Оптимизация и асимптотическая устойчивость

Б.Т.Поляк

Семинар ИПУ, 5 апреля 2016 г.

Народная мудрость

Все линейные системы линейны одинаково,
каждая нелинейная система нелинейна по-своему

Аналогии

Оптимизация	Устойчивость
Задана функция	Задано уравнение
Построить метод	Построить функцию Ляпунова
Оценить скорость	Доказать устойчивость

Прямой метод Ляпунова

$$\dot{x} = \phi(x), \quad x(0) \in R^n \tag{1}$$

$V(x) \geq v^*$

$-\dot{V} = -(V'(x), \phi(x)) \geq W(x) \geq 0$

Асимптотическая устойчивость

Теорема 1. Для решений (1) $\liminf W(x(t)) = 0$ при $t \to \infty$ и

$$\int_0^T W(x(t))dt \leq \frac{V(x(0)) - v^*}{T}.$$

2. Если $W(x)$ выпукла и $\bar{x}(T) = (1/T)\int_0^T x(t)dt$, то

$$W(\bar{x}(T)) \leq \frac{V(x(0)) - v^*}{T}.$$

3. Если $\phi(x^*) = 0, V(x^*) = v^*, V(x) > v^*, x \neq x^*, V(\infty) > 0, W(x) > 0, x \neq x^*$ то $x(t) \to x^*$.

4. Если $W(x) \geq \gamma(V(x) - v^*), \gamma > 0$, то

$$V(x(t)) - v^* \leq (V(x(0) - v^*) \exp(-\gamma t).$$

Утверждение 3 — стандартная теорема Ляпунова

Градиентный метод

$$\min f(x), \quad x \in R^n. \tag{2}$$

$$\dot{x} = -f'(x), \quad Cauchy, 1847 \tag{3}$$

$$V(x) = f(x) - f^*, W(x) = ||f'(x)||^2.$$

Тогда $f'(x(t)) \to 0$. Если при этом $f(x) - f^* \le 2l||f'(x)||^2, l > 0$, то $f(x(t)) \to 0$ с экспоненциальной скоростью. При этом не предполагается выпуклость $f(x)$. Для выпуклого случая

$$V(x) = ||x - x^*||^2, -\dot{V} = (f'(x), x - x^*) \ge f(x) - f^* = W(x)$$

Тогда $f(\bar{x}(t)) - f^* \le ||x(0) - x^*||^2/t$. Если $f(x)$ сильно выпукла то $x(t) \to x^*$ с экспоненциальной скоростью.

Метод тяжелого шарика

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bf'(x) = 0 \tag{4}$$

Метод предложен в *Поляк, 1964* из физических аналогий с движением тела в потенциальном поле при наличии трения. Другие работы *Attouch, a.o. 2000, J. Bolte a.o. 2015*. Естественный выбор функции Ляпунова — полная энергия

$$V = f(x) + \frac{1}{2b}||y||^2$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ay - bf'(x). \end{aligned}$$

Тогда $W = \frac{a}{b}||y||^2$, и условия асимптотической устойчивости нельзя получить из теорем типа Ляпунова (можно применить теорему Барбашина-Красовского, но она не дает оценок скорости сходимости).

Другая функция Ляпунова

$$V = f(x) - f^* + \frac{a}{a^2 + 2bL}(f'(x), y) + \frac{L}{a^2 + 2bL}||y||^2.$$

Теорема Пусть $f(x) \geq f^*, f \in C^2, ||f''(x)|| \leq L, a > 0, b > 0$. Тогда для любых $x(0), y(0)$ в методе (4) будет

$$\min_{0 \leq t \leq T} ||f'(x(t))||^2 \leq \frac{V(0)}{bT}$$

Если, кроме того, выполняется условие

$$||f'(x)||^2 \geq 2l(f(x) - f^*), \quad l > 0$$

то существует точка минимума $x^*, x(t) \to x^*$ с экспоненциальной скоростью.

Доказательство: $W \geq c_2(||f'(x)||^2 + ||y||^2), c_2 > 0,\ V \geq c_1(||f'(x)||^2 + ||y||^2), c_1 > 0$.

Выпуклый случай

S. Boyd, a.o., 2014

$$V = f(x) - f^* + \alpha||x - x^* + \beta y||^2 \tag{5}$$

где x^* — точка минимума $f(x)$, а $\alpha > 0, \beta$ некоторые константы. В действительности рассматривая $a(t), \alpha(t), \beta(t)$ Бойд доказывает сходимость $O(1/t^2)$.

