

Спектральная теория выпуклости и приближенной выпуклости образов квадратичных отображений

А.С. Матвеев

кафедра теоретической кибернетики, математико-механический факультет,
Санкт Петербургский государственный университет
almat1712@yahoo.com



План выступления

- 1 Обзор избранных результатов о выпуклости образов квадратичных отображений
- 2 Выпуклость как следствие тяжёлой границы спектра ассоциированных квадратичных форм
- 3 Приближённая выпуклость как следствие присутствия "достаточно большой" части спектра вблизи его границы
- 4 Нерушимая выпуклость образов квадратичных отображений с бесконечномерной областью определения
- 5 Идеи и приложения.

Мотивация и базовые определения

- Теория матриц и операторов
- Оптимизация и оптимальное управления
- Теория устойчивости динамических (в том числе неопределенных) систем.

Мотивация и базовые определения

- Теория матриц и операторов
- Оптимизация и оптимальное управления
- Теория устойчивости динамических (в том числе неопределенных) систем.
- $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ — линейные пространства над $\mathbb{R}$; $\dim Y < \infty$;

Мотивация и базовые определения

- Теория матриц и операторов
- Оптимизация и оптимальное управления
- Теория устойчивости динамических (в том числе неопределенных) систем.
- $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ — линейные пространства над $\mathbb{R}$; $\dim Y < \infty$;
- Векторная квадратичная форма $\mathfrak{B}(x) := B(x, x) \in Y$, где $B : X \times X \rightarrow Y$ — билинейное симметричное отображение;

Мотивация и базовые определения

- Теория матриц и операторов
- Оптимизация и оптимальное управления
- Теория устойчивости динамических (в том числе неопределенных) систем.
- $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ — линейные пространства над $\mathbb{R}$; $\dim Y < \infty$;
- Векторная квадратичная форма $\mathfrak{B}(x) := B(x, x) \in Y$, где $B : X \times X \rightarrow Y$ — билинейное симметричное отображение;
- Векторная эрмитова: X комплексное, $Y = \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{B} = [\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k]$, $\mathfrak{B}_i$ эрмитовы

Мотивация и базовые определения

- Теория матриц и операторов
- Оптимизация и оптимальное управления
- Теория устойчивости динамических (в том числе неопределенных) систем.
- $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ — линейные пространства над $\mathbb{R}$; $\dim Y < \infty$;
- Векторная квадратичная форма $\mathfrak{B}(x) := B(x, x) \in Y$, где $B : X \times X \rightarrow Y$ — билинейное симметричное отображение;
- Векторная эрмитова: X комплексное, $Y = \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{B} = [\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k]$, $\mathfrak{B}_i$ эрмитовы
- (Векторный) квадратичный функционал $\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{S}(x) + Lx + \text{const}$, где L — линейный оператор, а $\mathfrak{S}$ — квадратичная форма;

Мотивация и базовые определения

- Теория матриц и операторов
- Оптимизация и оптимальное управления
- Теория устойчивости динамических (в том числе неопределенных) систем.
- $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ — линейные пространства над $\mathbb{R}$; $\dim Y < \infty$;
- Векторная квадратичная форма $\mathfrak{B}(x) := B(x, x) \in Y$, где $B : X \times X \rightarrow Y$ — билинейное симметричное отображение;
- Векторная эрмитова: X комплексное, $Y = \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{B} = [\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k]$, $\mathfrak{B}_i$ эрмитовы
- (Векторный) квадратичный функционал $\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{S}(x) + Lx + \text{const}$, где L — линейный оператор, а $\mathfrak{S}$ — квадратичная форма;
- Единичная сфера гильбертова пространства $S := \{x : |x| = 1\}$;

Мотивация и базовые определения

- Теория матриц и операторов
- Оптимизация и оптимальное управления
- Теория устойчивости динамических (в том числе неопределенных) систем.
- $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ — линейные пространства над $\mathbb{R}$; $\dim Y < \infty$;
- Векторная квадратичная форма $\mathfrak{B}(x) := B(x, x) \in Y$, где $B : X \times X \rightarrow Y$ — билинейное симметричное отображение;
- Векторная эрмитова: X комплексное, $Y = \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{B} = [\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k]$, $\mathfrak{B}_i$ эрмитовы
- (Векторный) квадратичный функционал $\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{S}(x) + Lx + \text{const}$, где L — линейный оператор, а $\mathfrak{S}$ — квадратичная форма;
- Единичная сфера гильбертова пространства $S := \{x : |x| = 1\}$;
- $K_+ \subset Y$ — выпуклый замкнутый конус, задающий упорядочение Y :
 $y' \leq y'' \Leftrightarrow y'' - y' \in K_+$;

Мотивация и базовые определения

- Теория матриц и операторов
- Оптимизация и оптимальное управления
- Теория устойчивости динамических (в том числе неопределенных) систем.
- $X = \{x\}, Y = \{y\}$ — линейные пространства над $\mathbb{R}$; $\dim Y < \infty$;
- Векторная квадратичная форма $\mathfrak{B}(x) := B(x, x) \in Y$, где $B : X \times X \rightarrow Y$ — билинейное симметричное отображение;
- Векторная эрмитова: X комплексное, $Y = \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{B} = [\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k]$, $\mathfrak{B}_i$ эрмитовы
- (Векторный) квадратичный функционал $\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{S}(x) + Lx + \text{const}$, где L — линейный оператор, а $\mathfrak{S}$ — квадратичная форма;
- Единичная сфера гильбертова пространства $S := \{x : |x| = 1\}$;
- $K_+ \subset Y$ — выпуклый замкнутый конус, задающий упорядочение Y :
 $y' \leq y'' \Leftrightarrow y'' - y' \in K_+$;
- Надобраз множества $A \subset X$ при отображении $f : X \rightarrow Y$ —
 $f(A)^+ := \{y \in Y : \exists x, y \geq f(x)\}$

Образ всего пространства, единичной сферы, аффинной квадрики и множества, ограниченного такой квадратикой, надобраз всего перечисленного.

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Toeplitz-Hausdorff) X —комплексное гильбертово, $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}$ непрерывная эрмитова, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Toeplitz-Hausdorff) X —комплексное гильбертово, $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}$ непрерывная эрмитова, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$
- (Brickman) То же самое, X вещественное, $\mathfrak{B}$ векторная квадратичная форма, $\dim X \geq 3$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Toeplitz-Hausdorff) X —комплексное гильбертово, $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}$ непрерывная эрмитова, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$
- (Brickman) То же самое, X вещественное, $\mathfrak{B}$ векторная квадратичная форма, $\dim X \geq 3$
- (Dines) $\dim Y = 2$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Toeplitz-Hausdorff) X —комплексное гильбертово, $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}$ непрерывная эрмитова, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$
- (Brickman) То же самое, X вещественное, $\mathfrak{B}$ векторная квадратичная форма, $\dim X \geq 3$
- (Dines) $\dim Y = 2$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Polayk) Обобщение на $\dim Y = 3$ при $\dim X \geq 3$ и условии $\tau^* \mathfrak{B} > 0$ для некоторого $\tau^* \in Y^*$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Toeplitz-Hausdorff) X —комплексное гильбертово, $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}$ непрерывная эрмитова, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$
- (Brickman) То же самое, X вещественное, $\mathfrak{B}$ векторная квадратичная форма, $\dim X \geq 3$
- (Dines) $\dim Y = 2$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Polayuk) Обобщение на $\dim Y = 3$ при $\dim X \geq 3$ и условии $\tau^* \mathfrak{B} > 0$ для некоторого $\tau^* \in Y^*$
- (Фрадков-Якубович) X комплексное, $Y = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}$ эрмитова, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Toeplitz-Hausdorff) X —комплексное гильбертово, $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}$ непрерывная эрмитова, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$
- (Brickman) То же самое, X вещественное, $\mathfrak{B}$ векторная квадратичная форма, $\dim X \geq 3$
- (Dines) $\dim Y = 2$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Polayuk) Обобщение на $\dim Y = 3$ при $\dim X \geq 3$ и условии $\tau^* \mathfrak{B} > 0$ для некоторого $\tau^* \in Y^*$
- (Фрадков-Якубович) X комплексное, $Y = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}$ эрмитова, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Якубович) $X = \mathbb{C}^2$, $Y = \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{B}$ эрмитова

