О свойствах относительного порядка для MIMO-систем

Фомичев Василий Владимирович [1]   Роговский Александр Игоревич [2]

[1] д. ф.-м. н., профессор кафедры НДСиПУ, МГУ, ВМК

[2] аспирант кафедры НДСиПУ, МГУ, ВМК

24.05.2016

Понятие относительного порядка для SISO-систем:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $y, u \in \mathbb{R}^m$ – выход и вход, A, B, C – постоянные матрицы. Далее считаем, что система (1) управляема и наблюдаема.
При $m = 1$ r – относительный порядок (ОП), если:

$$CB = 0, CAB = 0, \ldots, CA^{r-2}B = 0, CA^{r-1}B \neq 0.$$

Фактически, условие означает:

$$y = Cx,\ \dot{y} = CAx, \dots, y^{(r-1)} = CA^{r-1}x,\ y^{(r)} = CA^{r}x + CA^{r-1}Bu,$$

т. е. производная выхода порядка r явно зависит от u.
При $m = 1$ в случае управляемой и наблюдаемой системы ОП определен однозначно.

Свойства ОП при $m = 1$

1. Если передаточная функция системы $W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$, то $deg\,\alpha(s) - deg\,\beta(s) = r$.
Далее считаем, что

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \ldots + \alpha_1,$$
$$\beta(s) = \beta_{k+1} s^k + \beta_k s^{k-1} + \ldots + \beta_1.$$

Тогда $CA^{r-1}B = \beta_{k+1}$. Нормируя выход, можно добиться равенства $\beta_{k+1} = CA^{r-1}B = 1$.

2. Систему невырожденным преобразованием можно привести к виду с выделением нулевой динамики:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-r-1} = x_{n-r} \\ \dot{x}_{n-r} = -\sum\limits_{i=1}^{n-r} \beta_i x_i + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r-1} = y_r \\ \dot{y}_r = -\sum\limits_{i=1}^{n-r} \varphi_i x_i - \sum\limits_{j=1}^{r} \psi_j y_j + u, \end{cases}$$

$$y = y_1;$$

φ_i и ψ_j – коэффициенты полиномов
$\varphi(s) = \varphi_{n-r} s^{n-r-1} + \varphi_{n-r-1} s^{n-r-2} + \ldots + \varphi_1$ и $\psi(s) = s^r + \psi_r s^{r-1} + \ldots + \psi_1$,
где

$$\alpha(s) = \psi(s)\beta(s) + \varphi(s).$$

При $m > 1$ понятие векторного относительного порядка может быть дано определением (см., например, [1]):

Определение 1

Вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$ – вектор ОП, если

1. $C_i B = 0, C_i AB = 0, \ldots, C_i A^{r_i - 2} B = 0, C_i A^{r_i - 1} B \neq 0$
2. $H(r) = \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1 - 1} B \\ \vdots \\ C_m A^{r_m - 1} B \end{pmatrix}, \; det\, H(r) \neq 0,$

где C_i – строки матрицы C.

Как и в скалярном случае, при $m > 1$

$$y_i = C_i x,\ \dot{y}_i = C_i A x, \ldots, y_i^{(r_i-1)} = C_i A^{r_i-1} x,\ y_i^{(r_i)} = C_i A^{r_i} x + C A^{r_i-1} B u,$$

где $(C_i A^{r_i-1} B) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ – ненулевая строка, т. е. производная y_i порядка r_i зависит явно от входа $u \in \mathbb{R}^m$. Но этого мало!

Второе условие говорит, что «все $y_i^{(r_i)}$ зависят от всех входов».

