Эффективные алгоритмы для некоторых актуальных обобщений задачи коммивояжера

М.Ю. Хачай[1]

[1]Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

14 июня 2016

Вступление

- Большинство известных задач комбинаторной оптимизации в общей постановке NP-трудны и слабо аппроксимируемы
- Нередкой является ситуация, при которой для важных с точки зрения приложений частных постановок труднорешаемых задач удается построить эффективные точные и (или) приближенные алгоритмы
- Проблема систематического описания множества таких задач и семейства их эффективно разрешимых подклассов представляется актуальной как с точки зрения приложений, так и в плане развития самой теории вычислительной сложности
- В этом сообщении мы остановимся на двух подобных задачах, являющихся обобщениями известной задачи коммивояжера

Вступление

- Большинство известных задач комбинаторной оптимизации в общей постановке NP-трудны и слабо аппроксимируемы
- Нередкой является ситуация, при которой для важных с точки зрения приложений частных постановок труднорешаемых задач удается построить эффективные точные и (или) приближенные алгоритмы
- Проблема систематического описания множества таких задач и семейства их эффективно разрешимых подклассов представляется актуальной как с точки зрения приложений, так и в плане развития самой теории вычислительной сложности
- В этом сообщении мы остановимся на двух подобных задачах, являющихся обобщениями известной задачи коммивояжера

Вступление

- Большинство известных задач комбинаторной оптимизации в общей постановке NP-трудны и слабо аппроксимируемы
- Нередкой является ситуация, при которой для важных с точки зрения приложений частных постановок труднорешаемых задач удается построить эффективные точные и (или) приближенные алгоритмы
- Проблема систематического описания множества таких задач и семейства их эффективно разрешимых подклассов представляется актуальной как с точки зрения приложений, так и в плане развития самой теории вычислительной сложности
- В этом сообщении мы остановимся на двух подобных задачах, являющихся обобщениями известной задачи коммивояжера

Вступление

- Большинство известных задач комбинаторной оптимизации в общей постановке NP-трудны и слабо аппроксимируемы
- Нередкой является ситуация, при которой для важных с точки зрения приложений частных постановок труднорешаемых задач удается построить эффективные точные и (или) приближенные алгоритмы
- Проблема систематического описания множества таких задач и семейства их эффективно разрешимых подклассов представляется актуальной как с точки зрения приложений, так и в плане развития самой теории вычислительной сложности
- В этом сообщении мы остановимся на двух подобных задачах, являющихся обобщениями известной задачи коммивояжера

Задача коммивояжера (TSP)

Постановка

В заданном полном взвешенном графе $G = (V, E, w)$ найти гамильтонов цикл экстремального (как правило, наименьшего) веса

- Первые упоминания о TSP встречаются в работах XIX в. (У.Гамильтон, С.Ллойд)
- По-видимому, впервые задача была поставлена Карлом Менгером (1930) и позднее Г.Данцигом и Дж.Рамсером (1959).

Задача коммивояжера (TSP)

Постановка

В заданном полном взвешенном графе $G = (V, E, w)$ найти гамильтонов цикл экстремального (как правило, наименьшего) веса

- Первые упоминания о TSP встречаются в работах XIX в. (У.Гамильтон, С.Ллойд)
- По-видимому, впервые задача была поставлена Карлом Менгером (1930) и позднее Г.Данцигом и Дж.Рамсером (1959).
    - трудоемкость полного перебора $\Theta(n!)$
    - трудоемкость метода динамического программирования $\Theta(n^2 2^n)$

«Проклятие размерности»

- Пусть для решения задачи коммивояжера применяется метод динамического программирования
- Допустим, имеющийся у нас суперкомпьютер способен решить задачу для $n = 100$ за 1 сек
- Легко видеть, что
  - для решения задачи при $n = 125$ потребуется более года
  - а при $n = 136$ — более 2016 лет

«Проклятие размерности»

- Пусть для решения задачи коммивояжера применяется метод динамического программирования
- Допустим, имеющийся у нас суперкомпьютер способен решить задачу для $n = 100$ за 1 сек
- Легко видеть, что
  - для решения задачи при $n = 125$ потребуется более года
  - а при $n = 136$ — более 2016 лет

«Проклятие размерности»

- Пусть для решения задачи коммивояжера применяется метод динамического программирования
- Допустим, имеющийся у нас суперкомпьютер способен решить задачу для $n = 100$ за 1 сек
- Легко видеть, что
  - для решения задачи при $n = 125$ потребуется более года
  - а при $n = 136$ — более 2016 лет