Уравнение синхронного двигателя

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x - c = 0, a > 0, 0 < b < c, x(t) \in R^1, \tag{6}$$

Синхронный двигатель, автоподстройка частоты, маятник с постоянно действующим моментом. *Трикоми, 1933, Андронов-Витт-Хайкин, Леонов, ...*

Точка равновесия $x = x^* = \arcsin(c/b), y = \dot{x} = 0$.

Полная энергия системы

$$V = y^2/2 + b(\cos x^* - \cos x) - c(x - x^*),$$

для нее $-\dot{V} = W = ay^2 \geq 0$

Трудности: V не ограничена снизу, из $W \to 0$ не следует асимптотическая устойчивость.

Другая функция Ляпунова

$$V = \frac{y^2}{2} + \frac{ap}{2}(x - x^*)^2 + py(x - x^*) + b(\cos x^* - \cos x) - c(x - x^*).$$

$V(x^*, 0) = 0, V(x, y) > 0, \dot{V} = -pb(\sin x - \sin x^*)(x - x^*) - (a - p)y^2 < 0$ при $0 < p < a, |x + x^*| < \pi$.

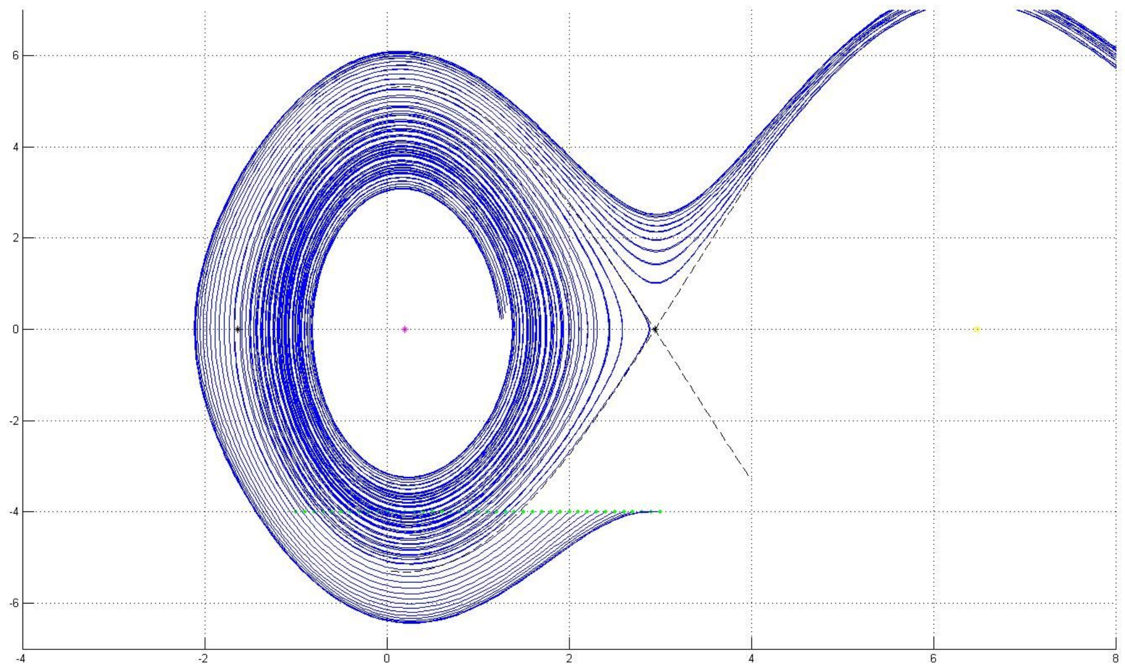
Асимптотическая устойчивость

Теорема Пусть $|x(0)+x^*| < \pi, V(x(0), y(0)) < h = V(\pi - x^*, -p(\pi - 2x^*))$. Тогда $x(t) \to x^*, y(t) \to 0$.

Это — большая область устойчивости, чем при $p = 0$. Наилучшее $p = -a/2$.