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Toeplitz-Hausdorff) X —комплексное гильбертово, $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}$ непрерывная эрмитова, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$
- (Brickman) То же самое, X вещественное, $\mathfrak{B}$ векторная квадратичная форма, $\dim X \geq 3$
- (Dines) $\dim Y = 2$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Polayuk) Обобщение на $\dim Y = 3$ при $\dim X \geq 3$ и условии $\tau^* \mathfrak{B} > 0$ для некоторого $\tau^* \in Y^*$
- (Фрадков-Якубович) X комплексное, $Y = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}$ эрмитова, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Якубович) $X = \mathbb{C}^2$, $Y = \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{B}$ эрмитова
- (Dash) Классические теплицевы операторы, образ пространства

$$\mathfrak{B}[x(\cdot)] := \int_{S_0^1} g(\lambda) |x(\lambda)|^2 d|\lambda|, x = x(\cdot) \in H_+(S_0^1), g(\cdot) \in L_1[S_0^1 \rightarrow \mathbb{R}^k]$$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Toeplitz-Hausdorff) X —комплексное гильбертово, $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}$ непрерывная эрмитова, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$
- (Brickman) То же самое, X вещественное, $\mathfrak{B}$ векторная квадратичная форма, $\dim X \geq 3$
- (Dines) $\dim Y = 2$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Polayuk) Обобщение на $\dim Y = 3$ при $\dim X \geq 3$ и условии $\tau^* \mathfrak{B} > 0$ для некоторого $\tau^* \in Y^*$
- (Фрадков-Якубович) X комплексное, $Y = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}$ эрмитова, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Якубович) $X = \mathbb{C}^2$, $Y = \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{B}$ эрмитова
- (Dash) Классические теплицевы операторы, образ пространства

$$\mathfrak{B}[x(\cdot)] := \int_{S_0^1} g(\lambda) |x(\lambda)|^2 d|\lambda|, x = x(\cdot) \in H_+(S_0^1), g(\cdot) \in L_1[S_0^1 \rightarrow \mathbb{R}^k]$$

- (Абрамов) Обобщенные теплицевы операторы

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Toeplitz-Hausdorff) X —комплексное гильбертово, $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}$ непрерывная эрмитова, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$
- (Brickman) То же самое, X вещественное, $\mathfrak{B}$ векторная квадратичная форма, $\dim X \geq 3$
- (Dines) $\dim Y = 2$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Polayuk) Обобщение на $\dim Y = 3$ при $\dim X \geq 3$ и условии $\tau^* \mathfrak{B} > 0$ для некоторого $\tau^* \in Y^*$
- (Фрадков-Якубович) X комплексное, $Y = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}$ эрмитова, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Якубович) $X = \mathbb{C}^2$, $Y = \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{B}$ эрмитова
- (Dash) Классические теплицевы операторы, образ пространства

$$\mathfrak{B}[x(\cdot)] := \int_{S_0^1} g(\lambda) |x(\lambda)|^2 d|\lambda|, x = x(\cdot) \in H_+(S_0^1), g(\cdot) \in L_1[S_0^1 \rightarrow \mathbb{R}^k]$$

- (Абрамов) Обобщенные теплицевы операторы
- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, векторная эрмитова форма, компоненты с теплицевыми матрицами $a_{i,j} = c_{i-j}$, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Toeplitz-Hausdorff) X —комплексное гильбертово, $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}$ непрерывная эрмитова, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$
- (Brickman) То же самое, X вещественное, $\mathfrak{B}$ векторная квадратичная форма, $\dim X \geq 3$
- (Dines) $\dim Y = 2$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Polayuk) Обобщение на $\dim Y = 3$ при $\dim X \geq 3$ и условии $\tau^* \mathfrak{B} > 0$ для некоторого $\tau^* \in Y^*$
- (Фрадков-Якубович) X комплексное, $Y = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}$ эрмитова, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Якубович) $X = \mathbb{C}^2$, $Y = \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{B}$ эрмитова
- (Dash) Классические теплицевы операторы, образ пространства

$$\mathfrak{B}[x(\cdot)] := \int_{S_0^1} g(\lambda) |x(\lambda)|^2 d|\lambda|, x = x(\cdot) \in H_+(S_0^1), g(\cdot) \in L_1[S_0^1 \rightarrow \mathbb{R}^k]$$

- (Абрамов) Обобщенные теплицевы операторы
- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, векторная эрмитова форма, компоненты с теплицевыми матрицами $a_{i,j} = c_{i-j}$, образ сферы $\mathfrak{B}(S)$
- (Абрамов) $X = \mathbb{R}^n$, компоненты с теплицевыми вещественными матрицами, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с ганкелевыми вещественными матрицами $a_{i,j} = c_{i+j}$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с ганкелевыми вещественными матрицами $a_{i,j} = c_{i+j}$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с вещественными трехдиагональными матрицами, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с ганкелевыми вещественными матрицами $a_{i,j} = c_{i+j}$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с вещественными трехдиагональными матрицами, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов, Cassier) $Y = \mathbb{R}^k$, непрерывная эрмитова форма, операторы, связанные с компонентами, коммутируют, образ пространства и сферы

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с ганкелевыми вещественными матрицами $a_{i,j} = c_{i+j}$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с вещественными трехдиагональными матрицами, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов, Cassier) $Y = \mathbb{R}^k$, непрерывная эрмитова форма, операторы, связанные с компонентами, коммутируют, образ пространства и сферы
- (Gutkin, Jonckheere, Karow) $X = \mathbb{C}^n$, эрмитова форма, кратность μ наибольшего собственного числа матрицы эрмитовой формы $\tau^* \mathfrak{B}$ не зависит от $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0$, в то время как объединение соответствующих собственных подпространств не покрывает все $\mathbb{C}^n$ (это условие нужно только, если $\dim Y = n + 1$ и $\mu = n/2$); образ сферы $\mu = 1 \Leftrightarrow$ устойчиво выпукло, $\Rightarrow$ строго выпукло, гладкая граница

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с ганкелевыми вещественными матрицами $a_{i,j} = c_{i+j}$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с вещественными трехдиагональными матрицами, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов, Cassier) $Y = \mathbb{R}^k$, непрерывная эрмитова форма, операторы, связанные с компонентами, коммутируют, образ пространства и сферы
- (Gutkin, Jonckheere, Karow) $X = \mathbb{C}^n$, эрмитова форма, кратность μ наибольшего собственного числа матрицы эрмитовой формы $\tau^* \mathfrak{B}$ не зависит от $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0$, в то время как объединение соответствующих собственных подпространств не покрывает все $\mathbb{C}^n$ (это условие нужно только, если $\dim Y = n + 1$ и $\mu = n/2$); образ сферы $\mu = 1 \Leftrightarrow$ устойчиво выпукло, $\Rightarrow$ строго выпукло, гладкая граница
- (Sheriff) $X = \mathbb{R}^n$, образ пространства, устойчивая выпуклость

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с ганкелевыми вещественными матрицами $a_{i,j} = c_{i+j}$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с вещественными трехдиагональными матрицами, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов, Cassier) $Y = \mathbb{R}^k$, непрерывная эрмитова форма, операторы, связанные с компонентами, коммутируют, образ пространства и сферы
- (Gutkin, Jonckheere, Karow) $X = \mathbb{C}^n$, эрмитова форма, кратность μ наибольшего собственного числа матрицы эрмитовой формы $\tau^* \mathfrak{B}$ не зависит от $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0$, в то время как объединение соответствующих собственных подпространств не покрывает все $\mathbb{C}^n$ (это условие нужно только, если $\dim Y = n + 1$ и $\mu = n/2$); образ сферы $\mu = 1 \Leftrightarrow$ устойчиво выпукло, $\Rightarrow$ строго выпукло, гладкая граница
- (Sheriff) $X = \mathbb{R}^n$, образ пространства, устойчивая выпуклость
 - ① форма $\tau^* \mathfrak{B}$ положительно определена при некотором $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с ганкелевыми вещественными матрицами $a_{i,j} = c_{i+j}$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с вещественными трехдиагональными матрицами, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов, Cassier) $Y = \mathbb{R}^k$, непрерывная эрмитова форма, операторы, связанные с компонентами, коммутируют, образ пространства и сферы
- (Gutkin, Jonckheere, Karow) $X = \mathbb{C}^n$, эрмитова форма, кратность μ наибольшего собственного числа матрицы эрмитовой формы $\tau^* \mathfrak{B}$ не зависит от $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0$, в то время как объединение соответствующих собственных подпространств не покрывает все $\mathbb{C}^n$ (это условие нужно только, если $\dim Y = n + 1$ и $\mu = n/2$); образ сферы $\mu = 1 \Leftrightarrow$ устойчиво выпукло, $\Rightarrow$ строго выпукло, гладкая граница
- (Sheriff) $X = \mathbb{R}^n$, образ пространства, устойчивая выпуклость
 - 1 форма $\tau^* \mathfrak{B}$ положительно определена при некотором $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0$
 - 2 всякий раз, когда она неотрицательно определена, но не положительно определена, собственное число 0 соответствующей матрицы имеет кратность 1