«Проклятие размерности»

- Пусть для решения задачи коммивояжера применяется метод динамического программирования
- Допустим, имеющийся у нас суперкомпьютер способен решить задачу для $n = 100$ за 1 сек
- Легко видеть, что
  - для решения задачи при $n = 125$ потребуется более года
  - а при $n = 136$ — более 2016 лет

Вычислительная сложность и аппроксимируемость

- Сложность
  - (Р.Карп, 1972) TSP NP-трудна в сильном смысле
  - (К.Пападимитриу, 1977) Метрическая и евклидова постановки TSP также NP-трудны

Вычислительная сложность и аппроксимируемость

- Сложность
  - (Р.Карп, 1972) TSP NP-трудна в сильном смысле
  - (К.Пападимитриу, 1977) Метрическая и евклидова постановки TSP также NP-трудны
- Аппроксимируемость
  - (С.Сани и Т.Гонзалес, 1976) в общей постановке TSP полиномиально не аппроксимируема с точностью $O(2^n)$ (если $P \neq NP$)
  - (Н.Кристофидес, 1976) Метрическая задача TSP аппроксимируема с точностью $3/2$
  - (С.Арора, Дж.Митчелл, 1996) Полиномиальные приближенные схемы (PTAS) для Евклидовой TSP на плоскости
  - (С.Арора, 1998) Евклидова TSP при произвольной размерности d обладает PTAS
  - (Сердюков, 1987; Гимади, 2001) Асимптотически точные алгоритмы для Евклидовой задачи TSP на максимум

Содержание

Цикловое покрытие графа

- Для фиксированного k в графе $G = (V, E, w)$ требуется найти 2-регулярный остовный подграф минимального веса, состоящий из k компонент связности.
- Minimum Weight k-Size Cycle Cover Problem (Min-k-SCCP).
- Близкие задачи
  - Min-1-SCCP — задача коммивояжера (TSP)
  - VRP
  - k-Peripatetic Salesmen Problem
  - **Vertex-Disjoint Cycle Cover Problem**
  - Min-L-CCP

Цикловое покрытие графа

- Для фиксированного k в графе $G = (V, E, w)$ требуется найти 2-регулярный остовный подграф минимального веса, состоящий из k компонент связности.
- Minimum Weight k-Size Cycle Cover Problem (Min-k-SCCP).
- Близкие задачи
  - Min-1-SCCP — задача коммивояжера (TSP)
  - VRP
  - k-Peripatetic Salesmen Problem
  - **Vertex-Disjoint Cycle Cover Problem**
  - Min-L-CCP

Цикловое покрытие графа

- Для фиксированного k в графе $G = (V, E, w)$ требуется найти 2-регулярный остовный подграф минимального веса, состоящий из k компонент связности.
- Minimum Weight k-Size Cycle Cover Problem (Min-k-SCCP).
- Близкие задачи
  - Min-1-SCCP — задача коммивояжера (TSP)
  - VRP
  - k-Peripatetic Salesmen Problem
  - **Vertex-Disjoint Cycle Cover Problem**
  - Min-L-CCP

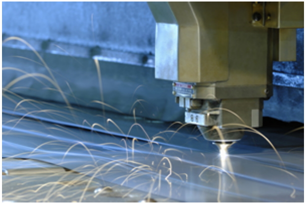
Мотивация

- Задача об оптимальном демонтаже отработанных энергоблоков АЭС

Мотивация

- Задача об оптимальном демонтаже отработанных энергоблоков АЭС


- Задача высокоточной резки металла



Результаты

1. Задача Min-k-SCCP — NP-трудна и неаппроксимируема в общем случае
2. Сохраняет труднорешаемость в метрической и евклидовой постановках
3. Для метрического случая разработан приближенный алгоритм с неулучшаемой оценкой точности 2
4. Для произвольного k и фиксированной размерности $d > 1$, разработаны полиномиальные приближенные схемы (PTAS) для задачи Min-k-SCCP в $\mathbb{R}^d$

Результаты

1. Задача Min-k-SCCP — NP-трудна и неаппроксимируема в общем случае
2. Сохраняет труднорешаемость в метрической и евклидовой постановках
3. Для метрического случая разработан приближенный алгоритм с неулучшаемой оценкой точности 2
4. Для произвольного k и фиксированной размерности $d > 1$, разработаны полиномиальные приближенные схемы (PTAS) для задачи Min-k-SCCP в $\mathbb{R}^d$ (кластеризация)

Постановка

Input: граф $G = (V, E, w)$.