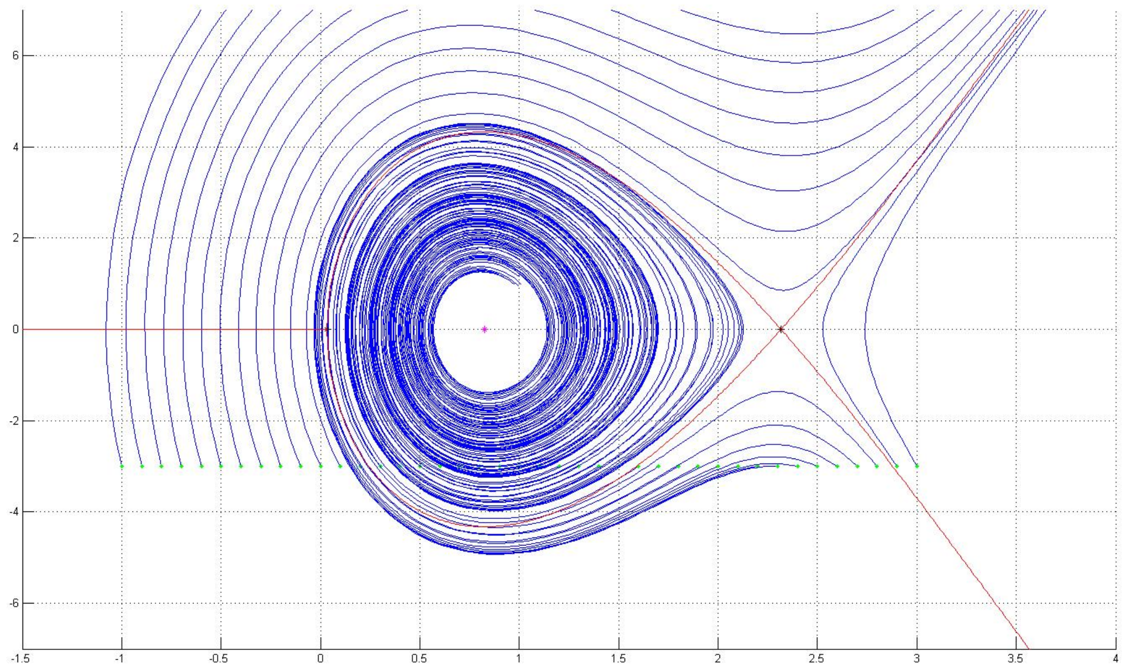
Примеры

.



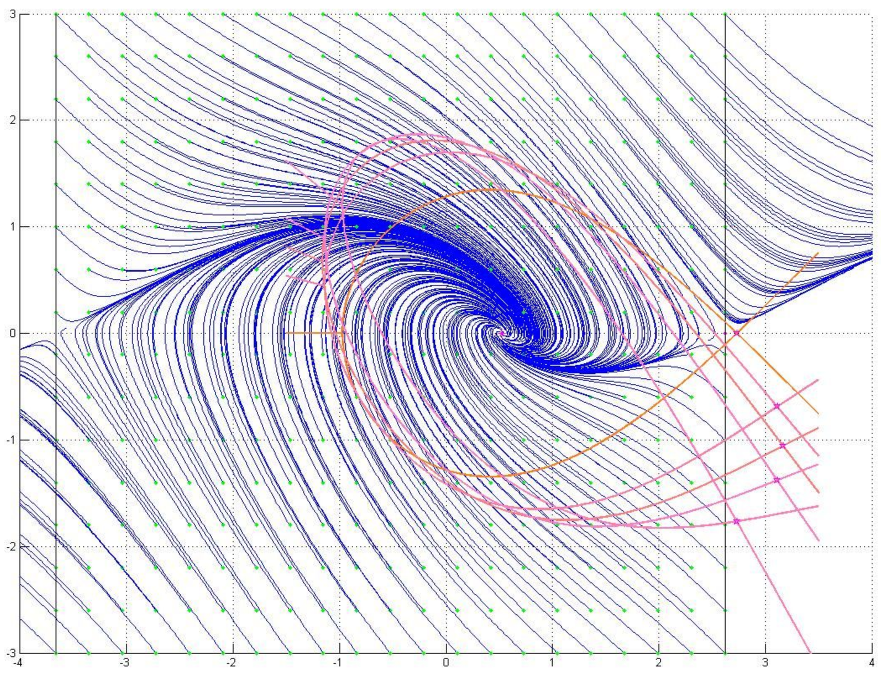
Примеры

.



Примеры

.



Устойчивость энергосистем

Фазовая синхронизация, фазовая автоподстройка частоты, основное уравнение энергосистемы:

$$\ddot{x_k} + a_k \dot{x_k} + \sum_j b_{jk} \sin(x_k - x_j) - c_k = 0, x_k(t) \in R^1. \qquad (7)$$

Леонов, Hill, Bialek, Pai ...

Общий подход

Turitsyn, 2016

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(Cx) \tag{8}$$

$$V(x) = (Qx, x) + K\phi(Cx)$$

Для Q, K — LMI.

Обобщения

- Исследование уравнений (7), (8)
- Итеративные методы (разностные уравнения)
- Оптимизация параметров, более точные оценки скорости сходимости
- Оптимизация при ограничениях