Если выполнено определение ОП, то система невырожденным преобразованием координат может быть приведена к виду с выделением нулевой динамики:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y, \\
&\left.\begin{aligned} \dot{y}_1^i &= y_2^i \\ &\vdots \\ \dot{y}_{r_i-1}^i &= y_{r_i}^i \end{aligned}\right. \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad \begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = A_{21}x' + A_{22}\bar{y} + H(r)u, \qquad (2) \\
&y_i = y_1^i, \quad i = 1, \ldots, m,
\end{aligned}$$

где $\bar{y} = (y_1^1, \ldots, y_{r_m}^m)$. При этом

$$det\,(sI - A_{11}) = \beta(s) = det \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$deg\,\beta(s) = n - |r|, \text{ где } |r| = r_1 + \ldots + r_m.$$

Условия определения ОП могут быть несовместны.
Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_1 B = (1,0) \Rightarrow r_1 = 1 \\ C_2 B = (1,0) \Rightarrow r_2 = 1 \end{array} \;; \text{ но! } H(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; det\, H(1,1) = 0$$

Инвариантность условий ОП

Условия определения ОП инвариантны к невырожденной замене координат: если $\tilde{x} = Tx$, то $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$, а значит
$\tilde{C}_i \tilde{A}^k \tilde{B} = (C_i T^{-1})(TAT^{-1})^k TB = C_i A^k B$
Но они не инвариантны к невырожденной замене выходов!

Вернемся к примеру

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{array}$$

Преобразуем выходы: $\tilde{y}_1 = y_1$; $\tilde{y}_2 = y_2 - y_1$.
Для новых выходов $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 \ \Rightarrow$

$$C_1B = (1,0) \ \Rightarrow r_1 = 1$$
$$C_2B = (0,0),\ C_2AB = (0,1) \ \Rightarrow r_2 = 2.$$
$$H(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ det\, H(1,2) \neq 0.$$ Определение выполнено!

Основной вопрос

Вопрос: всегда ли существует преобразование выходов
$\hat{y} = Ty, \;\; T \in \mathbb{R}^{m\times m}, \;\; det\,T \neq 0$, такое, что для тройки $\{A, B, \tilde{C} = TC\}$
определен ОП?
Ответ отрицательный.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При любой матрице $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}.$$

Относительный порядок:

$$C_1B = (0, c_{13}),\ \ C_2B = (0, c_{23}).$$

Либо $c_{13} \neq 0 \ \Rightarrow\ r_1 = 1$, либо $c_{23} \neq 0 \ \Rightarrow\ r_2 = 1$ (иначе $rank\ C < 2$). Если $r_1 = r_2 = 1 \ \Rightarrow\ H(r) = \begin{pmatrix} 0 & c_{13} \\ 0 & c_{23} \end{pmatrix}$– вырождена.

Пусть $c_{13} \neq 0, c_{23} = 0 \ \Rightarrow\ C_2B = (0, 0),\ \ C_2AB = (0, c_{24})$. Если $c_{23} = 0, c_{24} = 0 \ \Rightarrow\ rank\ C < 2$, поэтому $c_{24} \neq 0$. Тогда $r_1 = 1,\ \ r_2 = 2,\ \ H(r) = \begin{pmatrix} 0 & c_{13} \\ 0 & c_{24} \end{pmatrix}$ – вырождена $\Rightarrow$ <u>не существует T!</u>

Пример

Рассмотрим для указанной системы определитель матрицы Розенброка:

$$
\det R(s) = \det \left(\begin{array}{c|c} sI - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array} \right) =
$$

$$
\det \left(\begin{array}{cccc|cc} s & -a_{12} & 0 & -a_{14} & -1 & 0 \\ -1 & s - a_{22} & 0 & -a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & s & -a_{34} & 0 & -1 \\ 0 & -a_{42} & -1 & s - a_{44} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) =
$$

$$
= -\det \begin{pmatrix} -1 & s - a_{22} \\ 0 & -a_{42} \end{pmatrix} = -a_{42}.
$$