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с ганкелевыми вещественными матрицами $a_{i,j} = c_{i+j}$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с вещественными трехдиагональными матрицами, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов, Cassier) $Y = \mathbb{R}^k$, непрерывная эрмитова форма, операторы, связанные с компонентами, коммутируют, образ пространства и сферы
- (Gutkin, Jonckheere, Karow) $X = \mathbb{C}^n$, эрмитова форма, кратность μ наибольшего собственного числа матрицы эрмитовой формы $\tau^* \mathfrak{B}$ не зависит от $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0$, в то время как объединение соответствующих собственных подпространств не покрывает все $\mathbb{C}^n$ (это условие нужно только, если $\dim Y = n + 1$ и $\mu = n/2$); образ сферы $\mu = 1 \Leftrightarrow$ устойчиво выпукло, $\Rightarrow$ строго выпукло, гладкая граница
- (Sheriff) $X = \mathbb{R}^n$, образ пространства, устойчивая выпуклость
 - 1 форма $\tau^* \mathfrak{B}$ положительно определена при некотором $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0$
 - 2 всякий раз, когда она неотрицательно определена, но не положительно определена, собственное число 0 соответствующей матрицы имеет кратность 1
 - 3 $\dim X > \dim Y + 1$, $\dim Y \geq 4$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с ганкелевыми вещественными матрицами $a_{i,j} = c_{i+j}$, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов) $X = \mathbb{C}^n$, компоненты с вещественными трехдиагональными матрицами, образ пространства $\mathfrak{B}(X)$
- (Абрамов, Cassier) $Y = \mathbb{R}^k$, непрерывная эрмитова форма, операторы, связанные с компонентами, коммутируют, образ пространства и сферы
- (Gutkin, Jonckheere, Karow) $X = \mathbb{C}^n$, эрмитова форма, кратность μ наибольшего собственного числа матрицы эрмитовой формы $\tau^* \mathfrak{B}$ не зависит от $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0$, в то время как объединение соответствующих собственных подпространств не покрывает все $\mathbb{C}^n$ (это условие нужно только, если $\dim Y = n + 1$ и $\mu = n/2$); образ сферы $\mu = 1 \Leftrightarrow$ устойчиво выпукло, $\Rightarrow$ строго выпукло, гладкая граница
- (Sheriff) $X = \mathbb{R}^n$, образ пространства, устойчивая выпуклость
 - 1 форма $\tau^* \mathfrak{B}$ положительно определена при некотором $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0$
 - 2 всякий раз, когда она неотрицательно определена, но не положительно определена, собственное число 0 соответствующей матрицы имеет кратность 1
 - 3 $\dim X > \dim Y + 1$, $\dim Y \geq 4$

Если $2 \leq \dim X < \dim Y$, форм с устойчиво выпуклым образом и свойством 1 нет

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Polyak, Dymarsky) $X = \mathbb{R}^n$, образ шара, эллипсоида, всего пространства

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Polyak, Dymarsky) $X = \mathbb{R}^n$, образ шара, эллипсоида, всего пространства
- (Аграчев) $X = \mathbb{R}^n$, отрицательный индекс инерции формы $\tau^* \mathfrak{B}$ больше или равен $\dim Y$ для любого $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0 \Rightarrow$ форма сюръективна
 $\mathfrak{B}(X) = Y$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Polyak, Dymarsky) $X = \mathbb{R}^n$, образ шара, эллипсоида, всего пространства
- (Аграчев) $X = \mathbb{R}^n$, отрицательный индекс инерции формы $\tau^* \mathfrak{B}$ больше или равен $\dim Y$ для любого $\tau^* \in Y^*, \tau^* \neq 0 \Rightarrow$ форма сюръективна $\mathfrak{B}(X) = Y$
- (Треиль, Мегрецкий, Якубович) Специальные бесконечномерные пространства и формы, например

$$X = \left\{ x = [z(\cdot), u(\cdot)] \in L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m \right\} :$$

$$\dot{z} = Az + Bu \quad \forall t \geq 0, z(0) = 0 \}$$

$$\mathfrak{B}[x] = \int_0^\infty [G_1[z(t)], \dots, G_k[z(t)]]^\top dt,$$

$G_i(z, u)$ произвольные квадратичные формы

Выпуклость замыкания образа всего пространства

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Polyak, Dymarsky) $X = \mathbb{R}^n$, образ шара, эллипсоида, всего пространства
- (Аграчев) $X = \mathbb{R}^n$, отрицательный индекс инерции формы $\tau^* \mathfrak{B}$ больше или равен $\dim Y$ для любого $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0 \Rightarrow$ форма сюръективна $\mathfrak{B}(X) = Y$
- (Треиль, Мегрецкий, Якубович) Специальные бесконечномерные пространства и формы, например

$$X = \left\{ x = [z(\cdot), u(\cdot)] \in L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m \right\} :$$

$$\dot{z} = Az + Bu \quad \forall t \geq 0, z(0) = 0 \}$$

$$\mathfrak{B}[x] = \int_0^\infty [G_1[z(t)], \dots, G_k[z(t)]]^\top dt,$$

$G_i(z, u)$ произвольные квадратичные формы

Выпуклость замыкания образа всего пространства

- (Barvinok) $Y = \mathbb{R}^k$, все компоненты положительно определённые формы. Для любого $a \in \text{co } \mathfrak{B}(X)$ с $\sum a_i = 1$ найдется такое $b \in \mathfrak{B}(X)$ с $\sum b_i = 1$, что расстояние Кулбака-Лейбнера

$$D(a||b) := \sum_i a_i \ln \frac{a_i}{b_i} \leq \beta \leq 4.8$$

Некоторые результаты о выпуклости образов

- (Polyak, Dymarsky) $X = \mathbb{R}^n$, образ шара, эллипсоида, всего пространства
- (Аграчев) $X = \mathbb{R}^n$, отрицательный индекс инерции формы $\tau^* \mathfrak{B}$ больше или равен $\dim Y$ для любого $\tau^* \in Y^*$, $\tau^* \neq 0 \Rightarrow$ форма сюръективна $\mathfrak{B}(X) = Y$
- (Треиль, Мегрецкий, Якубович) Специальные бесконечномерные пространства и формы, например

$$X = \left\{ x = [z(\cdot), u(\cdot)] \in L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m \right\} :$$

$$\dot{z} = Az + Bu \quad \forall t \geq 0, z(0) = 0 \}$$

$$\mathfrak{B}[x] = \int_0^\infty [G_1[z(t)], \dots, G_k[z(t)]]^\top dt,$$

$G_i(z, u)$ произвольные квадратичные формы

Выпуклость замыкания образа всего пространства

- (Barvinok) $Y = \mathbb{R}^k$, все компоненты положительно определённые формы. Для любого $a \in \text{co } \mathfrak{B}(X)$ с $\sum a_i = 1$ найдется такое $b \in \mathfrak{B}(X)$ с $\sum b_i = 1$, что расстояние Кулбака-Лейбнера

$$D(a||b) := \sum_i a_i \ln \frac{a_i}{b_i} \leq \beta \leq 4.8$$

$$D(a||b) \geq \frac{1}{2 \ln 2} \left[\sum_i |a_i - b_i| \right]^2$$

Некоторые результаты о выпуклости образов

П.Халмош "все известные доказательства (теоремы Теплица-Хаусдорфа) основаны на вычислениях. Эти вычисления можно провести хорошо или плохо, но от этого они не перестают быть вычислениями. Хотелось бы получить идейное доказательство, пусть даже (или особенно) с использованием менее элементарных понятий, чем в вычислительном доказательстве."

Определение

Подмножество $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}$ назовем почти выпуклым, если существует такое выпуклое множество $\mathfrak{C} \subset \mathcal{Y}$, что $\mathfrak{C} \subset \mathcal{C} \subset \overline{\mathfrak{C}}$.

Определение

Подмножество $\mathcal{C} \subset Y$ назовем почти выпуклым, если существует такое выпуклое множество $\mathfrak{C} \subset Y$, что $\mathfrak{C} \subset \mathcal{C} \subset \overline{\mathfrak{C}}$.

Пусть $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма. Линейное подпространство $\mathfrak{L} \subset X$ называется b -отрицательным, если $b(x) < 0$ для любого $x \in \mathfrak{L}, x \neq 0$. (Подпространство $\mathfrak{L} := \{0\}$ b -отрицательно.) Супремум $N_-[b(\cdot)] = \sup_{\mathfrak{L}} \dim \mathfrak{L}$ по всем таким $\mathfrak{L}$ — (отрицательный) индекс инерции формы $b(\cdot)$.