Find: набор $\mathcal{C} = C_1, \ldots, C_k$ вершинно-непересекающихся циклов таких, что $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}_k} V(C_i) = V$.

Постановка

Input: граф $G = (V, E, w)$.

Find: набор $\mathcal{C} = C_1, ..., C_k$ вершинно-непересекающихся циклов таких, что $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}_k} V(C_i) = V$.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{k} W(C_i) \equiv \sum_{i=1}^{k} \sum_{e \in E(C_i)} w(e) \\
s.t. \quad & \\
& C_1, \ldots, C_k \text{ циклы в графе } G \\
& C_i \cap C_j = \varnothing \\
& V(C_1) \cup \ldots \cup V(C_k) = V
\end{aligned}
$$

Метрическая и евклидова постановки

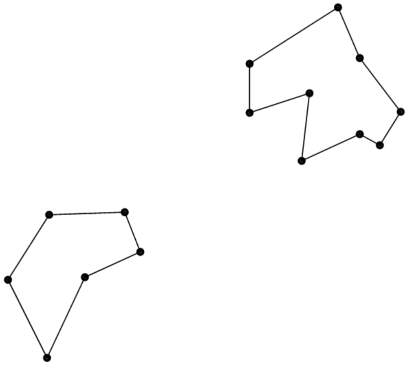
Metric Min-k-SCCP

- $w_{ij} \geqslant 0$
- $w_{ii} = 0$
- $w_{ij} = w_{ji}$
- $w_{ij} + w_{jk} \geqslant w_{ik} \quad (\{i, j, k\})$

Euclidean Min-k-SCCP

- Для $d > 1$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^d$
- $w_{ij} = \|v_i - v_j\|_2$

Пример: Euclidean Min-2-SCCP на плоскости



Трудноразрешаемость

Теорема 1

Для произвольного $k \geqslant 1$ задача Min-k-SCCP NP-трудна в сильном смысле.

Труднорешаемость

Теорема 1

Для произвольного $k \geqslant 1$ задача Min-k-SCCP NP-трудна в сильном смысле.

Идея доказательства - сведение по Карпу задачи TSP

- Клонируем условия сводимой задачи
- Размещаем копии задачи TSP на большом расстоянии друг от друга
- Показываем, что оптимальное решение полученной задачи Min-k-SCCP состоит в точности из оптимальных решений копий условия TSP

Труднорешаемость

Теорема 1

Для произвольного $k \geqslant 1$ задача Min-k-SCCP NP-трудна в сильном смысле.

Идея доказательства - сведение по Карпу задачи TSP

- Клонируем условия сводимой задачи
- Размещаем копии задачи TSP на большом расстоянии друг от друга
- Показываем, что оптимальное решение полученной задачи Min-k-SCCP состоит в точности из оптимальных решений копий условия TSP

Следствие

- Как и TSP, Min-k-SCCP не аппроксимируема с произвольной точностью $O(2^n)$ (если $P \neq NP$)
- Задачи Metric Min-k-SCCP и Euclidean Min-k-SCCP также NP-трудны

Содержание

1. Задача о цикловом покрытии графа (Min-k-SCCP)
   - Общий случай
   - Metric Min-k-SCCP
   - PTAS для Euclidean Min-k-SCCP
2. Задача об оптимальной маршрутизации транспорта (VRP)
   - Постановка и известные результаты
   - EPTAS для Euclidean CVRP
3. Заключение

2-приближенный алгоритм

Обобщает схему известного 2-приближ. алгоритма для Metric TSP.
Б.о.о. полагаем, что $k < n$.
Алгоритм:

1. Построить минимальный остовный лес F из k деревьев
2. Удвоение ребер леса F
3. Для произвольной нетривиальной компоненты связности найти эйлеров цикл
4. Преобразовать все найденные циклы в гамильтоновы
5. Выдать полученные циклы, дополнив их необходимым числом изолированных вершин

Корректность алгоритма

Утверждение

Точность построенного алгоритма удовлетворяет соотношению

$$2(1 - 2/n) \leqslant \max_I \frac{\mathrm{APP}_I}{\mathrm{OPT}_I} \leqslant 2(1 - 1/n)$$

Временная сложность — $O(n^2 \log n)$.