Возможно два случая: $a_{42} = 0$ и $a_{42} \neq 0$. Какова нулевая динамика в этих случаях?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12}x_2 + a_{14}x_4 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_4 \\ \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + a_{34}x_4 + u_2 \\ \dot{x}_4 = a_{42}x_2 + x_3 + a_{44}x_4 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y_1 = x_3 \\ y_2 = x_4 \end{array}$$

Пусть $a_{42} \neq 0$. Нулевая динамика: $y_1 = x_3 \equiv 0$, $y_2 = x_4 \equiv 0 \Rightarrow$ из последнего уравнения $x_2 \equiv 0$; из второго уравнения $x_1 \equiv 0$. То есть при $y \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0$ (и $u \equiv 0$). Размерность нулевой динамики равна нулю, $deg\,\beta(s) = 0$, где $\beta(s) = det\,R(s)$.

Но если $a_{42} = 0$, то $\beta(s) \equiv 0$!
«Характеристический полином» нулевой динамики нулевой, его степень «не определена»! Найдем уравнения нулевой динамики явно.
$y_1 = x_3 \equiv 0, \;\; y_2 = x_4 \equiv 0$. Последнее верно при любом x_2! Из третьего уравнения при $a_{32} \neq 0 \;\; \Rightarrow$

$$x_2 = -\frac{u_2}{a_{32}} \;\; \Rightarrow \;\; \text{из первого уравнения}$$
$$\dot{x}_1 = u_1 - \frac{a_{12}}{a_{32}} u_2.$$

Нулевая динамика зависит от управления! При $a_{32} = 0$ третье уравнение выполнено при $u_2 \equiv 0$. Нулевая динамика:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12} x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

Задача: когда существует преобразование выходов $\tilde{y} = Ty$, приводящее систему к форме с ОП? Как найти такое преобразование?
Предложено следующее обобщение ОП.

Определение 2

Вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$ – неполный ОП (НОП), если:

1. $C_i B = 0, \ldots, \; C_i A^{r_i - 2} B = 0, \; C_i A^{r_i - 1} B \neq 0, \; i = 1, \ldots, m$
2. $r_i \leqslant r_{i+1}$

Второго можно добиться перенумерацией выходов.

Строка r разбивается на «секции» из одинаковых элементов:

$$r = (r_1^1, r_2^1, \ldots, r_{m_1}^1, r_1^2, r_2^2, \ldots, r_{m_2}^2, \ldots, r_1^k, \ldots, r_{m_k}^k)$$

где $r_i^p = r_j^p, \;\; i, j \in \{1, 2, \ldots, m_p\}$,
$r_i^p < r_j^q$ при $p < q$,
$m_1 + m_2 + \ldots, +m_k = m$.
Каждому r_i^p соответствует элемент r_j:
$r = (r_1, \ldots, r_m)$ – вектор НОП.
r_j соответствует строка из $H(r)$: $H_i^p = C_j A^{r_j - 1} B$.

Определение 3

Вектор НОП – вектор главного НОП (ГНОП), если $\forall p = 1, \ldots, k$ строки $H_j^p, \;\; j = 1, \ldots, m_p$ линейно независимы.

Матрица $H(r)$ имеет вид:

$$H^T(r) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} {H_1^1}^T & \ldots & {H_{m_1}^1}^T & {H_1^2}^T & \ldots & {H_{m_2}^2}^T & \ldots & {H_1^k}^T & \ldots & {H_{m_k}^k}^T \end{array} \right)$$

По определению у нее линейно независимые строки в каждой секции, но не все строки сразу (как в определении ОП).

Утверждение 1

Любая система общего положения невырожденными преобразованиями выходов за конечное число шагов приводится к виду с ГНОП.

Теорема 1 [5]

Для системы общего положения ГНОП определен однозначно. Система общего положения приводится к виду с ГНОП тогда и только тогда, когда ГНОП является ОП.

В работе [3] рассмотрен симметричный аналог относительного порядка.