Определение

Подмножество $\mathcal{C} \subset Y$ назовем почти выпуклым, если существует такое выпуклое множество $\mathfrak{C} \subset Y$, что $\mathfrak{C} \subset \mathcal{C} \subset \overline{\mathfrak{C}}$.

Пусть $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма. Линейное подпространство $\mathfrak{L} \subset X$ называется b -отрицательным, если $b(x) < 0$ для любого $x \in \mathfrak{L}, x \neq 0$. (Подпространство $\mathfrak{L} := \{0\}$ b -отрицательно.) Супремум $N_-[b(\cdot)] = \sup_{\mathfrak{L}} \dim \mathfrak{L}$ по всем таким $\mathfrak{L}$ — (отрицательный) индекс инерции формы $b(\cdot)$.

Теорема (Матвеев (1998))

Предположим, что для любого $\tau^* \in Y^*, \tau^* \geq 0$ ($\Leftrightarrow \tau^* y \geq 0 \forall y \in K_+$)

$$\text{либо } N_-[\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = 0, \quad \text{либо } N_-[\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] \geq \dim Y - 1.$$

Тогда надобраз пространства X при отображении $\mathfrak{B}(\cdot)$

$$\mathfrak{B}(X)^+ := \mathfrak{B}(X) + K_+ = \{y \in Y : y \geq \mathfrak{B}(x) \text{ при некотором } x \in X\}$$

— почти выпуклое множество.

Определение

Подмножество $\mathcal{C} \subset Y$ назовем почти выпуклым, если существует такое выпуклое множество $\mathfrak{C} \subset Y$, что $\mathfrak{C} \subset \mathcal{C} \subset \overline{\mathfrak{C}}$.

Пусть $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма. Линейное подпространство $\mathfrak{L} \subset X$ называется b -отрицательным, если $b(x) < 0$ для любого $x \in \mathfrak{L}, x \neq 0$. (Подпространство $\mathfrak{L} := \{0\}$ b -отрицательно.) Супремум $N_-[b(\cdot)] = \sup_{\mathfrak{L}} \dim \mathfrak{L}$ по всем таким $\mathfrak{L}$ — (отрицательный) индекс инерции формы $b(\cdot)$.

Теорема (Матвеев (1998))

Предположим, что для любого $\tau^* \in Y^*, \tau^* \geq 0$ ($\Leftrightarrow \tau^* y \geq 0 \forall y \in K_+$)

$$\text{либо } N_-[\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = 0, \quad \text{либо } N_-[\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] \geq \dim Y - 1.$$

Тогда надобраз пространства X при отображении $\mathfrak{B}(\cdot)$

$$\mathfrak{B}(X)^+ := \mathfrak{B}(X) + K_+ = \{y \in Y : y \geq \mathfrak{B}(x) \text{ при некотором } x \in X\}$$

— почти выпуклое множество.

Определение

Подмножество $\mathcal{C} \subset Y$ назовем почти выпуклым, если существует такое выпуклое множество $\mathfrak{C} \subset Y$, что $\mathfrak{C} \subset \mathcal{C} \subset \overline{\mathfrak{C}}$.

Пусть $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма. Линейное подпространство $\mathfrak{L} \subset X$ называется b -отрицательным, если $b(x) < 0$ для любого $x \in \mathfrak{L}, x \neq 0$. (Подпространство $\mathfrak{L} := \{0\}$ b -отрицательно.) Супремум $N_-[b(\cdot)] = \sup_{\mathfrak{L}} \dim \mathfrak{L}$ по всем таким $\mathfrak{L}$ — (отрицательный) индекс инерции формы $b(\cdot)$.

Теорема (Матвеев (1998))

Предположим, что для любого $\tau^* \in Y^*, \tau^* \geq 0$ ($\Leftrightarrow \tau^* y \geq 0 \forall y \in K_+$)

$$\text{либо } N_-[\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = 0, \quad \text{либо } N_-[\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] \geq \dim Y - 1.$$

Тогда надобраз пространства X при отображении $\mathfrak{B}(\cdot)$

$$\mathfrak{B}(X)^+ := \mathfrak{B}(X) + K_+ = \{y \in Y : y \geq \mathfrak{B}(x) \text{ при некотором } x \in X\}$$

— почти выпуклое множество.

Неулучшаемость до "либо $N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = 0$, либо $N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] \geq \dim Y - 2$ "

Контрпример: $Y := \mathbb{R}^3$, $K_+ := \{0\}$, $X := \mathbb{R}^2 \times H = \{x = (x_1, x_2, h)\}$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $H = \{h\}$ — гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(x) := \{\mathfrak{B}_i(x)\}_{i=1}^3$, $\mathfrak{B}_1(x) := 2x_1 x_2$, $\mathfrak{B}_2(x) := x_1^2 - x_2^2$, $\mathfrak{B}_3(x) := x_1^2 + x_2^2 - |h|^2$. Тогда $\mathfrak{B}(X) = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 :$

$y_3 \leq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\}$ — это $\mathbb{R}^3$ за вычетом прямого кругового конуса

$\mathcal{K} := \left\{ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_3 > \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \right\}$. В то же время $\dim Y - 2 = 1$.

Введем в Y скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и отождествим вектор $\tau \in Y$ с линейным функционалом $\tau^* y := \langle \tau, y \rangle \forall y \in Y$. Угол между векторами $y_1, y_2 \in Y, y_1, y_2 \neq 0$ обозначим символом

$$\angle(y_1, y_2) := \arccos \frac{\langle y_1, y_2 \rangle}{|y_1| |y_2|} \in [0, \pi].$$

Пусть $\mathfrak{K} \subset Y$ — непустой выпуклый замкнутый конус. Его **центрированным раствором** назовем величину

$$\angle^{\text{cent}} \mathfrak{K} := \min_{\zeta \neq 0} \max_{y \in \mathfrak{K}, y \neq 0} \angle(\zeta, y), \quad \cos \left(\angle^{\text{cent}} \mathfrak{K} \right) = \text{dist} [0, \text{co} \{y \in \mathfrak{K} : |y| = 1\}]$$

Если $\mathfrak{K}$ содержит прямые, положим

$$M := \mathfrak{K} \cap (-\mathfrak{K}), L := M^\perp := \{y \in Y : \langle y, \tau \rangle = 0 \forall \tau \in M\}, \mathfrak{K}_\perp := \mathfrak{K} \cap L.$$

Существенным центрированным раствором конуса $\mathfrak{K}$ назовем величину

$$\angle_{\text{ess}}^{\text{cent}} \mathfrak{K} := \angle^{\text{cent}} \mathfrak{K}_\perp < \frac{\pi}{2}.$$

Теорема (Матвеев (1998))

Обозначим

$$\Upsilon_+ := \Upsilon_+[\mathfrak{B}(\cdot)] := \{\tau \in Y : \tau^* \geq 0, \tau^* \mathfrak{B}(x) \geq 0 \ \forall x \in X\} \quad (1)$$

и предположим, что

$$\boxed{\tau \in Y, \tau^* \geq 0, |\tau| = 1, N_-[\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] \leq \dim Y - 2} \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{dist } \{\tau, \Upsilon_+\} \leq \varepsilon,$$

где число $\varepsilon \geq 0$ достаточно мало:

$$\varepsilon < \cos \psi \quad \text{при } \psi := \angle_{\text{ess}}^{\text{cent}} \Upsilon_+. \quad (3)$$

Тогда существует такой непустой выпуклый конус $K \subset Y$, что

$$K \subset \mathfrak{B}(X)^+, \quad (4)$$

$$\text{dist } (y, K) \leq \frac{\varepsilon}{\cos(\psi + \arcsin \varepsilon)} |y| \quad \forall y \in \overline{\text{con}} \mathfrak{B}(X)^+. \quad (5)$$

X — вещественное гильбертово пространство, $A : X \rightarrow X$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор и $P(d\lambda)$ — отвечающее ему разложение единицы. Предельная геометрическая кратность точки $\lambda \in \sigma(A)$:

$$M_{\lim}(\lambda) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \dim \operatorname{Im} P(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon).$$

$M_{\lim}(\lambda) = +\infty$, если $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$; иначе, $M_{\lim}(\lambda) = \dim\{x \in X : Ax = \lambda x\}$.

$$\tau^* \in Y^* \sim \tau \in Y; \tau^* \mathfrak{B}(x) = \langle A_\tau x, x \rangle$$

X — вещественное гильбертово пространство, $A : X \rightarrow X$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор и $P(d\lambda)$ — отвечающее ему разложение единицы. Предельная геометрическая кратность точки $\lambda \in \sigma(A)$:

$$M_{\lim}(\lambda) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \dim \operatorname{Im} P(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon).$$

$M_{\lim}(\lambda) = +\infty$, если $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$; иначе, $M_{\lim}(\lambda) = \dim\{x \in X : Ax = \lambda x\}$.

$$\tau^* \in Y^* \sim \tau \in Y; \tau^* \mathfrak{B}(x) = \langle A_\tau x, x \rangle$$

Теорема (Матвеев 1998)

Предположим, что для любого τ предельная геометрическая кратность минимальной $\lambda_-(\tau)$ и максимальной $\lambda_+(\tau)$ точек спектра оператора A_τ достаточно велика:

$$M_{\lim}[\lambda_-(\tau)] \geq k, \quad M_{\lim}[\lambda_+(\tau)] \geq k. \quad (6)$$

Тогда образ $\mathfrak{B}(S)$ единичной сферы S — почти выпуклое множество.