Содержание

Декомпозиция задачи

Для произвольной постановки задачи справделива одна из альтернатив

1. Задача допускает декомпозицию на несколько независимых подзадач Min-k_i-SCCP с $k_i < k$;
2. Расстояние между вершинами графа оценивается сверху $C \cdot \mathrm{OPT}_I$.

Неравенство Юнга

Пусть S — произвольное подмножество d-мерного евклидова пространства, D — его диаметр, и R — радиус минимального объемлющего шара.
Тогда

$$\frac{1}{2}D \leqslant R \leqslant \left(\frac{d}{2d+2}\right)^{\frac{1}{2}} D.$$

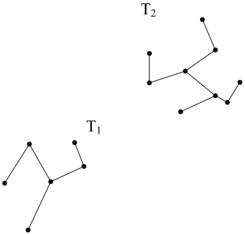
В частности, на плоскости:

$$\frac{1}{2}D \leqslant R \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}D. \tag{1}$$

Декомпозиция задачи

Остановимся на простейшем случае $k = 2$.

- Строим 2-MSF, состоящий из деревьев T_1 и T_2.

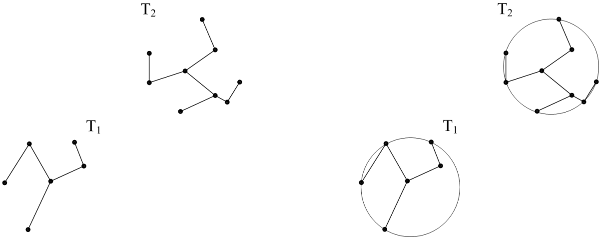


- пусть D_1, D_2 — диаметры T_1 и T_2, а R_1, R_2 радиусы содержащих их шаров $B(T_1)$ и $B(T_2)$. Положим $D = \max\{D_1, D_2\}$ и $R = \max\{R_1, R_2\}$.

Декомпозиция задачи

Остановимся на простейшем случае $k = 2$.

- Строим 2-MSF, состоящий из деревьев T_1 и T_2.

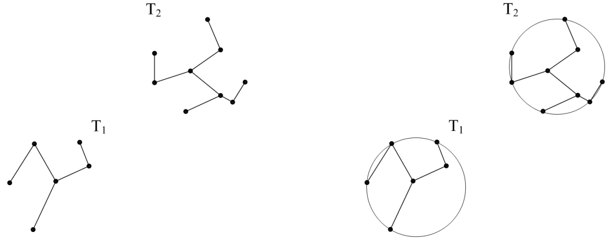


- пусть D_1, D_2 — диаметры T_1 и T_2, а R_1, R_2 радиусы содержащих их шаров $B(T_1)$ и $B(T_2)$. Положим $D = \max\{D_1, D_2\}$ и $R = \max\{R_1, R_2\}$.

Декомпозиция задачи

Остановимся на простейшем случае $k = 2$.

- Строим 2-MSF, состоящий из деревьев T_1 и T_2.



- пусть D_1, D_2 — диаметры T_1 и T_2, а R_1, R_2 радиусы содержащих их шаров $B(T_1)$ и $B(T_2)$. Положим $D = \max\{D_1, D_2\}$ и $R = \max\{R_1, R_2\}$.

Декомпозиция задачи

Пусть $\rho(T_1, T_2)$ — расстояние между центрами шаров $B(T_1)$ и $B(T_2)$.

Утверждение

Если $\rho(T_1, T_2) > 5R$ то задача Min-2-SCCP допускает декомпозицию на две независимых подзадачи TSP для графов $G(T_1)$ и $G(T_2)$.

Декомпозиция задачи

Пусть $\rho(T_1, T_2)$ — расстояние между центрами шаров $B(T_1)$ и $B(T_2)$.

Утверждение

Если $\rho(T_1, T_2) > 5R$ то задача Min-2-SCCP допускает декомпозицию на две независимых подзадачи TSP для графов $G(T_1)$ и $G(T_2)$.

Идея доказательства

Допустим, от противного, что в оптимальном решении $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\}$ выполняется условие $C_1 \cap T_1 \neq \varnothing$ и $C_1 \cap T_2 \neq \varnothing$.

Декомпозиция задачи

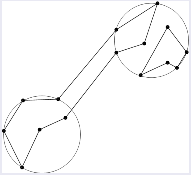
Пусть $\rho(T_1, T_2)$ — расстояние между центрами шаров $B(T_1)$ и $B(T_2)$.