Определение 4

Вектор $r \in \mathbb{N}^m$ называется вектором столбцового относительного порядка, если

- $CB_i = 0, \ CAB_i = 0, \ldots, CA^{r_i-2}B_i = 0, CA^{r_i-1}B_i \neq 0;$
- $det \, H(r) = det \begin{pmatrix} CA^{r_1-1}B_1 & \ldots & CA^{r_m-1}B_m \end{pmatrix} \neq 0,$

где B_i – столбцы матрицы B.

Первое условие говорит о том, сколько раз надо продифференцировать выходной вектор $y(t)$, чтобы появилась явная зависимость производной от $u_i(t)$. Смысл второго условия аналогичен определению ОП Исидори. Системы, имеющие столбцовый относительный порядок также могут быть приведены к виду с выделением нулевой динамики.

Если у системы $\{A, B, C\}$ существует вектор столбцового относительного порядка, то с помощью невырожденного преобразования фазовых координат $z = Mx$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}, |M| \neq 0$ она может быть приведена к виду, аналогичному (2). Для $n = 7, r = (2, 3)$ матрицы системы будут иметь вид

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 0 & * & 0 & 0 & * & * & * \\ 1 & * & 0 & 0 & * & * & * \\ \hline 0 & * & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & * & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & * & 0 & 1 & * & * & * \\ \hline 0 & * & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & * & 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 0 & h_{11} & 0 & 0 & h_{12} & 0 & 0 \\ \hline 0 & h_{21} & 0 & 0 & h_{22} & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Заметим, что портреты матриц A, B, C совпадают с портретами соответствующих транспонированных матриц A^T, C^T, B^T из (2). Матрицу, расположенную в последних $|r| + 1, |r| + 2, \ldots, n$ строках и столбцах матрицы A, будем далее обозначать $\bar{A}$.

В работе [3] также показано, что если у системы существует столбцовый относительный порядок, уравнения нулевой динамики имеют вид

$$\begin{cases} \check{x}(t) \equiv 0, \\ \dot{\hat{x}}(t) = \bar{A}\hat{x}(t), \end{cases}$$

где $x^T(t) = (\check{x}(t)^T, \hat{x}(t)^T)$, $\check{x}(t) \in \mathbb{R}^{|r|}$. При этом характеристический полином нулевой динамики $\beta(s)$ совпадает с характеристическим полиномом матрицы $\bar{A}$:

$$\beta(s) = \chi_{\bar{A}}(s).$$

Таким образом, в случае, когда у системы существует вектор столбцового относительного порядка, она также может быть приведена к виду с выделением нулевой динамики.

Столбцовый ГНОП

Аналогично определению 2, можно рассмотреть понятие неполного столбцового относительного порядка.

Определение 5

Пусть для вектора r выполнено первое требование определения 4, т. е.

$$CB_i = 0,\ \ CAB_i = 0, \ldots, CA^{r_i-2}B,\ \ CA^{r_i-1}B_i \neq 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

а компоненты этого вектора упорядочены по неубыванию. Тогда вектор r назовем столбцовым НОП.

Добиться упорядоченности вектора НОП можно с помощью перенумерации входов. Аналогично вводится определение столбцового ГНОП.

Определение 6

Пусть r – вектор столбцового НОП системы $\{A, B, C\}$, и для любых индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leqslant m$, $i_j \in \mathbb{N}$, таких что $r_{i_1} = r_{i_2} = \ldots = r_{i_q}$ столбцы $H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_q}$ линейно независимы.

Столбцовый ГНОП

Для столбцового ГНОП справедливы аналогичные утверждения. Любая система общего положения может быть приведена к виду со столбцовым ГНОП с помощью невырожденных преобразований входов.

Лемма 1

Пусть система $\{A, B, C\}$ такова, что при любой матрице T система $\{A, \tilde{B} = B \cdot T, C\}$ имеет вектор столбцвого НОП. Тогда существует невырожденная матрица $\bar{T}$, такая что система $\{A, \hat{B} = B \cdot \bar{T}, C\}$ имеет вектор ГНОП.

