучшего” эллипсоида решается задача оптимизации функции одной переменной β_0 .

Численный пример

Рассмотрим двумерную управляемую систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = f_0(x) + u, |u| \leq 1, D_x = R^2, \quad (15)$$

$$f_0(x) = x_1^2 \operatorname{sign}(x_1) + x_2^2 \operatorname{sign}(x_2),$$

и замкнем ее обратной связью вида

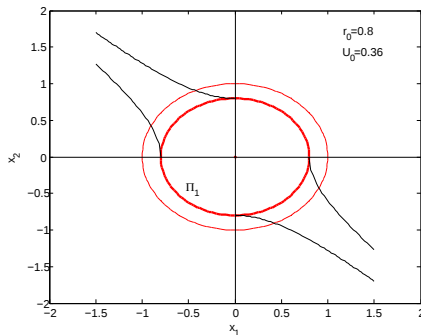
$$u(x) = -\operatorname{sat}_1(f_0(x) + \sigma(x)), \sigma(x) = \lambda^2 x_1 + 2\lambda x_2, \lambda > 0$$

(линейная система имеет кратный корень $(-\lambda)$).

Минимум U_0 функции $U(x) = 1 - |f_0(x)|$ достигается на дугах окружности радиуса $r_0 = \sqrt{1 - U_0}$ (1-й и 3-й кв.) и на гиперболах $x_1^2 - x_2^2 = r_0^2$ и $-x_1^2 + x_2^2 = r_0^2$ (2-й и 4-й кв.).

Аппроксимация D_x областью с простой границей (окружностью радиуса r_0)

$$\Pi_1: x_1^2 + x_2^2 \leq r_0^2, U_0 = 1 - r_0^2$$
$$\Omega(P) \subseteq \Pi_1: I - P \leq 0$$



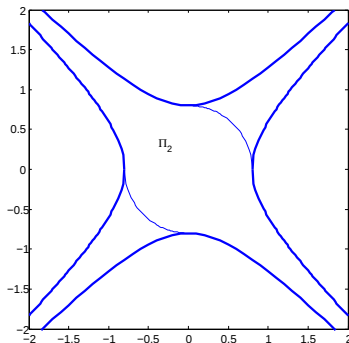
Аппроксимация D_x областью с простой границей (гиперболами)

$$\Pi_2: x_1^2 - x_2^2 \leq r_0^2, -x_1^2 + x_2^2 \leq r_0^2$$

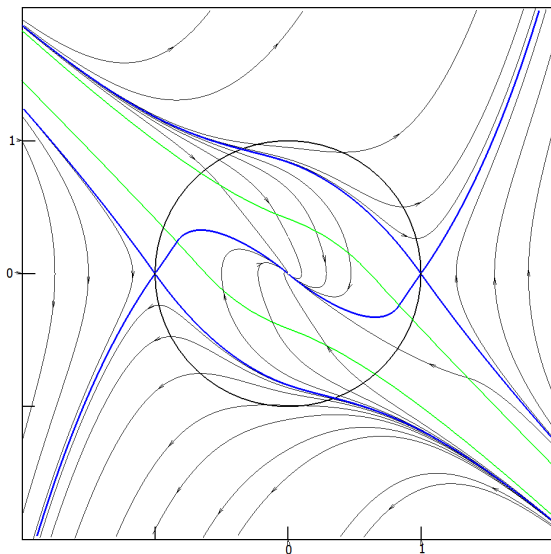
$$\Omega(P) \subseteq \Pi_2:$$

$$\frac{1}{r_0^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - P \leq 0,$$

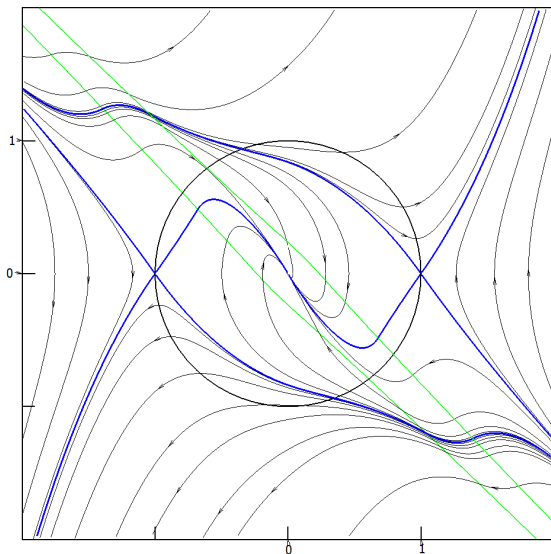
$$\frac{1}{r_0^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - P \leq 0$$