Утверждение

Если $\rho(T_1, T_2) > 5R$ то задача Min-2-SCCP допускает декомпозицию на две независимых подзадачи TSP для графов $G(T_1)$ и $G(T_2)$.

Идея доказательства

Допустим, от противного, что в оптимальном решении $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\}$ выполняется условие $C_1 \cap T_1 \neq \varnothing$ и $C_1 \cap T_2 \neq \varnothing$.



Декомпозиция задачи

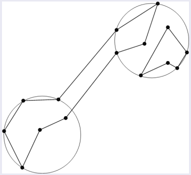
Пусть $\rho(T_1, T_2)$ — расстояние между центрами шаров $B(T_1)$ и $B(T_2)$.

Утверждение

Если $\rho(T_1, T_2) > 5R$ то задача Min-2-SCCP допускает декомпозицию на две независимых подзадачи TSP для графов $G(T_1)$ и $G(T_2)$.

Идея доказательства

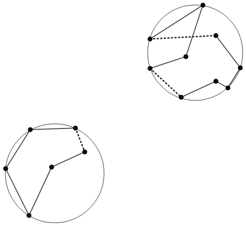
Допустим, от противного, что в оптимальном решении $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\}$ выполняется условие $C_1 \cap T_1 \neq \varnothing$ и $C_1 \cap T_2 \neq \varnothing$.



Тогда цикл C_1 содержит хотя бы два ребра, соединяющих T_1 и T_2

Декомпозиция задачи

- По условию, длина каждого из этих ребер превышает $3R$
- Удалим их и «замкнем» циклы внутри $B(T_1)$ и $B(T_2)$



- Получим решение меньшего веса

Декомпозиция задачи

Утверждение

Если $\rho(T_1, T_2) \leqslant 5R$, то максимальное расстояние между городами $D(G)$ в графе G не превосходит $\frac{7\sqrt{3}}{3}\mathrm{OPT}$.

Декомпозиция задачи

Утверждение

Если $\rho(T_1, T_2) \leqslant 5R$, то максимальное расстояние между городами $D(G)$ в графе G не превосходит $\frac{7\sqrt{3}}{3}\mathrm{OPT}$.

Идея доказательства

- По условию, $D = D(G) \leqslant 7R$
- В силу неравенства Юнга,

$$R \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} D \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \mathrm{OPT}_I,$$

- т.е. $D(G) \leqslant \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \mathrm{OPT}_I$.

Декомпозиция задачи

Утверждение

Если $\rho(T_1, T_2) \leqslant 5R$, то максимальное расстояние между городами $D(G)$ в графе G не превосходит $\frac{7\sqrt{3}}{3}\mathrm{OPT}$.

Идея доказательства

- По условию, $D = D(G) \leqslant 7R$
- В силу неравенства Юнга,

$$R \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} D \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \mathrm{OPT}_I,$$

- т.е. $D(G) \leqslant \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \mathrm{OPT}_I$.

Всюду ниже полагаем условие утверждения выполненным, тогда условие задачи Min-2-SCCP содержится в некотором квадрате $\mathcal{S}$ со стороной $7/\sqrt{3} \cdot OPT_I$

Преобразование условия задачи

Постановку задачи Min-2-SCCP на плоскости назовем *округленной*, если

- каждая вершина графа G имеет целочисленные координаты $x_i, y_i \in \mathbb{N}^0_{O(n)}$
- для каждого ребра e его длина $w(e) \geqslant 4$

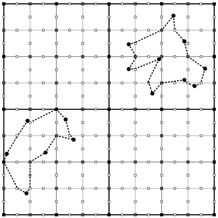
Лемма 1

PTAS для округленной задачи Min-2-SCCP влечет PTAS для общего случая задачи Min-2-SCCP

Идея PTAS для округленной задачи

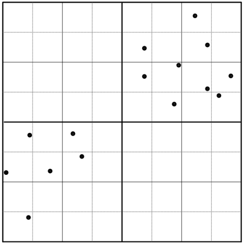
Рандомизированное разбиение объемлющего квадрата S на квадраты меньших размеров с последующим поиском минимального циклового покрытия специального вида

1) каждый сегмент цикла между соседними «городами» является ломаной, пересекающей границы всех квадратов разбиения исключительно в специально выделенных точках (порталах);
2) число порталов и максимальное число пересечений каждой из границ определяются заранее и зависят исключительно от значения параметра c



4-деревья для округленной задачи Min-2-SCCP

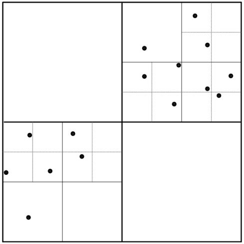
Зададим в объемлющем квадрате $\mathcal{S}$ со стороной $L = O(n)$ регулярную сетку с шагом 1.