При этом если столбцовый ГНОП не является столбцовым ОП, систему нельзя привести к виду со столбцовым ОП с помощью невырожденных преобразований входов.

Теорема 2

Пусть система $\{A, B, C\}$ такова, что при любой матрице T система $\{A, \tilde{B} = B \cdot T, C\}$ имеет вектор столбцвого НОП. Тогда система $\{A, B, C\}$ приводится к виду со столбцовым ОП тогда и только тогда, когда ее вектор ГНОП r является вектором ОП.

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_3 + x_4 + 2u_1 + u_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 + u_1 + u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ \dot{x}_4 = x_3 + x_4 + u_1 + u_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y_1 = x_3 + x_4 \\ y_2 = x_3 - x_4 \end{matrix}$$

Матрицы A, B, C системы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверим условия столбцового относительного порядка:

$$CB_1 = (1, -1)^T$$
$$CB_2 = (1, -1)^T.$$

Таким образом, условия столбцового относительного порядка не выполняются.

Пример

Покажем, что невырожденное преобразование входов $\tilde{u} = T^{-1}u$ с матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводит систему к виду со столбцовым ОП. Преобразованная матрица $\tilde{B} = BT$ имеет вид:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для преобразованной системы условия столбцового относительного порядка выполняются:

$$\begin{aligned} &C\tilde{B}_1 = (1, -1)^T \\ &C\tilde{B}_2 = 0 \qquad CA\tilde{B}_2 = 0 \quad CA^2\tilde{B}_2 = (-1, -1)^T. \end{aligned}$$

Проверим условия относительного порядка для данной системы:

$$C_1\tilde{B} = (1,0),\;\; C_2\tilde{B} = (-1,0),$$

т. е. $r = (1,1)$ – вектор НОП системы $\{A, \tilde{B}, C\}$, условия относительного порядка не выполнены. Рассмотрим линейное преобразование выходов $\tilde{y} = T_1 y$, где

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\begin{aligned}
&\tilde{C} = T_1 C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\\
&\tilde{C}_1\tilde{B} = (1,0)\\
&\tilde{C}_2\tilde{B} = 0 \qquad \tilde{C}_2A\tilde{B} = (-2,0).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{r} = (1,2)$ – вектор ГНОП системы $\{A, \tilde{B}, \tilde{C}\}$. При этом условия ОП не выполняются, т. е. привести систему к виду с ОП с помощью преобразований выходов нельзя.

Пример

Возникает вопрос, существуют ли системы, которые не могут быть приведены ни к виду с ОП, ни к виду со столбцовым ОП. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \frac{1}{2}u_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 + u_1 \\ \dot{x}_4 = 2u_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_2 = x_2 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим условия относительного порядка и столбцового относительного порядка:

$$\begin{array}{ll|ll} C_1B = (1,0) & & CB_1 = (1,0)^T & \\ C_2B = 0 & C_2AB = (1,0) & CB_2 = 0 & CAB_2 = (1,0)^T \end{array}$$

т. е. $r = (1,2)$ – вектро ГНОП, не являющийся вектором ОП, следовательно, привести систему к виду с ОП нельзя. Это верно и для столбцового ОП.

Найдем характеристический полином нулевой динамики:

$$\beta(s) = \left|\begin{array}{c|c} sI - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc|cc} s & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| =$$

$$= 2\left|\begin{array}{ccc|c} s & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & -1 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right| = -2\left|\begin{array}{cc|c} s & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right| = 1$$

Таким образом, для данной системы из того, что $y(t) \equiv 0$ следует $x(t) \equiv 0$ и $u(t) \equiv 0$.

