

Модели специализации в абстрактных системах

Ф.Т. Алескеров, ВШЭ, ИПУ РАН
Д. Тверской, ВШЭ, ИПУ РАН

Постановка задачи

- Пусть имеется абстрактная система, состоящая из N элементов.
- Имеются две функции, каждую из которых может выполнять любой из элементов

Постановка задачи

v_i -объем выполнения первой функции элементом i .

b_i –объем выполнения второй функции элементом i .

- Внутренняя структура каждого элемента такова, что мы не можем максимизировать выполнение обеих функций элементом одновременно. Формализуется это понятием внутренней функции компромиссов элемента, которую сейчас мы возьмем линейной.
- Функция компромиссов:

$$v = v_{max} - \alpha * b.$$

Постановка задачи

Общий уровень выполнения системой второй и первой функции соответственно вычисляется следующим образом

$$B = \sum_{i=1}^N b_i; \quad V = \sum_{i=1}^N v_i.$$

Постановка задачи

- Наша цель — максимизация эффективности функционирования системы
- Эффективность определяется в терминах выполнения системой обеих функций
- Чем больше уровень выполнения любой функции системой, тем выше ее эффективность
- Кроме того, мы предполагаем, что в системе присутствует синергетический эффект, который достигается путем взаимодействия элементов друг с другом: Эффективность системы, состоящей из двух элементов выше, чем суммарная эффективность двух систем, каждая из которых состоит из соответствующего элемента

Постановка задачи

- Таким образом, эффективность системы измеряется следующим индексом

$$W = V * B$$

- Кроме того, мы предполагаем, что элементы в системе могут иметь различную внутреннюю структуру (различный тип). Тип элемента определяется коэффициентами внутренней функции компромиссов. Без ограничения общности введем следующую предпосылку:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j: \alpha_i \neq \alpha_j$$

Постановка задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \sum_{i=1}^N b_i * \sum_{i=1}^N v_i \rightarrow \max_{b,v} \\ \forall i = \overline{1, N}: v_i = v_i^{max} - \alpha_i * b_i, \\ \forall i = \overline{1, N}: b_i \geq 0, \\ \forall i = \overline{1, N}: v_i \geq 0. \end{array} \right.$$

- Элемент i назовем специализирующимся на функции1 (функции2), если уровень выполнения этим элементом функции2 (функции1 соответственно) равен нулю.
- **Возникает ли специализация в точке оптимума?**

Результаты

Утверждение 1. Пусть b^* - решение рассматриваемой задачи, тогда b^* принадлежит одномерному остову допустимого гиперпараллелепипеда.

- Иначе говоря, если все элементы системы имеют свой уникальный тип, то в системе будет не более одного неспециализированного элемента.
- Если в системе имеется конечное число типов, и каждый тип наблюдается у некоторого подмножества клеток, мощности больше единицы, то тогда в оптимуме в системе часть элементов будет специализированной, а часть — безразлична к специализации.

Где возникают подобного рода системы?

- Модели функционирования университетов
- Биологические системы: моделирование колониальных организмов (например, вольвоксовые сине-зеленые водоросли и их колониальные формы)