X — вещественное гильбертово пространство, $A : X \rightarrow X$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор и $P(d\lambda)$ — отвечающее ему разложение единицы. Предельная геометрическая кратность точки $\lambda \in \sigma(A)$:

$$M_{\lim}(\lambda) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \dim \operatorname{Im} P(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon).$$

$M_{\lim}(\lambda) = +\infty$, если $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$; иначе, $M_{\lim}(\lambda) = \dim\{x \in X : Ax = \lambda x\}$.

$$\tau^* \in Y^* \sim \tau \in Y; \tau^* \mathfrak{B}(x) = \langle A_\tau x, x \rangle$$

Теорема (Матвеев 1998)

Предположим, что для любого τ предельная геометрическая кратность минимальной $\lambda_-(\tau)$ и максимальной $\lambda_+(\tau)$ точек спектра оператора A_τ достаточно велика:

$$M_{\lim}[\lambda_-(\tau)] \geq k, \quad M_{\lim}[\lambda_+(\tau)] \geq k. \quad (6)$$

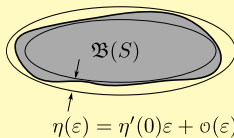
Тогда образ $\mathfrak{B}(S)$ единичной сферы S — почти выпуклое множество.

В случае комплексного пространства, эрмитовой формы и комплексной кратности (6) принимает вид

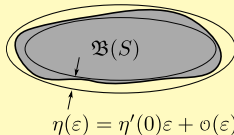
$$2M_{\lim}^c[\lambda_-(\tau)] \geq k, \quad 2M_{\lim}^c[\lambda_+(\tau)] \geq k$$

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} P_{\tau} [\lambda_{-}(\tau), \lambda_{-}(\tau) + \varepsilon] &\geq k \\ \dim \operatorname{Im} P_{\tau} [\lambda_{+}(\tau) - \varepsilon, \lambda_{+}(\tau)] &\geq k \end{aligned} \quad \forall \tau : |\tau| = 1. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} P_\tau [\lambda_-(\tau), \lambda_-(\tau) + \varepsilon] &\geq k \\ \dim \operatorname{Im} P_\tau [\lambda_+(\tau) - \varepsilon, \lambda_+(\tau)] &\geq k \end{aligned} \quad \forall \tau : |\tau| = 1. \quad (7)$$



$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} P_{\tau} [\lambda_{-}(\tau), \lambda_{-}(\tau) + \varepsilon] &\geq k \\ \dim \operatorname{Im} P_{\tau} [\lambda_{+}(\tau) - \varepsilon, \lambda_{+}(\tau)] &\geq k \end{aligned} \quad \forall \tau : |\tau| = 1. \quad (7)$$



Теорема (Матвеев 1998)

Пусть выполнено (7), $q := \min_{\tau: |\tau|=1} [\lambda_{+}(\tau) - \lambda_{-}(\tau)] > 0$ и число $\varepsilon > 0$ мало:

$$\varepsilon < \frac{q}{(k+1)\beta^2}, \quad \arcsin(\varepsilon\beta) + \arcsin \varepsilon < \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon \left[\beta\sqrt{1-\varepsilon^2} + \sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2} \right] < \frac{q}{(k+1)\beta^2}.$$

Здесь $\beta := \sqrt{1 + \|\mathfrak{B}(\cdot)\|^2}$, $\|\mathfrak{B}(\cdot)\| := \sup_{x: |x|=1} |\mathfrak{B}(x)|$.

Тогда существует такое непустое выпуклое множество $\mathfrak{C} \subset Y$, что

$$\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}(S) \subset \mathfrak{C}^{\eta} := \{y \in Y : \operatorname{dist} \{y, \mathfrak{C}\} \leq \eta\}, \quad \text{где.}$$

$$\eta := \eta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon(k+1)\beta^3(\beta+1)}{q\sqrt{1-\varepsilon^2} - \varepsilon\sqrt{(k+1)^2\beta^4 - q^2} - \varepsilon(k+1)\beta^3}, \quad k := \dim Y.$$

Теорема (Матвеев 1998)

Пусть конечномерное гильбертово пространство Y упорядочено замкнутым выпуклым конусом K_+ и $\mathfrak{B} : X \rightarrow Y$ — векторная квадратичная форма. Обозначим

$$\Upsilon_{-2} := \{\tau \in Y : \tau^* \geq 0, N_-[\tau^* \mathfrak{B}] \leq \max\{\dim Y - 2; 0\}\},$$

$$\Upsilon_+ := \{\tau \in Y : \tau^* \geq 0, \tau^* \mathfrak{B} \geq 0\},$$

$$K_{-2}^+[\mathfrak{B}] := \{y \in Y : \langle \tau; y \rangle \geq 0 \ \forall \tau \in \Upsilon_{-2}\},$$

$$L := \Upsilon_+ \cap (-\Upsilon_+), \quad \Upsilon_{-2}^\perp := \Upsilon_{-2} \cap L^\perp.$$

Теорема (Матвеев 1998)

Пусть конечномерное гильбертово пространство Y упорядочено замкнутым выпуклым конусом K_+ и $\mathfrak{B} : X \rightarrow Y$ — векторная квадратичная форма. Обозначим

$$\Upsilon_{-2} := \{\tau \in Y : \tau^* \geq 0, N_-[\tau^* \mathfrak{B}] \leq \max\{\dim Y - 2; 0\}\},$$

$$\Upsilon_+ := \{\tau \in Y : \tau^* \geq 0, \tau^* \mathfrak{B} \geq 0\},$$

$$K_{-2}^+[\mathfrak{B}] := \{y \in Y : \langle \tau; y \rangle \geq 0 \ \forall \tau \in \Upsilon_{-2}\},$$

$$L := \Upsilon_+ \cap (-\Upsilon_+), \quad \Upsilon_{-2}^\perp := \Upsilon_{-2} \cap L^\perp.$$

Если замкнутая выпуклая коническая оболочка $\overline{\text{con}} \Upsilon_{-2}^\perp$ не содержит прямых, то

$$\{0\} \neq K_{-2}^+[\mathfrak{B}], \quad \text{ri} K_{-2}^+[\mathfrak{B}] \subset \mathfrak{B}(X)^+.$$

Теорема (Матвеев 1998)

Пусть конечномерное гильбертово пространство Y упорядочено замкнутым выпуклым конусом K_+ и $\mathfrak{B} : X \rightarrow Y$ — векторная квадратичная форма. Обозначим

$$\Upsilon_{-2} := \{\tau \in Y : \tau^* \geq 0, N_-[\tau^* \mathfrak{B}] \leq \max\{\dim Y - 2; 0\}\},$$

$$\Upsilon_+ := \{\tau \in Y : \tau^* \geq 0, \tau^* \mathfrak{B} \geq 0\},$$

$$K_{-2}^{\circ+}[\mathfrak{B}] := \{y \in Y : \langle \tau, y \rangle > 0 \ \forall \tau \in \Upsilon_{-2}, \tau \neq 0\},$$

$$L := \Upsilon_+ \cap (-\Upsilon_+), \quad \Upsilon_{-2}^\perp := \Upsilon_{-2} \cap L^\perp.$$

Если замкнутая выпуклая коническая оболочка $\overline{\text{con}} \Upsilon_{-2}^\perp$ не содержит прямых, то

$$\{0\} \neq K_{-2}^+[\mathfrak{B}], \quad \text{ri} K_{-2}^+[\mathfrak{B}] \subset \mathfrak{B}(X)^+.$$

Теорема (Матвеев 1998)