Воспользуемся структурой данных *4-дерева*

4-деревья для округленной задачи Min-2-SCCP

Регулярное дерево с порядком вершины 4. Корень — объемлющий квадрат $\mathcal{S}$. Строим разбиение каждого квадрата (включая корневой) на 4 дочерних квадрата. Продолжаем разбиение до тех пор, пока дочерние квадраты содержат более одного «города».

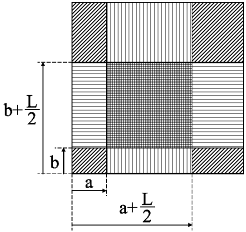


Смещенное 4-дерево

Для произвольных $a, b \in \mathbb{N}_L^0$, смещенным 4-деревом $T(a, b)$ назовем 4-дерево, центр которого имеет координаты

$$((L/2 + a) \mod L, (L/2 + b) \mod L),$$

а дочерние квадраты также рассматриваются по модулю L



Результаты

Теорема 2

- Пусть $c > 0$ — фиксированный параметр точности, L — размер квадрата $\mathcal{S}$, содержащего «города» округленной задачи.
- Допустим, случайные величины a, b распределены независимо и равномерно на множестве $\mathbb{N}_L^0$.
- Тогда для числа порталов $m = O(c \log L)$ и максимального числа пересечений $r = O(c)$ с вероятностью $\frac{1}{2}$ существует портальное цикловое покрытие, вес которого не превосходит $(1 + \frac{1}{c})OPT$.

Теорема 3

Euclidean Min-2-SCCP на плоскости обладает PTAS с оценкой трудоемкости $O(n^3 (\log n)^{O(c)})$.

Результаты

Теорема 3

Euclidean Min-2-SCCP на плоскости обладает PTAS с оценкой трудоемкости $O(n^3(\log n)^{O(c)})$.

Теорема 4

Euclidean Min-k-SCCP в d-мерном евклидовом пространстве (при произвольном фиксированном $d > 1$) обладает PTAS с оценкой трудоемкости $O(n^{d+1}2^k(k\log n)^{O((\sqrt{d}c)^{d-1})})$.

Содержание

Задача VRP

- Впервые введена в работе Г.Данцига и Дж.Рамсера (1959) как задача диспетчеризации флота бензозаправщиков. Любопытно, но авторы были уверены, что задача имеет эффективное решение.
- Задача состоит в построении наиболее экономичного семейства маршрутов, начинающихся и завершающихся в выделенных вершинах (складах) и посещающих все остальные вершины графа (клиенты) при различных дополнительных ограничениях (грузоподъемность, время поставок, и т.п.)
- VRP NP-трудна в сильном смысле и остается труднорешаемой в конечномерных евклидовых пространствах [А.Ленстра и А.Ринной Кан (1981)].

Известные результаты

- Метрическая CVRP Apx-трудна [Т. Асано и др.. (1996)].
- Euclidean q-CVRP на плоскости обладает PTAS при $q = O(\log\log n)$ [М.Хаймович, А. Ринной Кан (1985)]
- В работах [T.Asano и др. (1996)] и [С.Арора (1998)] этот результат распространен на случаи $q = O(\log n/\log\log n)$ и $q = \Omega(n)$, соответственно.
- PTAS для задачи на плоскости при $q \le 2^{\log^\delta n}$ для некоторой $\delta = \delta(\varepsilon)$ [А.Адамашек (2009)].
- Для произвольного q, QPTAS с трудоемкостью $O\left(n^{(\log n)^{O(1/\varepsilon)}}\right)$ [А.Дас и К.Мэттью (2010), (2014)].
- Все перечисленные результаты получены для евклидовой плоскости
- По-видимому, нам впервые удалось предложить PTAS для евклидового пространства произвольной размерности $d > 1$.