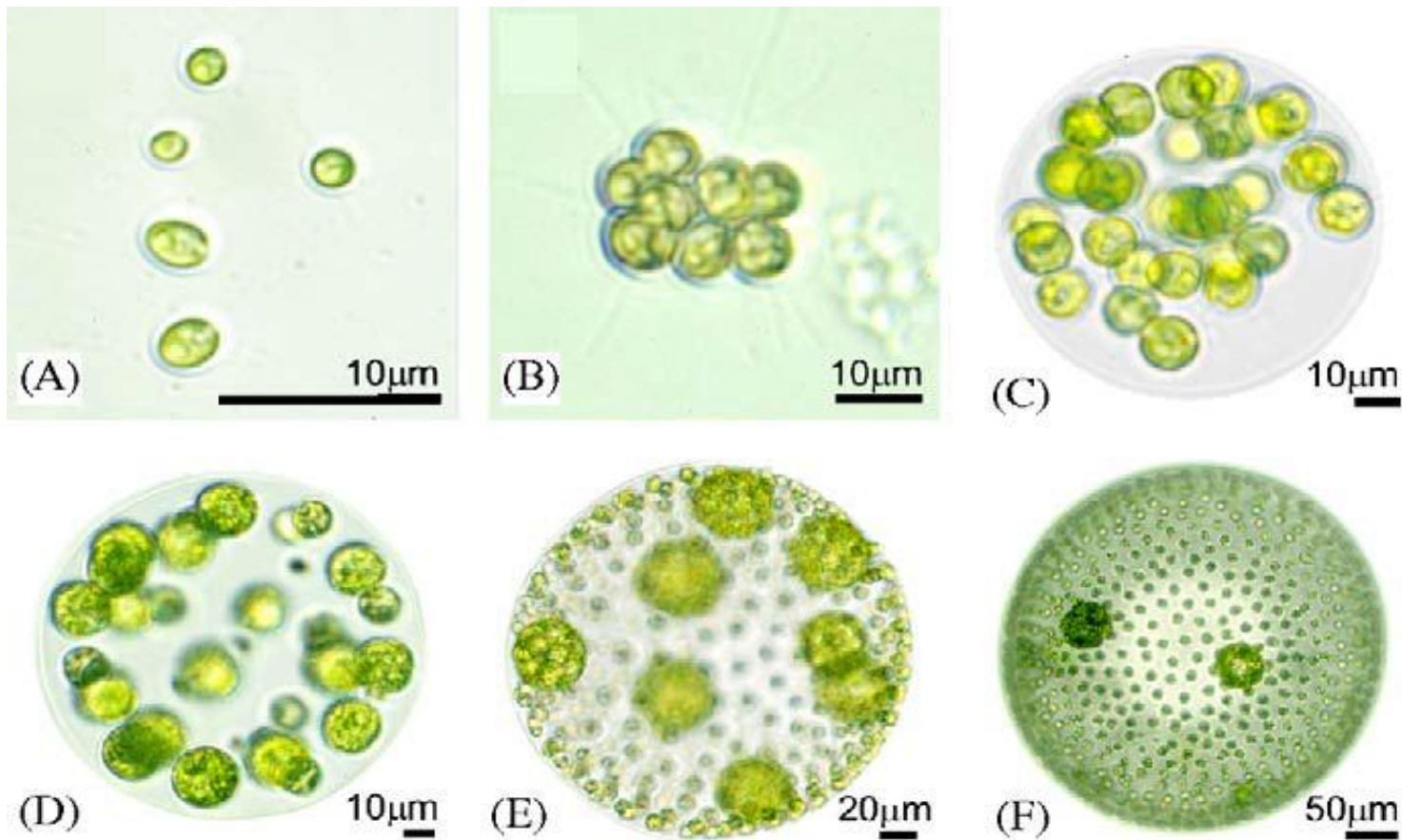
Модели функционирования университетов

- Рассмотрим систему высшего образования в некотором регионе (стране). Элементы – университеты
- Каждый университет может (и должен) выполнять две функции – образовательную и исследовательскую, выполнение которых невозможно максимизировать одновременно
- Обмен знаниями между представителями научного сообщества обеспечивает интересующий нас синергетический эффект
- Наша задача – выяснить каким образом университеты будут распределять функции, каким образом будут формироваться научные и образовательные центры в регионе (стране)

Биологические системы:

ВОЛЬВОКСОВЫЕ СИНЕ-ЗЕЛЕННЫЕ ВОДОРОСЛИ

R.E. Michod, Y. Viossat, C. A. Solari, M. Hurand, A. Nedelcu. Life-history evolution and the origin of multicellularity, *Journal of Theoretical Biology*, V. 239, Issue 2, 21 March 2006



Модель колониального организма

- Рассматривается колония, состоящая из конечного числа клеток
- Каждая клетка может выполнять одну из двух функций – соматическую или репродуктивную
- Все клетки в колонии идентичные
- Для выполнения репродуктивной функции необходимы так называемые первоначальные издержки воспроизводства, зависящие от размера колонии.

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \sum_{i=1}^N b_i * \sum_{i=1}^N v_i \rightarrow \max_{b,v} \\ \forall i = 1..N: v_i = v(b_i), \\ b \geq 0, \\ v \geq 0. \end{array} \right.$$

Результаты

- Если функции компромиссов являются строго вогнутыми, то все клетки в колонии остаются неспециализированными.
- Если функции компромиссов линейные, то колония ведет себя так, как если бы она состояла из одной клетки; так, каждая клетка безразлична к специализации.
- Если функции компромиссов выпуклые, то колония предрасположена к специализации. Если колония состоит из четного числа клеток, то ровно половина должна специализироваться на одной из функций, другая – на другой. Если же система состоит из нечетного числа клеток, то $\left[\frac{N}{2}\right]$ клеток должны специализироваться на функции 1, такое же число клеток – на функции 2. Один элемент должен остаться неспециализированным.

«Энергетическое ограничение»

- Пусть C – это уровень энергии, доступный для системы при заданном способе получения энергии и при заданных характеристиках внешней среды
- Тогда системе необходимо иметь k_1 единиц энергии для выполнения одной единицы функции b и k_2 единиц энергии для выполнения единицы функции v .
- Теперь мы можем построить общее энергетическое ограничение следующим образом

$$k_1 * \sum_{i=1}^N b_i + k_2 * \sum_{i=1}^N v_i \leq C, \text{ где } k_1 > 0, k_2 > 0, C > 0$$

Энергетическое ограничение

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \sum_{i=1}^N b_i * \sum_{i=1}^N v_i \rightarrow \max_{b,v} \\ \forall i = 1..N: v_i = v_i^{max} - \alpha_i * b_i, \\ k_1 * \sum_{i=1}^N b_i + k_2 * \sum_{i=1}^N v_i \leq C, \\ \forall i = 1..N: v_i \geq 0, \\ \forall i = 1..N: b_i \geq 0. \end{array} \right.$$

Результаты

- Пусть H – область допустимых значений задачи (усеченный гиперпараллелепипед).

$$I = \left\{ b \in H : B(b) = \frac{C}{2k_1}, V(b) = \frac{C}{2k_2} \right\}.$$

Утверждение 2.