Пусть конечномерное гильбертово пространство Y упорядочено замкнутым выпуклым конусом K_+ и $\mathfrak{B} : X \rightarrow Y$ — векторная квадратичная форма. Обозначим

$$\Upsilon_{-2} := \{\tau \in Y : \tau^* \geq 0, N_-[\tau^* \mathfrak{B}] \leq \max\{\dim Y - 2; 0\}\},$$

$$\Upsilon_+ := \{\tau \in Y : \tau^* \geq 0, \tau^* \mathfrak{B} \geq 0\},$$

$$K_{-2}^{\circ+}[\mathfrak{B}] := \{y \in Y : \langle \tau; y \rangle > 0 \ \forall \tau \in \Upsilon_{-2}, \tau \neq 0\},$$

Тогда

$$K_{-2}^{\circ+}[\mathfrak{B}] \subset \mathfrak{B}(X)^+.$$

$$N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = 0, \quad \text{либо} \quad N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = +\infty \quad \forall \tau^* \geq 0, \quad (8)$$

$$N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = 0, \quad \text{либо} \quad N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = +\infty \quad \forall \tau^* \geq 0, \quad (8)$$

Определение

Два почти выпуклых множества $C_1, C_2 \subset Y$ почти совпадают, если существует такое выпуклое подмножество $\mathfrak{C} \subset Y$, что $\mathfrak{C} \subset C_1, C_2 \subset \bar{\mathfrak{C}}$.

$$N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = 0, \quad \text{либо} \quad N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = +\infty \quad \forall \tau^* \geq 0, \quad (8)$$

Определение

Два почти выпуклых множества $C_1, C_2 \subset Y$ почти совпадают, если существует такое выпуклое подмножество $\mathfrak{C} \subset Y$, что $\mathfrak{C} \subset C_1, C_2 \subset \bar{\mathfrak{C}}$.

Теорема (Матвеев 1998)

При выполнении (8) надобраз $\mathfrak{B}(X)^+$ всего пространства является почти выпуклым множеством. Этот надобраз почти совпадает в каждом из следующих множеств, которые также почти выпуклы:

$$N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = 0, \quad \text{либо} \quad N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = +\infty \quad \forall \tau^* \geq 0, \quad (8)$$

Определение

Два почти выпуклых множества $C_1, C_2 \subset Y$ почти совпадают, если существует такое выпуклое подмножество $\mathfrak{C} \subset Y$, что $\mathfrak{C} \subset C_1, C_2 \subset \bar{\mathfrak{C}}$.

Теорема (Матвеев 1998)

При выполнении (8) надобраз $\mathfrak{B}(X)^+$ всего пространства является почти выпуклым множеством. Этот надобраз почти совпадает в каждом из следующих множеств, которые также почти выпуклы:

- Надобраз $\mathfrak{B}(L)^+$ любого линейного подпространства $L \subset X$ конечной коразмерности;

$$N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = 0, \quad \text{либо} \quad N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = +\infty \quad \forall \tau^* \geq 0, \quad (8)$$

Определение

Два почти выпуклых множества $C_1, C_2 \subset Y$ почти совпадают, если существует такое выпуклое подмножество $\mathfrak{C} \subset Y$, что $\mathfrak{C} \subset C_1, C_2 \subset \mathfrak{C}$.

Теорема (Матвеев 1998)

При выполнении (8) надобраз $\mathfrak{B}(X)^+$ всего пространства является почти выпуклым множеством. Этот надобраз почти совпадает в каждом из следующих множеств, которые также почти выпуклы:

- Надобраз $\mathfrak{B}(L)^+$ любого линейного подпространства $L \subset X$ конечной коразмерности;
- Надобраз $\mathfrak{B}(V)^+$ любой окрестности нуля V в слабой топологии гильбертова пространства X (при условии непрерывности $\mathfrak{B}$ в нормированной топологии);

$$N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = 0, \quad \text{либо} \quad N_- [\tau^* \mathfrak{B}(\cdot)] = +\infty \quad \forall \tau^* \geq 0, \quad (8)$$

Определение

Два почти выпуклых множества $C_1, C_2 \subset Y$ почти совпадают, если существует такое выпуклое подмножество $\mathfrak{C} \subset Y$, что $\mathfrak{C} \subset C_1, C_2 \subset \bar{\mathfrak{C}}$.

Теорема (Матвеев 1998)

При выполнении (8) надобраз $\mathfrak{B}(X)^+$ всего пространства является почти выпуклым множеством. Этот надобраз почти совпадает в каждом из следующих множеств, которые также почти выпуклы:

- Надобраз $\mathfrak{B}(L)^+$ любого линейного подпространства $L \subset X$ конечной коразмерности;
- Надобраз $\mathfrak{B}(V)^+$ любой окрестности нуля V в слабой топологии гильбертова пространства X (при условии непрерывности $\mathfrak{B}$ в нормированной топологии);
- При тех же условиях, надобраз $\mathfrak{B}(V)^+$ любой $\mathcal{T}$ -окрестности нуля V в любой локально выпуклой топологии $\mathcal{T}$, если она сильнее слабой топологии пространства X и вложение $L_{\mathcal{T}} \hookrightarrow L_{|\cdot|}$ не непрерывно для любого замкнутого линейного подпространства $L \subset X$ бесконечной размерности.

$$M_{\lim} [\lambda_-(\tau)] = M_{\lim} [\lambda_+(\tau)] = \infty \quad \forall \tau \in Y. \quad (9)$$

$$M_{\lim} [\lambda_-(\tau)] = M_{\lim} [\lambda_+(\tau)] = \infty \quad \forall \tau \in Y. \quad (9)$$

Теорема (Матвеев 1998)

Пусть X вещественное гильбертово пространство, форма $\mathfrak{B}$ непрерывна в нормированной топологии и выполнено (9). Тогда образ $\mathfrak{B}(S)$ единичной сферы $S \subset X$ почти выпуклое множество. Он почти совпадает в каждом из следующих образов, которые также почти выпуклы:

$$M_{\lim} [\lambda_-(\tau)] = M_{\lim} [\lambda_+(\tau)] = \infty \quad \forall \tau \in Y. \quad (9)$$

Теорема (Матвеев 1998)

Пусть X вещественное гильбертово пространство, форма $\mathfrak{B}$ непрерывна в нормированной топологии и выполнено (9). Тогда образ $\mathfrak{B}(S)$ единичной сферы $S \subset X$ почти выпуклое множество. Он почти совпадает в каждом из следующих образов, которые также почти выпуклы:

- Образ $\mathfrak{B}(S \cap L)$ пересечения единичной сферы с любым замкнутым подпространством $L \subset X$ конечной коразмерности;

$$M_{\lim} [\lambda_-(\tau)] = M_{\lim} [\lambda_+(\tau)] = \infty \quad \forall \tau \in Y. \quad (9)$$

Теорема (Матвеев 1998)

Пусть X вещественное гильбертово пространство, форма $\mathfrak{B}$ непрерывна в нормированной топологии и выполнено (9). Тогда образ $\mathfrak{B}(S)$ единичной сферы $S \subset X$ почти выпуклое множество. Он почти совпадает в каждом из следующих образов, которые также почти выпуклы:

- Образ $\mathfrak{B}(S \cap L)$ пересечения единичной сферы с любым замкнутым подпространством $L \subset X$ конечной коразмерности;
- Образ $\mathfrak{B}(S \cap V)$ пересечения единичной сферы S с любой окрестностью нуля V в слабой топологии пространства X ;

$$M_{\lim} [\lambda_-(\tau)] = M_{\lim} [\lambda_+(\tau)] = \infty \quad \forall \tau \in Y. \quad (9)$$

Теорема (Матвеев 1998)

Пусть X вещественное гильбертово пространство, форма $\mathfrak{B}$ непрерывна в нормированной топологии и выполнено (9). Тогда образ $\mathfrak{B}(S)$ единичной сферы $S \subset X$ почти выпуклое множество. Он почти совпадает в каждом из следующих образов, которые также почти выпуклы:

- Образ $\mathfrak{B}(S \cap L)$ пересечения единичной сферы с любым замкнутым подпространством $L \subset X$ конечной коразмерности;
- Образ $\mathfrak{B}(S \cap V)$ пересечения единичной сферы S с любой окрестностью нуля V в слабой топологии пространства X ;
- Образ $\mathfrak{B}(S \cap V)$ пересечения единичной сферы S с любой $\mathcal{T}$ -окрестностью нуля V при прежних условиях на топологию $\mathcal{T}$.

