

О новой связи между решениями уравнения теплопроводности и уравнения Шрёдингера

Иван Дмитриевич Ремизов^{1,2}

¹МГТУ им. Н.Э.Баумана

²ННГУ им. Н.И.Лобачевского

Доклад на семинаре
«Квантовая физика и квантовая информация»
под руководством В.И.Манько и С.В.Филиппова

Климентовский пер., д. 1, стр. 1, ауд. 108

26 апреля 2016

Москва



План на сегодня:

1. Введение

- ▶ Почему это интересно; о чём пойдёт речь
- ▶ C_0 —полугруппы и C_0 —группы
- ▶ C_0 -(полу)группа даёт решение задачи Коши для PDE
- ▶ Теорема Стоуна о C_0 -группах унитарных операторов

2. Новый метод в теории C_0 -(полу)групп

- ▶ Касание по Чернову (=черновское касание)
- ▶ Теорема Чернова в терминах касания по Чернову
- ▶ Моя теорема

3. Приложения метода

- ▶ Квазифейнмановские формулы
- ▶ Решение ур-я Шрёдингера с помощью оператора сдвига

4. Дополнения (на выбор слушателей)

- ▶ Доказательство моей теоремы
- ▶ Управление скоростью сходимости аппроксимаций
- ▶ Теорема Смолянова о повороте черновского касания
- ▶ Решение ур-я диффузии с помощью оператора сдвига



Почему это интересно. С начала XX века люди не перестают восхищаться тем фактом, что если в известном с 1926 г. уравнении Шрёдингера стереть мнимую единицу i , то получится известное с 1814 г. уравнение теплопроводности. Это тем более удивительно, что первое описывает поведение микро-, а второе - макро-объектов, причём уравнение Шрёдингера — точное и постулируется, а уравнение теплопроводности — приближённое и выводится. Известно несколько концепций, позволяющих взглянуть на эти два линейных параболических уравнения с единой точки зрения, и одной из центральных является техника сильно непрерывных полугрупп линейных ограниченных операторов. На эту технику опирается предложенный докладчиком в 2014 г. метод, позволяющий свести решение уравнения Шрёдингера к решению уравнения теплопроводности. Этому методу и его приложениям посвящён сегодняшний доклад.

О чём пойдёт речь. В докладе будет рассмотрена появившаяся в 2014 году формула $R(t) = e^{i(S(t)-I)}$, позволяющая явно выразить C_0 -группу $(e^{-it\mathcal{H}})_{t \in \mathbb{R}}$ с генератором $-i\mathcal{H}$ через C_0 -полугруппу $(e^{-t\mathcal{H}})_{t \geq 0}$ с генератором $-\mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – гамильтониан, т.е. самосопряжённый оператор, стоящий в правой части уравнений теплопроводности и Шрёдингера. Формула доказана на уровне полугрупп, поэтому применима в широком классе операторов и конфигурационных пространств. Более того, общность теоремы позволяет вместо полугруппы с генератором $-\mathcal{H}$ взять объект, более просто выражающийся через коэффициенты оператора $\mathcal{H}$, а именно, однопараметрическое семейство ограниченных самосопряжённых операторов, касательное по Чернову к оператору $-\mathcal{H}$ или к оператору $\mathcal{H}$. Будут рассмотрены приложения этой формулы, смежные результаты и полученные с Нового Года 2015/2016 результаты.

C_0 —полугруппы и C_0 —группы

Определение. C_0 -полугруппа (=сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа $(W(t))_{t \geq 0}$ линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве $\mathcal{F}$) это отображение

$$W: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

полупрямой $[0, +\infty)$ в множество $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$, удовлетворяющее условиям

- 1) $\forall \varphi \in \mathcal{F} : W(0)\varphi = \varphi$,
- 2) $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0 : W(t+s) = W(t) \circ W(s)$,
- 3) $\forall \varphi \in \mathcal{F}$ функция $t \mapsto W(t)\varphi$
непрерывна как отображение $[0, +\infty) \rightarrow \mathcal{F}$.

Определение C_0 -группы получается заменой $[0, +\infty)$ на $\mathbb{R}$.

C_0 —полугруппы и C_0 —группы

Теорема. Для каждой C_0 -(полу)группы W в $\mathcal{F}$ линейное пространство

$$D = \left\{ \varphi \in \mathcal{F} : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(t)\varphi - \varphi}{t} \right\} \subset \mathcal{F}$$

плотно в $\mathcal{F}$.