Пусть $I \neq \emptyset$. Тогда $b^* \in R^N$ есть решение рассматриваемой задачи, тогда и только тогда, когда $b^* \in I$. Если же множество I пусто, то решение задачи принадлежит одномерному остову множества допустимых значений.

Интерпретация результатов

- В оптимуме может существовать связанное множество состояний, в каждом из которых система достигает одинакового максимального уровня эффективности.
- В некоторых из этих состояний произвольно выбранный элемент может быть специализированным, в других – нет. Но уровни выполнения обеих функций элементом лежат в некоторых ограниченных промежутках.

Модель с выпуклыми (вогнутыми) функциями компромиссов

$$\forall i = \overline{1, N}: v_i = \vartheta_i(b_i).$$

1. $\forall i = \overline{1, N}: b_i^{max} \in R, 0 < b_i^{max} < \infty$
2. $\forall i = \overline{1, N}: \vartheta_i \in \mathbb{C}_{[0, b_i^{max}]}$
3. $\forall i = \overline{1, N}: \vartheta_i(0) = v_i^{max}, 0 < v_i^{max} < \infty;$
4. $\forall i = \overline{1, N}: \vartheta_i(b_i^{max}) = 0;$
5. $\forall i = \overline{1, N}, \forall b_i \in [0, b_i^{max}]: \frac{d\vartheta_i(b_i)}{db_i} < 0$
6. $\forall i = \overline{1, N}, \forall b_i \in [0, b_i^{max}]: \frac{d^2\vartheta_i(b_i)}{db_i^2} > 0, \left(\forall i = \overline{1, N}, \forall b_i \in [0, b_i^{max}]: \frac{d^2\vartheta_i(b_i)}{db_i^2} < 0 \right).$

Модель с выпуклыми (вогнутыми) функциями компромиссов

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \sum_{i=1}^N b_i \sum_{i=1}^N v_i \rightarrow \max_{b,v} \\ \forall i = \overline{1, N}: v_i = \vartheta_i(b_i), \\ \forall i = \overline{1, N}: b_i \geq 0, \\ \forall i = \overline{1, N}: v_i \geq 0. \end{array} \right.$$

Результаты

Утверждение 3. Пусть все функции компромиссов в модели выпуклые. Тогда решение задачи принадлежит одномерному остову допустимого гиперпараллелепипеда.

- Это означает, что система с выпуклыми функциями компромиссов имеет тенденцию к специализации независимо от того, идентичны ли элементы в системе или они имеют различные типы.

Результаты

Утверждение 4. Рассмотрим модификацию исходной задачи, сузив множество допустимых решений до некоторой грани. Обозначим эту задачу s , а I_3^s - это множество всех тех элементов системы, уровни выполнения которыми функции b являются переменными задачи s . Тогда внутренняя точка допустимого множества решений задачи s b^s является точкой локального максимума этой задачи тогда и только тогда, когда

$$\forall i, j \in I_3^s: \frac{d\vartheta_i}{db_i}(b_i^s) = \frac{d\vartheta_j}{db_j}(b_j^s) = -\frac{V_s}{B_s}(b^s)$$

Интерпретация результатов

- В случае, когда различие типов элементов системы существенно, система предрасположена к специализации.
- В случае, когда дифференциация типов элементов в системе невелика, неспециализированные состояния могут быть выгодными. В оптимуме часть элементов может быть и специализированными. Число специализированных элементов в системе определяется, в том числе, уровнем дифференциации типов элементов в системе.

**Энергетическое ограничение в модели
с выпуклыми (вогнутыми) функциями компромиссов**

$$\left\{ \begin{array}{l} W(b) = \sum_{i=1}^N b_i * \sum_{i=1}^N \vartheta_i(b_i) \rightarrow \max_b \\ k_1 * \sum_{i=1}^N b_i + k_2 * \sum_{i=1}^N \vartheta_i(b_i) \leq C, \\ \forall i = 1..N: 0 \leq b_i \leq b_i^{max}. \end{array} \right.$$

Интерпретация результатов

- В оптимуме система с различными типами элементов и энергетическим ограничением может быть безразлична между некоторыми оптимальными множествами состояний. Произвольно выбранный элемент может быть специализированным в некоторых из этих состояний и неспециализированной в других.
- Рассмотрим одно из оптимальных множеств. Небольшое отклонение в ненаблюдаемых параметрах, которое не выводит систему из данного множества, влечет за собой небольшое и непрерывное изменение уровней выполнения функций элементами.

Интерпретация результатов

- Результаты отражают тот факт, что некоторые элементы системы могут потерять потенциальную возможность специализироваться на какой-то из функций, но при этом, не потерять возможности выполнять эту функцию вообще. Данный тип систем может быть охарактеризован как некоторый промежуточный вариант между неспециализированными системами и полностью специализированными системами.

Спасибо за внимание!