$$\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{B}(x) + \Phi(x),$$

$$\Phi(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) \leq \theta_1 \Phi(x_1) + \theta_2 \Phi(x_2) \text{ если } \theta_i \geq 0, \theta_1 + \theta_2 = 1.$$

$$\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{B}(x) + \Phi(x),$$

$$\Phi(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) \leq \theta_1 \Phi(x_1) + \theta_2 \Phi(x_2) \text{ если } \theta_i \geq 0, \theta_1 + \theta_2 = 1.$$

Утверждение

Надобраз $\mathfrak{G}(X)^+$ — почти выпуклое множество, если выполнены следующие условия

- $\Phi(\cdot)$ непрерывна относительно некоторой локально выпуклой топологии $\mathcal{T}$ в пространстве X ;
- для любого $x \in X$ оператор $B(x, \cdot)$ непрерывен в этой топологии;
- надобраз $\mathfrak{B}(V)^+$ любой $\mathcal{T}$ -окрестности нуля V — почти выпуклое множество, которое почти совпадает с надобразом $\mathfrak{B}(X)^+$ всего пространства.

$$\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{B}(x) + \Phi(x),$$

$$\Phi(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) \leq \theta_1 \Phi(x_1) + \theta_2 \Phi(x_2) \text{ если } \theta_i \geq 0, \theta_1 + \theta_2 = 1.$$

Утверждение

Надобраз $\mathfrak{G}(X)^+$ — почти выпуклое множество, если выполнены следующие условия

- $\Phi(\cdot)$ непрерывна относительно некоторой локально выпуклой топологии $\mathcal{T}$ в пространстве X ;
- для любого $x \in X$ оператор $B(x, \cdot)$ непрерывен в этой топологии;
- надобраз $\mathfrak{B}(V)^+$ любой $\mathcal{T}$ -окрестности нуля V — почти выпуклое множество, которое почти совпадает с надобразом $\mathfrak{B}(X)^+$ всего пространства.

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) := \sup_{V \in \mathcal{O}(x_0)} \inf_{\substack{x \in V \\ x \neq x_0}}, \quad \text{где } \mathcal{O}(x_0) - \text{множество всех окрестностей } x_0 f(x),$$

$$\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{B}(x) + \Phi(x),$$

$$\Phi(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) \leq \theta_1 \Phi(x_1) + \theta_2 \Phi(x_2) \text{ если } \theta_i \geq 0, \theta_1 + \theta_2 = 1.$$

Утверждение

Надобраз $\mathfrak{G}(X)^+$ — почти выпуклое множество, если выполнены следующие условия

- $\Phi(\cdot)$ непрерывна относительно некоторой локально выпуклой топологии $\mathcal{T}$ в пространстве X ;
- для любого $x \in X$ оператор $B(x, \cdot)$ непрерывен в этой топологии;
- надобраз $\mathfrak{B}(V)^+$ любой $\mathcal{T}$ -окрестности нуля V — почти выпуклое множество, которое почти совпадает с надобразом $\mathfrak{B}(X)^+$ всего пространства.

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) := \sup_{V \in \mathcal{O}(x_0)} \inf_{\substack{x \in V \\ x \neq x_0}}, \quad \text{где } \mathcal{O}(x_0) - \text{множество всех окрестностей } x_0 f(x),$$

Для непрерывной квадратичной формы $b(\cdot)$ и локально выпуклой топологии $\mathcal{T}$ со свойствами, указанными в теоремах,

$$\liminf_{x \rightarrow 0} b(x) = \begin{cases} 0 & , \text{если } N_-[b(\cdot)] < \infty, \\ -\infty & , \text{если } N_-[b(\cdot)] = \infty, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tau^* \mathfrak{B}(x) < 0 \quad \text{при некотором } x \in X \\ \Downarrow \\ \liminf_{x \rightarrow 0} \tau^* \mathfrak{B}(x) = -\infty. \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема (Матвеев 1996)

Пусть $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ — вещественные линейные пространства, причем X локально выпукло, а Y конечномерно и упорядочено непустым замкнутым выпуклым конусом K_+ . Предположим, что

- для любого $x \in X$ оператор $B(x, \cdot) : X \rightarrow Y$ непрерывен и
- для любого $\tau^* \in Y^*, \tau^* \geq 0$ справедлива импликация (10).

Тогда надобраз $\mathfrak{B}(X)^+$ — почти выпуклое множество. Более того, справедливы следующие утверждения

- Для любой окрестности нуля $V \subset X$ множество $\mathfrak{B}(V)^+$ почти выпукло и почти совпадает с надобразом $\mathfrak{B}(X)^+$ всего пространства;
- Для любой непрерывной выпуклой функции $\Phi : X \rightarrow Y$ и отображения

$$\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{B}(x) + \Phi(x)$$

надобраз $\mathfrak{G}(X)^+$ — почти выпуклое множество.

$$\mathfrak{K}^+(\mathfrak{B}) := \bigcap_{V \in \mathcal{O}} \overline{\mathfrak{B}(V)^+}, \quad \mathcal{O} — \text{все окрестности нуля}$$

$$\mathfrak{K}^+(\mathfrak{B}) := \bigcap_{V \in \mathcal{O}} \overline{\mathfrak{B}(V)^+}, \quad \mathcal{O} — \text{все окрестности нуля}$$

Лемма

Пусть для любого $x \in X$ оператор $B(x, \cdot) : X \rightarrow Y$ непрерывен. Тогда множество $\mathfrak{K}^+(\mathfrak{B})$ — выпуклый конус. Кроме того, для любой выпуклой окрестности нуля $V \subset X$ справедливо включение

$$\overline{\mathfrak{B}(V)^+} + \mathfrak{K}^+(\mathfrak{B}) \subset \overline{\mathfrak{B}(V)^+}.$$

$$\mathfrak{K}^+(\mathfrak{B}) := \bigcap_{V \in \mathcal{O}} \overline{\mathfrak{B}(V)^+}, \quad \mathcal{O} — \text{все окрестности нуля}$$

Лемма

Пусть для любого $x \in X$ оператор $B(x, \cdot) : X \rightarrow Y$ непрерывен. Тогда множество $\mathfrak{K}^+(\mathfrak{B})$ — выпуклый конус. Кроме того, для любой выпуклой окрестности нуля $V \subset X$ справедливо включение

$$\overline{\mathfrak{B}(V)^+} + \mathfrak{K}^+(\mathfrak{B}) \subset \overline{\mathfrak{B}(V)^+}.$$

Joint essential numerical range операторов $A_1, \dots, A_k$: множество

$$W_{\text{ess}}(A_1, \dots, A_k) := \left\{ y \in \mathbb{R}^k : y = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}(x_n), \text{ где } |x_n| = 1 \ \forall n, \ x_n \rightsquigarrow 0 \right\}, \quad (11)$$

где $\rightsquigarrow$ — сходимость в слабой топологии X .

$$\mathfrak{K}^+(\mathfrak{B}) := \bigcap_{V \in \mathcal{O}} \overline{\mathfrak{B}(V)^+}, \quad \mathcal{O} — \text{все окрестности нуля}$$

Лемма

Пусть для любого $x \in X$ оператор $B(x, \cdot) : X \rightarrow Y$ непрерывен. Тогда множество $\mathfrak{K}^+(\mathfrak{B})$ — выпуклый конус. Кроме того, для любой выпуклой окрестности нуля $V \subset X$ справедливо включение

$$\overline{\mathfrak{B}(V)^+} + \mathfrak{K}^+(\mathfrak{B}) \subset \overline{\mathfrak{B}(V)^+}.$$

Joint essential numerical range операторов $A_1, \dots, A_k$: множество

$$W_{\text{ess}}(A_1, \dots, A_k) := \left\{ y \in \mathbb{R}^k : y = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}(x_n), \text{ где } |x_n| = 1 \ \forall n, \ x_n \rightsquigarrow 0 \right\}, \quad (11)$$

где $\rightsquigarrow$ — сходимость в слабой топологии X .

Утверждение (Cao, Poon, et. al.)