Для приведения таких систем к виду с относительным порядком можно использовать преобразования из более широкого класса. Выясним, как меняются матрицы системы при дифференцировании второго выхода:

$$\dot{y}_2 = C_2\dot{x} = C_2Ax + C_2Bu = C_2Ax = (0,0,1,0)x.$$

Таким образом, выходы систем $\{A, B, C\}$ и $\{A, B, \tilde{C}\}$, где

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

связаны соотношением: $\tilde{y} = (y_1, \dot{y}_2)^T$. Проверим условия относительного порядка для системы $\{A, B, \tilde{C}\}$:

$$\tilde{C}_1B = (1,0), \quad \tilde{C}_2B = (1,0)$$

т. е. $r = (1,1)$ – вектор НОП. Положив $\hat{y}_1 = \tilde{y}_1$, $\hat{y}_2 = \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1$, получим:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} \hat{C}_1B = (1,0) & \\ \hat{C}_2B = 0 & \hat{C}_2AB = (0,1), \end{matrix}$$

т. е. $\tilde{r} = (1,2)$ – вектор относительного порядка.

Приведение к виду с относительным порядком с помощью таких преобразований возможно для любой системы, для которой $\beta(s) \not\equiv 0$. Пусть $r \in \mathbb{N}^m$. Обозначим через $V(r)$ следующее преобразование:

$$V(r)y(t) = \begin{pmatrix} \frac{d^{r_1-1}}{dt^{r_1-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{d^{r_2-1}}{dt^{r_2-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{d^{r_m-1}}{dt^{r_m-1}} \end{pmatrix} y(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(r_1-1)}(t) \\ y_2^{(r_2-1)}(t) \\ \vdots \\ y_m^{(r_m-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Теорема 3

Пусть для системы $\{A, B, C\}$ $\beta(s) \not\equiv 0$. Тогда существуют $r_1, \dots, r_q \in \mathbb{N}^m$ и $T_1, \dots, T_q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $|T_i| \neq 0$, такие, что система $\{A, B, \hat{C}\}$ имеет относительный порядок, а для ее выхода $\hat{y}$ справедливо:

$$\hat{y}(t) = \prod_{j=1}^{q} V(r_q)T_q y(t). \tag{3}$$

При применении к выходу системы преобразований вида (3) меняется нулевая динамика системы. Вернемся к примеру:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \frac{1}{2}u_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 + u_1 \\ \dot{x}_4 = 2u_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_2 = x_2 \end{array}$$

Выход преобразованной системы равен:

$$\begin{array}{l} \hat{y}_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ \hat{y}_2 = -x_1 + \frac{1}{2}x_3 \end{array}$$

Из того, что $\hat{y}(t) \equiv 0$, следует, что $x_1(t) = x_3(t) \equiv 0$. Из второго уравнения получим $x_2 = K = const$. Из 1-го и 3-го уравнения следует, что $x_4 = 2x_2 = 2K = const$. Таким образом, любое решение вида $x(t) = (0, K, 0, 2K)^T$ принадлежит нулевой динамике, ее размерность равна единице. Заметим, что исходная система имела нулевую динамику размерности 0.

В общем случае нулевая динамика при преобразовании (3) меняется следующим образом.

Лемма 2

Пусть для системы $\{A, B, C\}$ $\beta(s) \not\equiv 0$, а r – вектор НОП. Тогда выход $\hat{y}$ системы $\{A, B, \hat{C}\}$, где

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1 - 1} \\ \vdots \\ C_m A^{r_m - 1} \end{pmatrix},$$

связан с выходом исходной системы соотношением:

$$\hat{y} = V(r) y;$$

при этом для характеристических полиномов нулевой динамики справедливо

$$\hat{\beta}(s) = s^{|r| - m} \beta(s).$$

Выясним, возможно ли оценить размерность нулевой динамики, используя вектор ГНОП.

Утверждение 2.

Пусть для системы (1) $\beta(s) \not\equiv 0$. Вектор ГНОП r является относительным порядком системы тогда и только тогда, когда $deg\,\beta(s) = n - |r|$.