Известные результаты

- Метрическая CVRP Apx-трудна [Т. Асано и др.. (1996)].
- Euclidean q-CVRP на плоскости обладает PTAS при $q = O(\log\log n)$ [М.Хаймович, А. Ринной Кан (1985)]
- В работах [T.Asano и др. (1996)] и [С.Арора (1998)] этот результат распространен на случаи $q = O(\log n/\log\log n)$ и $q = \Omega(n)$, соответственно.
- PTAS для задачи на плоскости при $q \leq 2^{\log^{\delta} n}$ для некоторой $\delta = \delta(\varepsilon)$ [А.Адамашек (2009)].
- Для произвольного q, QPTAS с трудоемкостью $O\left(n^{(\log n)^{O(1/\varepsilon)}}\right)$ [А.Дас и К.Мэттью (2010), (2014)].
- Все перечисленные результаты получены для евклидовой плоскости
- По-видимому, нам впервые удалось предложить PTAS для евклидового пространства произвольной размерности $d > 1$.

Известные результаты

- Метрическая CVRP Apx-трудна [Т. Асано и др.. (1996)].
- Euclidean q-CVRP на плоскости обладает PTAS при $q = O(\log\log n)$ [М.Хаймович, А. Ринной Кан (1985)]
- В работах [T.Asano и др. (1996)] и [С.Арора (1998)] этот результат распространен на случаи $q = O(\log n / \log\log n)$ и $q = \Omega(n)$, соответственно.
- PTAS для задачи на плоскости при $q \leq 2^{\log^{\delta} n}$ для некоторой $\delta = \delta(\varepsilon)$ [А.Адамашек (2009)].
- Для произвольного q, QPTAS с трудоемкостью $O\left(n^{(\log n)^{O(1/\varepsilon)}}\right)$ [А.Дас и К.Мэттью (2010), (2014)].
- Все перечисленные результаты получены для евклидовой плоскости
- По-видимому, нам впервые удалось предложить PTAS для евклидового пространства произвольной размерности $d > 1$.

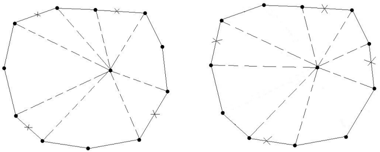
Постановки задач

- Заданы $G = (X \cup Y, E, w)$ — полный ориентированный взвешенный граф и натуральное число q; $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ множество *клиентов*, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ множество *складов*, симметрическая весовая функция $w : E \to \mathbb{R}_+$.
- Клиенту x_i сопоставим число $r_i = \min\{w(y_j, x_i) \colon j = 1, \ldots, m\}$. произвольным образом разрешая возможную неоднозначность, зададимся разбиением $X_1 \cup \ldots \cup X_m = X$ $X_j = \{x_i \in X \colon r_i = w(x_i, y_j)\}$.
- Произвольный допустимых маршрут имеет вид $y_{j_s}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, y_{j_f}$, где y_{j_s} and y_{j_f} — склады, а $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$ попарно различны и $t \leq q$.
- SDCVRP and MDCVRP
- В любой из постановок цель задачи — указать набор маршрутов наименьшего веса, посещающих каждого клиента в точности один раз и удовлетворяющих ограничению на грузоподъемность.

Постановки задач

- Заданы $G = (X \cup Y, E, w)$ — полный ориентированный взвешенный граф и натуральное число q; $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ множество *клиентов*, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ множество *складов*, симметрическая весовая функция $w : E \to \mathbb{R}_+$.
- Клиенту x_i сопоставим число $r_i = \min\{w(y_j, x_i) \colon j = 1, \dots, m\}$. произвольным образом разрешая возможную неоднозначность, зададимся разбиением $X_1 \cup \ldots \cup X_m = X$
$X_j = \{x_i \in X \colon r_i = w(x_i, y_j)\}$.
- Произвольный допустимых маршрут имеет вид $y_{j_s}, x_{i_1}, \dots, x_{i_t}, y_{j_f}$, где y_{j_s} and y_{j_f} — склады, а $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$ попарно различны и $t \le q$.
- SDCVRP and MDCVRP
- В любой из постановок цель задачи — указать набор маршрутов наименьшего веса, посещающих каждого клиента в точности один раз и удовлетворяющих ограничению на грузоподъемность.

Эвристика ITP (случай одного склада)



- Сопоставим исходной постановке SDCVRP подходящую постановку TSP на подграфе $G_X = G\langle X\rangle$.
- Рассмотрим произвольный гамильтонов цикл H графа G_X.
- Начиная с вершины x_1, разобьем H на $l = \lceil n/q \rceil$ цепей так, чтобы каждая содержала не более q клиентов.
- Соединим каждую из цепей со складом и получим допустимое решение SDCVRP.
- Повторив данную процедуру итеративно для произвольной стартовой вершины x_i, построим n допустимых решений $V_1, \ldots, V_n$, из которых выберем одно наименьшей стоимости.