Для непрерывных самосопряженных линейных операторов в вещественном гильбертовом пространстве множество (11) выпукло и компактно.

$$X = H_+ \left(S_0^1 \rightarrow \mathbb{C}^{\mathfrak{s}} \right), \quad \mathfrak{B} [x(\cdot)] := \left\{ \int_{S_0^1} x(\lambda)^* G_i(\lambda) x(\lambda) \, d|\lambda| \right\}_{i=1}^k,$$

где $G_i(\lambda)$ — измеримая существенно ограниченная матричная функция, значения которой — эрмитово самосопряженные $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ -матрицы.

$$X = H_+ \left(S_0^1 \rightarrow \mathbb{C}^s \right), \quad \mathfrak{B} [x(\cdot)] := \left\{ \int_{S_0^1} x(\lambda)^* G_i(\lambda) x(\lambda) d|\lambda| \right\}_{i=1}^k,$$

где $G_i(\lambda)$ — измеримая существенно ограниченная матричная функция, значения которой — эрмитово самосопряженные $s \times s$ -матрицы.

$$b_\tau[x] := \tau^* \mathfrak{B} [x(\cdot)] = \int_{S_0^1} x(\lambda)^* G_\tau(\lambda) x(\lambda) d|\lambda|, \quad G_\tau = \sum_i \tau_i G_i, \quad \tau = \{\tau_i\} \in \mathbb{R}^k$$

$$X = H_+ \left(S_0^1 \rightarrow \mathbb{C}^s \right), \quad \mathfrak{B}[x(\cdot)] := \left\{ \int_{S_0^1} x(\lambda)^* G_i(\lambda) x(\lambda) d|\lambda| \right\}_{i=1}^k,$$

где $G_i(\lambda)$ — измеримая существенно ограниченная матричная функция, значения которой — эрмитово самосопряженные $s \times s$ -матрицы.

$$b_\tau[x] := \tau^* \mathfrak{B}[x(\cdot)] = \int_{S_0^1} x(\lambda)^* G_\tau(\lambda) x(\lambda) d|\lambda|, \quad G_\tau = \sum_i \tau_i G_i, \quad \tau = \{\tau_i\} \in \mathbb{R}^k$$

$$\exists x : b_\tau(x) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightsquigarrow 0} b_\tau(x) < 0 \quad ??$$

$$X = H_+ (S_0^1 \rightarrow \mathbb{C}^s), \quad \mathfrak{B}[x(\cdot)] := \left\{ \int_{S_0^1} x(\lambda)^* G_i(\lambda) x(\lambda) d|\lambda| \right\}_{i=1}^k,$$

где $G_i(\lambda)$ — измеримая существенно ограниченная матричная функция, значения которой — эрмитово самосопряженные $s \times s$ -матрицы.

$$b_\tau[x] := \tau^* \mathfrak{B}[x(\cdot)] = \int_{S_0^1} x(\lambda)^* G_\tau(\lambda) x(\lambda) d|\lambda|, \quad G_\tau = \sum_i \tau_i G_i, \quad \tau = \{\tau_i\} \in \mathbb{R}^k$$

$$\exists x : b_\tau(x) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightsquigarrow 0} b_\tau(x) < 0 \quad ??$$

- Если $b_\tau[x] < 0$ при некотором $x \in X$, то $b_\tau[x_n] = b_\tau[x] < 0$ для любого натурального n и $x_n(\lambda) := \lambda^n x(\lambda) \in H_+ (S_0^1 \rightarrow \mathbb{C}^s)$;
- $x_n \rightsquigarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так как

$$\langle x_n, x_{\text{fix}} \rangle = \int_{S_0^1} \lambda^n x_{\text{fix}}(\lambda)^* x(\lambda) d|\lambda| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{по т. Римана-Лебега}$$

$$X = H_+ (S_0^1 \rightarrow \mathbb{C}^s), \quad \mathfrak{B}[x(\cdot)] := \left\{ \int_{S_0^1} x(\lambda)^* G_i(\lambda) x(\lambda) d|\lambda| \right\}_{i=1}^k,$$

где $G_i(\lambda)$ — измеримая существенно ограниченная матричная функция, значения которой — эрмитово самосопряженные $s \times s$ -матрицы.

$$b_\tau[x] := \tau^* \mathfrak{B}[x(\cdot)] = \int_{S_0^1} x(\lambda)^* G_\tau(\lambda) x(\lambda) d|\lambda|, \quad G_\tau = \sum_i \tau_i G_i, \quad \tau = \{\tau_i\} \in \mathbb{R}^k$$

$$\exists x : b_\tau(x) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightsquigarrow 0} b_\tau(x) < 0 \quad ??$$

- Если $b_\tau[x] < 0$ при некотором $x \in X$, то $b_\tau[x_n] = b_\tau[x] < 0$ для любого натурального n и $x_n(\lambda) := \lambda^n x(\lambda) \in H_+ (S_0^1 \rightarrow \mathbb{C}^s)$;
- $x_n \rightsquigarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так как

$$\langle x_n, x_{\text{fix}} \rangle = \int_{S_0^1} \lambda^n x_{\text{fix}}(\lambda)^* x(\lambda) d|\lambda| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{по т. Римана-Лебега}$$

Итого:

$$\exists x : b_\tau(x) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightsquigarrow 0} b_\tau(x) \leq b_\tau(x) < 0$$

$$X = \left\{ x = [z(\cdot), u(\cdot)] \in L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m \right\} :$$

$$\dot{z} = Az + Bu \quad \forall t \geq 0, z(0) = 0 \Big\}$$

$$\mathfrak{B}[x] = \int_0^\infty [G_1[z(t)], \dots, G_k[z(t)]]^\top dt,$$

$G_i(z, u)$ произвольные квадратичные формы

$$X = \left\{ x = [z(\cdot), u(\cdot)] \in L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m \right\} :$$

$$\dot{z} = Az + Bu \quad \forall t \geq 0, z(0) = 0 \}$$

$$\mathfrak{B}[x] = \int_0^\infty [G_1[z(t)], \dots, G_k[z(t)]]^\top dt,$$

$G_i(z, u)$ произвольные квадратичные формы

$$b_\tau[x] := \tau^* \mathfrak{B}[x(\cdot)] = \int_0^\infty G_\tau[x(t)] dt, \quad G_\tau = \sum_i \tau_i G_i, \quad \tau = \{\tau_i\} \in \mathbb{R}^k$$

- Если $b_\tau[x] < 0$ при некотором $x \in X$, то $b_\tau[x_n] = b_\tau[x] < 0$ для любого натурального n и

$$x_n(t) := \begin{cases} x(t-n) & \text{при } t \geq n, \\ 0 & \text{при } t \in [0, n); \end{cases}$$

- $x_n \rightsquigarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так как ввиду неравенства Коши

$$\begin{aligned} |\langle x_n, x_{\text{fix}} \rangle| &= \left| \int_n^\infty x_{\text{fix}}(t)^* x(t-n) dt \right| \\ &\leq \|x\|_{L_2} \left[\int_n^\infty |x_{\text{fix}}(t)|^2 dt \right]^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$X = \left\{ x = [z(\cdot), u(\cdot)] \in L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m \right\} :$$

$$\dot{z} = Az + Bu \quad \forall t \geq 0, z(0) = 0 \}$$

$$\mathfrak{B}[x] = \int_0^\infty [G_1[x(t)], \dots, G_k[x(t)]]^\top dt,$$

$G_i(z, u)$ произвольные квадратичные формы

$$\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{B}(x) + \Phi(x)$$

- образ $\mathfrak{G}(X)$ — почти выпуклое множество, если

$$\Phi(x) = \int_0^\infty M(t)x(t) dt + \text{const}, \quad M(\cdot) \in L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{k \times (n+m)}$$

Условие $z(0) = 0$ можно заменить на $z(0) = a$

- надобраз $\mathfrak{G}(X)$ — почти выпуклое множество, если $\mathbb{R}^k$ снабжено покомпонентным упорядочением,

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \varphi[x(t), t] dt, \quad \varphi[\cdot, t] : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ выпуклая функция,}$$

$$|\varphi[x, t]| \leq \alpha(t)|x|^2, \quad \alpha(t) \geq 0, \quad \alpha(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$

- Matveev, A. (1996a). Lagrange duality in a certain specific nonconvex problem of global optimization. Vestnik S.Peterb. Univ., Ser.1, 2(8), 37–43.
- Matveev, A. (1996b). Lagrangian duality in the theory of nonconvex optimization, and modifications of the Toeplitz-Hausdorff theorem. St.Petersburg Mathematical Journal, 7(5), 787–815.
- Matveev, A. (1998a). On convexity of images of quadratic mappings. St.Petersburg Mathematical Journal, 10(2), 159–196.
- Matveev, A. (1998b). Spectral approach to duality in nonconvex global optimization. SIAM Journal on Control and Optimization, 36(1), 336–378.
- Matveev, A. and Yakubovich, V. (1993). Nonconvex problems of global optimization. St.Petersburg Mathematical Journal, 4(6), 1217–1243.
- Matveev, A. and Yakubovich, V. (1997). Nonconvex problems of global optimization: linear-quadratic control problems with quadratic constraints. Dynamics & Control, 7(2), 99–134.
- Matveev, A. and Yakubovich, V. (2000). Nonconvex global optimization problems in control theory. Journal of Mathematical Sciences, 100(5), 2531–2568.