Утверждение 3.

Пусть для системы (1) $\beta(s) \not\equiv 0$. Если r – вектор НОП системы (1), то $deg\,\beta(s) \leqslant n - |r|$.

Из утверждений 2,3 можно получить оценку размерности нулевой динамики через вектор ГНОП.

Теорема 4.

Пусть для системы (1) $\beta(s) \not\equiv 0$. Если r – вектор ГНОП системы, не являющийся вектором ОП, то $deg\,\beta(s) < n - |r|$.

Класс систем, приводимых к виду с ОП.

Полученные результаты позволяют описать один класс систем, приводимых к виду с относительным порядком с помощью невырожденных преобразований выходов.

Утверждение 4.

Пусть для системы (1) $\beta(s) \not\equiv 0$, и справедливо неравенство $deg\ \beta(s) \geqslant n - m - 1$. Тогда существует невырожденная матрица $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$, такая, что для системы $\{A, B, \tilde{C} = TC\}$ выполнены условия ОП.

В частности, приводимыми являются системы, у которых размерность входа на единицу меньше размерности фазового вектора.

Следствие

Пусть для системы (1) $\beta(s) \not\equiv 0$, и $m = n - 1$. Тогда существует невырожденная матрица $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$, такая, что для системы $\{A, B, \tilde{C} = TC\}$ выполнены условия ОП.

Этот результат является обобщением результата из [4].

Покажем, что в случае, когда $\beta(s) \equiv 0$ размерность нулевой динамики также можно оценить, и привести систему к специальному виду с помощью преобразования координат. Рассмотрим еще одно, наиболее слабое, обобщение понятия относительного порядка.

Определение 7

Вектор $\rho \in (\mathbb{N} \cup 0)^m$ назовем вектором вырожденного относительного порядка (ВОП), если

$$\rho_i = \begin{cases} 0, & \text{если } C_i A^{q-1} B = 0 \ \forall q \in \mathbb{N} \\ p, & \text{если } C_i A^{p-1} B \neq 0, \text{ и } C_i A^{q-1} B = 0 \ \forall q < p. \end{cases}$$

Ясно, что вектор ВОП существует для любой системы $\{A, B, C\}$.

Пусть ρ – вектор ВОП системы $\{A, B, C\}$. Вместе с вектором ВОП, аналогично определению 1, рассмотрим матрицу

$$\mathcal{H}(\rho) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{H}_m \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{H}_i = C_i A^{\rho_i - 1} B$ если $\rho_i \neq 0$, и $\mathcal{H}_i = 0$ если $\rho_i = 0$. Пусть ранг матрицы $\mathcal{H}$ равен $d > 0$. Обозначим $\mathbb{I} = \{1, 2, \ldots, m\}$ и рассмотрим функционал, определенный на множестве $\mathbb{I}^d$:

$$\sigma(i_1, \ldots, i_d) = \sum_{j=1}^{d} \rho_{i_j}$$

Из всех наборов d линейно независимых строк матрицы $\mathcal{H}$ выберем тот, для которого значение функционала σ максимально:

$$(\bar{i}_1, \ldots, \bar{i}_d) : \max_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_d: \\ \mathcal{H}_{j_1}, \ldots, \mathcal{H}_{j_d} \text{ лин. нез.}}} \sigma(j_1, \ldots, j_d) = \sigma(\bar{i}_1, \ldots, \bar{i}_d) = \sigma_0.$$

Перенумеровав выходы, можно добиться равенства $(\bar{i}_1, \ldots, \bar{i}_d) = (1, \ldots, d)$