Определение. Генератором C_0 -(полу)группы W называется линейный оператор $L: D \rightarrow \mathcal{F}$, заданный на равенством

$$L\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(t)\varphi - \varphi}{t}, \quad \varphi \in D.$$

Теорема. Генератор C_0 -(полу)группы замкнут и однозначно определяет полугруппу. Используется обозначение $W(t) = e^{tL}$.

C_0 -(полу)группа даёт решение задачи Коши для эволюционного уравнения с частными производными

Если Q — пространство координат, тогда функция $u: \mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{C}$, $u: (t, x) \mapsto u(t, x)$ двух переменных (t, x) может быть рассмотрена как функция $u: t \mapsto [x \mapsto u(t, x)]$ одного переменного t со значениями в пространстве функций переменного x . Если $u(t, \cdot) \in \mathcal{F}$ для каждого $t \in \mathbb{R}$, то положим $Lu(t, x) = (Lu(t, \cdot))(x)$.

Если существует C_0 -группа $(e^{tL})_{t \in \mathbb{R}}$ в $\mathcal{F}$, тогда задача Коши

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = Lu(t, x) & \text{для } t \in \mathbb{R}, x \in Q \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{для } x \in Q \end{cases}$$

имеет единственное в смысле $\mathcal{F}$ решение

$$u(t, x) = (e^{tL}u_0)(x),$$

зависящее от u_0 непрерывно по норме в $\mathcal{F}$.



Теорема Стоуна о C_0 -группах унитарных операторов

Теорема (М. Н. STONE, 1932). Существует биекция между самосопряжёнными операторами H в гильбертовом пространстве $\mathcal{F}$ и C_0 -группами $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ унитарных операторов в $\mathcal{F}$. Биекция такова: iH — это генератор $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$, то есть

$$W_t = e^{itH}.$$

Следствие. Если оператор A в гильбертовом пространстве линеен и самосопряжён, то $\|e^{iA}\| = 1$.

Касание по Чернову (=черновское касание)

Определение (И.Д.Ремизов, 2014) Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве $\mathcal{F}$. Пусть оператор $L: \mathcal{F} \supset \text{Dom}(L) \rightarrow \mathcal{F}$ замкнут. Функция G называется касательной по Чернову (Chernoff-tangent) к L если:

(СТ1). G определена на $[0, +\infty)$, принимает значения $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ и отображение $t \mapsto G(t)f$ непрерывно на каждом вектре $f \in \mathcal{F}$.

(СТ2). $G(0) = I$, т.е. $G(0)f = f$ для каждого $f \in \mathcal{F}$.

(СТ3). Существует такое плотное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что для каждого $f \in \mathcal{D}$ существует предел

$$G'(0)f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)f - f}{t}.$$

(СТ4). Замыкание оператора $(G'(0), \mathcal{D})$ равно $(L, \text{Dom}(L))$.

Теорема Чернова в терминах касания по Чернову

Теорема (P. R. CHERNOFF, 1968) Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ такие же, как и раньше. Пусть оператор $L: \mathcal{F} \supset \text{Dom}(L) \rightarrow \mathcal{F}$ линейен, и функция G принимает значения в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$.

Пусть выполняются все условия:

(E) Существует сильно непрерывная полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$ с генератором $(L, \text{Dom}(L))$.

(CT) G касается по Чернову оператора $(L, \text{Dom}(L))$.

(N) Нашлось такое число $\omega \in \mathbb{R}$, что $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ при $t \geq 0$.

Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$(G(t/n))^n f \rightarrow e^{tL} f$$

равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

Моя теорема

Теорема (И. Д. Ремизов, 2014) Пусть даны линейный самосопряжённый оператор $H: \mathcal{F} \supset \text{Dom}(H) \rightarrow \mathcal{F}$ в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{F}$ и ненулевое число $a \in \mathbb{R}$. Пусть отображение S касательно по Чернову к H и $(S(t))^* = S(t)$ при всех $t \geq 0$. Положим

$$R(t) = \exp \left[ia(S(|t|) - I)\text{sign}(t) \right],$$

определяя экспоненту стандартным рядом (это возможно, так как для каждого $t \in \mathbb{R}$ в показателе стоят только линейные ограниченные операторы в $\mathcal{F}$).

Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $f \in \mathcal{F}$ по норме в $\mathcal{F}$ существует следующий предел, и справедливо равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(R\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n f = e^{iatH} f.$$



Моя теорема

Следствие. Без ограничения общности полагая $a = 1$ и $t > 0$, раскладываем экспоненту

$$R(t) = \exp \left[ia(S(|t|) - I)\text{sign}(t) \right] = e^{i(S(t)-I)}$$

по формулам $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ и $e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A}{k} \right)^k$, и получаем, что всех $t > 0$ и всех $f \in \mathcal{F}$ по норме в $\mathcal{F}$ существуют пределы и справедливы равенства:

$$e^{itH}f = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \sum_{q=0}^m \frac{(-1)^{m-q}(in)^m}{q!(m-q)!} (S(t/n))^q f,$$

$$e^{itH}f = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{q=0}^k \frac{k!(k-in)^{k-q}(in)^q}{q!(k-q)!k^k} (S(t/n))^q f.$$

Квазифейнмановская формула: определение

Определение (И.Д.Ремизов, 2014; термин предложен О.Г.Смоляновым, 2015).

Квазифейнмановской формулой называется представление функции в виде, включающем кратные интегралы сколь угодно большой кратности. Типичная квазифейнмановская формула:

$$f(x) = [\text{Expr_1}] \underbrace{\int_A \dots \int_A}_n [\text{Expr_2}] dx_1 \dots dx_n [\text{Expr_3}]$$

где $n \rightarrow \infty$, A — множество с мерой, и $[\text{Expr_k}]$ — некоторые математические выражения.

Для сравнения: фейнмановская формула = предел кратного интеграла при стремящейся к бесконечности кратности.

Квазифейнмановская формула: модельный пример

Д.В.Гришин-И.Д.Ремизов-А.В.Смирнов, 2015: задача Коши

$$\begin{cases} i\psi'_t(t, x) = -\frac{1}{2}\psi''_{xx}(t, x) + V(x)\psi(t, x); & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \\ \psi(0, x) = \psi_0(x); & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

с гладким ограниченным потенциалом V имеет решение

$$\begin{aligned} \psi(t, x) = & \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \sum_{q=0}^m \frac{(-1)^{m-q} (in)^m (\text{sign}(t))^m}{q!(m-q)!} \left(\frac{n}{2\pi|t|} \right)^{q/2} \times \\ & \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}}_q \exp \left\{ \frac{|t|}{n} \left[-\frac{1}{2}V(x) - \sum_{p=1}^q V \left(x + \sum_{d=p}^q y_d \right) \right] - \frac{1}{2|t|} \sum_{r=1}^q y_r^2 \right\} \times \\ & \times \psi_0 \left(x + \sum_{j=1}^q y_j \right) \prod_{s=1}^q dy_s. \end{aligned}$$



Решение уравнения Шрёдингера с помощью оператора сдвига: модельный пример

Теорема (И.Д.Ремизов, 2016). Пусть функция $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченная и измеримая. Для каждой $f \in L_2(\mathbb{R})$, каждой финитной гладкой $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и каждых $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ положим

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4} \left[f(x+\sqrt{t}) + 2f(x) + f(x-\sqrt{t}) \right] - \arctg [tV(x)] f(x),$$

$$(H\varphi)(x) = \frac{1}{4}\varphi''(x) - V(x)\varphi(x).$$

Тогда: 1) При каждом $t \geq 0$ верно $\|S(t)\| \leq 1 + \frac{\pi}{2}$. 2) При каждом $t \geq 0$ верно $S(t) = S(t)^*$. 3) S черновски касается оператора H .

Решение уравнения Шрёдингера с помощью оператора сдвига: модельный пример

Следствие. Задача Коши

$$\begin{cases} \psi'_t(t, x) = \frac{1}{4}i\psi''_{xx}(t, x) - iV(x)\psi(t, x) = iH\psi(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^1, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

при каждом $\psi_0 \in L_2(\mathbb{R})$ имеет единственное в $L_2(\mathbb{R})$ решение, почти всюду удовлетворяющее равенствам

$$\psi(t, x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \sum_{q=0}^m \frac{(-1)^{m-q} (in)^m}{q!(m-q)!} (S(t/n))^q \psi_0 \right) (x),$$

$$\psi(t, x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{q=0}^k \frac{k!(k-in)^{k-q} (in)^q}{q!(k-q)! k^k} (S(t/n))^q \psi_0 \right) (x).$$





Спасибо за внимание!

ivremizov@yandex.ru

Дополнения (на выбор слушателей)

- ▶ Доказательство моей теоремы
- ▶ Управление скоростью сходимости аппроксимаций
- ▶ Теорема Смолянова о повороте черновского касания
- ▶ Решение уравнения диффузии с помощью оператора сдвига