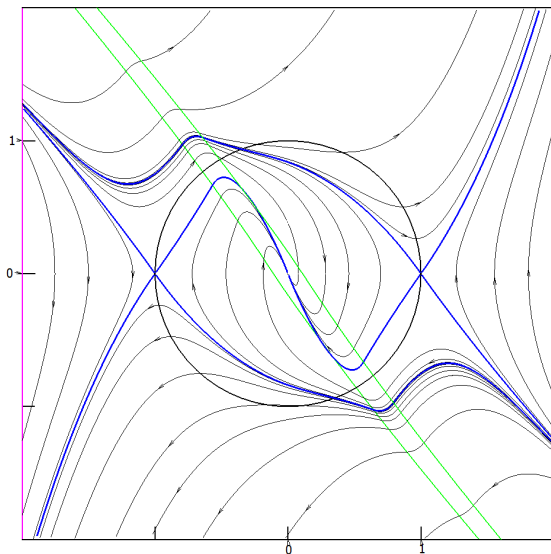
Фазовый портрет системы ($\lambda = 1$)



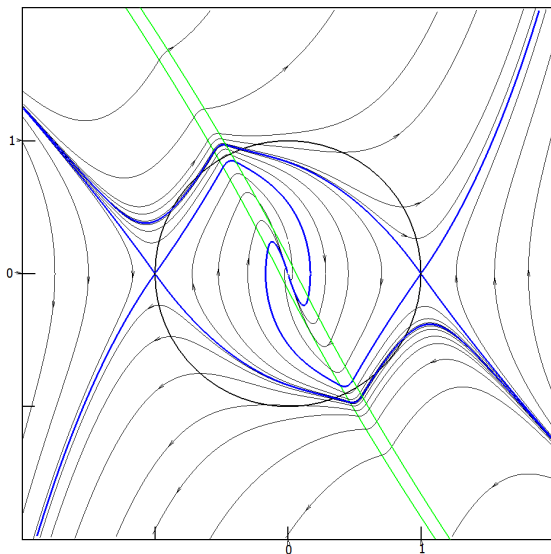
Фазовый портрет системы ($\lambda = 2$)



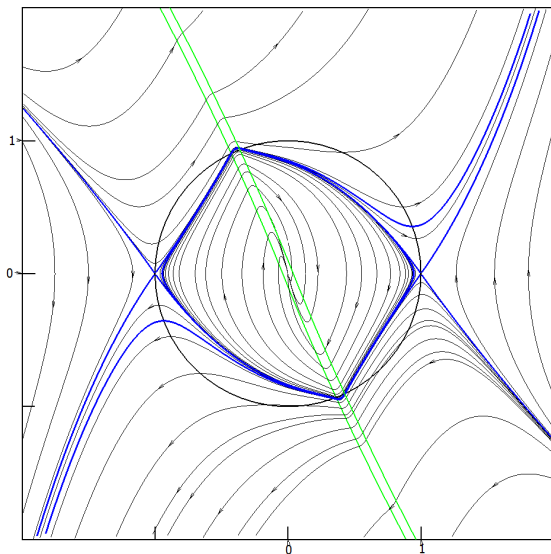
Фазовый портрет системы ($\lambda = 3$)



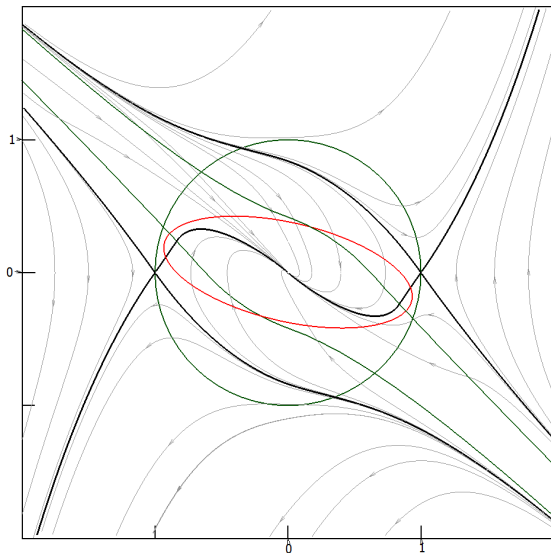
Фазовый портрет системы ($\lambda = 4$)