Каноническая форма

Система $\{A, B, C\}$, имеющая ненулевой вектор ВОП, может быть приведена с помощью невырожденных преобразований входов, выходов и фазовых координат к следующему виду:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_1^i = x_2^i \\ \vdots \\ \dot{x}_{\rho_i-1}^i = x_{\rho_i}^i \\ \dot{x}_{\rho_i}^i = \sum\limits_{j=1}^{d} A^{ij} x^j + A^i x^0 + \check{u}_i \end{cases} & i = 1, \ldots, d, \\ \dot{x}^0 = \sum\limits_{j=1}^{d} \bar{A}^j x^j + \bar{A} x^0 + \bar{B} \hat{u} \end{cases} \tag{4}$$

$$\check{y}_i = x_1^i, \, i = 1, \ldots, d$$
$$\hat{y} = \sum_{j=1}^{d} C^j x^j + \bar{C} x^0,$$

где

$$x^T = ({x^1}^T, \ldots, {x^d}^T, {x^0}^T), \; x^i \in \mathbb{R}^{\rho_i}, \; x^0 \in \mathbb{R}^{n-\sigma_0},$$
$$u^T = (\check{u}^T, \hat{u}^T), \; \check{u} \in \mathbb{R}^d, \; y^T = (\check{y}^T, \hat{y}^T), \; \check{y} \in \mathbb{R}^d.$$

Из (4) следует, что при $\check{y}(t) \equiv 0$ и $x^i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, d$. Таким образом, нулевая динамика системы $\{A, B, C\}$ вида (4) совпадает с нулевой динамикой системы $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$. Отсюда следует, что размерность нулевой динамики исходной системы не превосходит $n - \sigma_0$.

Рассмотрим систему $\{A, B, C\}$ со следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\beta(s)$:

$$\beta(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 & -s & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример

Найдем вектор вырожденного ОП:

$$C_1B = 0 \qquad C_1AB = (1, 0)$$
$$C_2B = (1, 0).$$

То есть $\rho = (2, 1)$ (в данном случае вектор ВОП совпадает с ГНОП). Матрица $\mathcal{H}$ имеет вид:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ее ранг равен единице, т. е. $d = 1$. При этом

$$\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 1,$$

т. е. $\sigma_0 = 2$. Таким образом, размерность нулевой динамики не превосходит $4 - 2 = 2$.

Рассмотрим преобразование координат $z = Mx$, где

$$M = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь V_1, V_2 принадлежат ядру матрицы $B^* = (B_1, \dots, B_d) = B_1$. Матрицы системы при таком преобразовании изменятся следующим образом:

$$\tilde{A} = MAM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = MB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом $x^1 = (x_1, x_2)^T$, $x^0 = (x_3, x_4)^T$, $\check{u} = u_1$, $\hat{u} = u_2$, $\check{y} = y_1$, $\hat{y} = y_2$.

Пример

Уравнения преобразованной системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3 + u_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 + u_2 \\ \dot{x}_4 = x_1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 + x_4 \end{aligned}$$

Из того, что $y_1 \equiv 0$, следует $x^1 = (x_1, x_2)^T \equiv 0$. Из того, что $y_2 \equiv 0$, следует, что $x_4 \equiv 0$. Таким образом, уравнение нулевой динамики имеет вид:

$$\dot{x}_3 = u_2.$$

Ее размерность равна единице, что соответствует оценке.

- Isidori A. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995.
- Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. Методы робастного обращения динамических систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
- Краев А. В. Об аналоге относительного порядка для линейных динамических MIMO-систем // Доклады Академии наук. 2014. Т. 454. № 2. С. 152-157.
- Краев А. В. О приведении векторной линейной системы третьего порядка к форме с относительным порядком по Исидори Дифференциальные уравнения. Т. 48. № 11. С. 1558-1560.
- Краев А. В., Фомичев В. В., Роговский А. И. К обобщению относительного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1128-1132.
- Краев А. В., Фомичев В. В., Роговский А. И. О приведении векторной системы к виду с относительным порядком. // Вестник Московского ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн. 2015. № 3. С.20-26.

Спасибо за внимание!