Комбинированная схема CITP

- **Input:** полный взвешенный граф $G(X \cup \{y\}, E, w)$ порядка n, натуральное число q и верхняя оценка относительной погрешности $\varepsilon > 0$.
- **Output:** допустимое решение S_{CITP} задачи SDCVRP.
- упорядочить клиентов по убыванию расстояний до склада $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_n$;
- задаться значением параметра $k = k(\varepsilon)$, определяющим разбиение множества X на подмножества $X(k) = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ *внешних* и $X \setminus X(k)$ *внутренних* клиентов;
- найти точное решение $S^*(X(k))$ задачи SDCVRP для подграфа $G\langle X(k) \cup \{y\}\rangle$;
- применив ITP, построить приближенное решение $S_{\text{ITP}}(X \setminus X(k))$ задачи для подграфа $G\langle X \setminus X(k) \cup \{y\}\rangle$;
- положить $S_{\text{CITP}} = S^*(X(k)) \cup S_{\text{ITP}}(X \setminus X(k))$.

Верхняя оценка $\mathrm{TSP}^*(X \setminus X(k))$

Лемма 2

Для произвольного $h \in (0, h_0)$, $h_0 = \pi/(6\sqrt{d-1})$, на сфере S^{d-1} существует $h\sqrt{d-1}$-сеть $N = N(d,h)$ мощности $|N| = Ch^{-(d-1)}$ для некоторой константы $C = C(d)$.

Лемма 3

Для произвольного $d > 1$ и конечного подмножества $X \subset B(y, R)$ справедлива оценка

$$\mathrm{TSP}^*(X) \le \begin{cases} C_1 R^{1/d} (\sum_{i=1}^n r_i)^{(d-1)/d}, & \text{если } \sum_{i=1}^n r_i > RC\frac{(d-1)^{(d+1)/2}}{(\pi/6)^d}, \\ C_2 R, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $C_1 = 2dC^{1/d}(d-1)^{(d-1)/2d}$ и $C_2 = 2dC(\pi/6)^{-(d-1)}(d-1)^{(d-1)/2}$.

Основной результат

$$e(k) = \frac{w(S_{\mathrm{CITP}}(X)) - \mathrm{VRP}^*(X)}{\mathrm{VRP}^*(X)}$$
$$= \frac{\mathrm{VRP}^*(X(k)) + w(S_{\mathrm{ITP}}(X \setminus X(k))) - \mathrm{VRP}^*(X)}{\mathrm{VRP}^*(X)},$$

Лемма 4

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой что $e(k) \leq \varepsilon$.

Теорема 5

Пусть для решения внутренней задачи коммивояжера используется ρ-приближенный алгоритм с трудоемкостью $O(n^c)$.
Схема CITP является эффективной полиномиальной приближенной схемой (EPTAS) с трудоемкостью $O(n^c + n^2 + k(\varepsilon)^q 2^{k(\varepsilon)})$ при произвольных фиксированных q, $\rho \geq 1$ и $d \geq 2$.

Публикации I

- M. Khachay and K. Neznakhina, *Approximation of euclidean k-size cycle cover problem*, Croation Operational Research Review **5** (2014), no. 1, 177–188.
- M.Yu. Khachai and E.D. Neznakhina, *Approximability of the problem about a minimum-weight cycle cover of a graph*, Doklady Mathematics **91** (2015), no. 2, 240–245 (English).
- M.Yu. Khachai and E.D. Neznakhina, *A polynomial-time approximation scheme for the euclidean problem on a cycle cover of a graph*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **289** (2015), no. 1, 111–125 (English).
- M. Khachay and K. Neznakhina, *Approximability of the minimum-weight k-size cycle cover problem*, Journal of Global Optimization (2015).

Публикации II

Michael Khachay and Helen Zaytseva, *Combinatorial optimization and applications: 9th international conference, COCOA 2015, Houston, TX, USA, December 18-20, 2015, proceedings*, LNCS, ch. Polynomial Time Approximation Scheme for Single-Depot Euclidean Capacitated Vehicle Routing Problem, pp. 178–190, Springer International Publishing, Cham, 2015.

Хачай М.Ю., Дубинин Р.Д., *Аппроксимируемость задачи об оптимальной маршрутизации транспорта в конечномерных евклидовых пространствах*, Труды Института математики и механики **22** (2016), no. 2.

Спасибо за внимание!