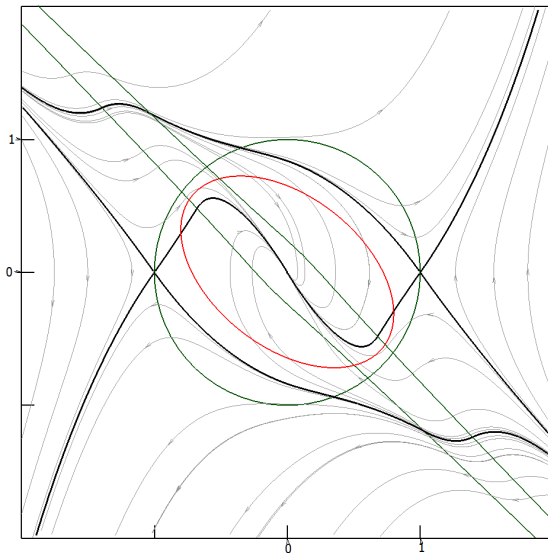
Фазовый портрет системы ($\lambda = 5$)



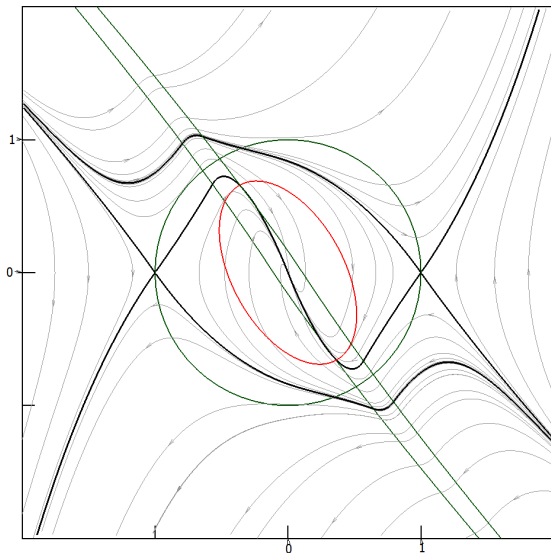
Оценка области притяжения ($\lambda = 1$)



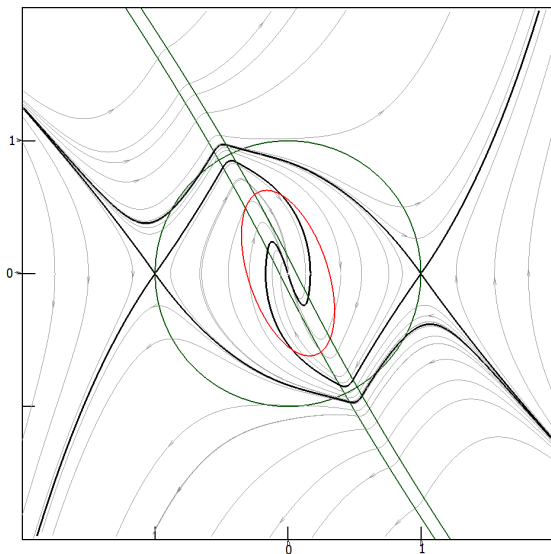
Оценка области притяжения ($\lambda = 2$)



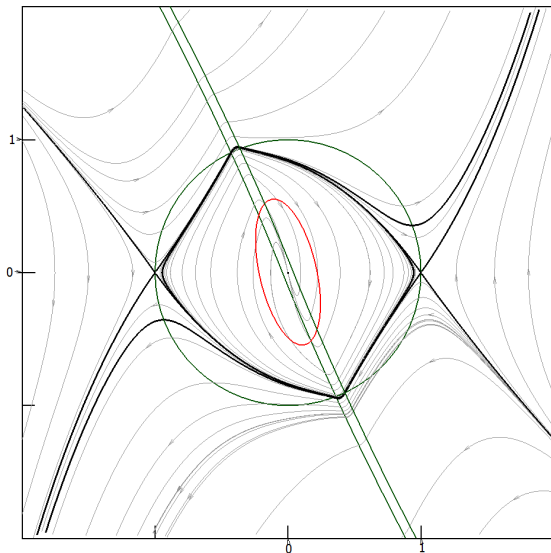
Оценка области притяжения ($\lambda = 3$)



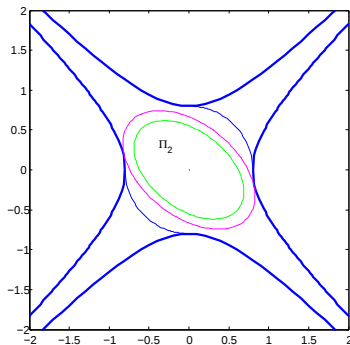
Оценка области притяжения ($\lambda = 4$)



Оценка области притяжения ($\lambda = 5$)



Оценка области притяжения для двух аппроксимаций области D_x : Π_1 (зеленый) и Π_2 (красный) ($\lambda = 2$)



Спасибо за внимание!