

Совершенные комбинаторные структуры

Д. С. Кротов

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск

Москва, Конференция профессоров РАН по ОМН РАН
14-16 июня 2016

Совершенная структура

$\overline{C}$ — совершенная структура над A с матрицей параметров S .

$$A\overline{C} = \overline{C}S$$

0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0

 $\cdot$

1	0	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	1	0
0	0	1
0	1	0
0	1	0
0	0	1
0	0	1

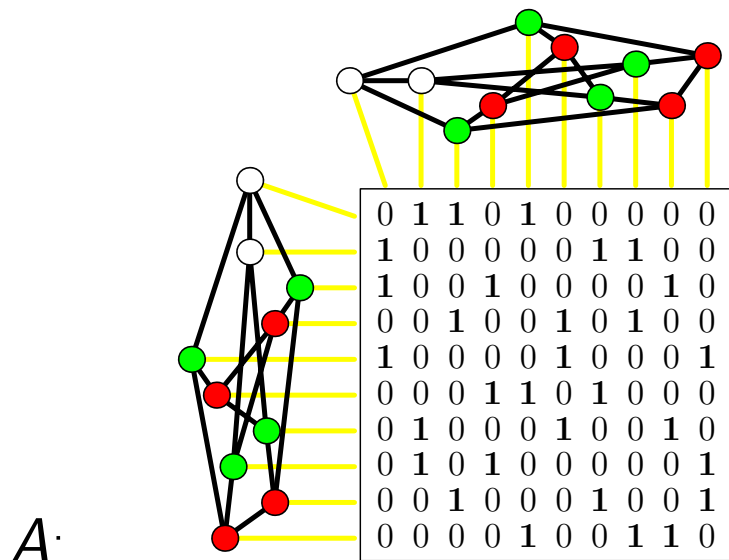
 $=$

1	0	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	1	0
0	0	1
0	1	0
0	1	0
0	0	1
0	0	1

 $\cdot$

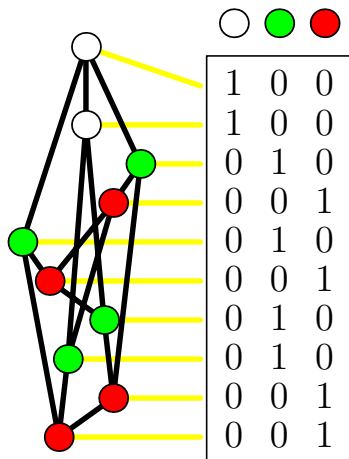
1	2	0
1	0	2
0	2	1

Матрица смежности графа



Матрица инцидентности раскраски

$\overline{C}$:



Совершенная раскраска

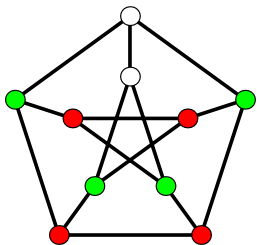
Let $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ be a graph.

Definition

Разбиение $(C_0, \dots, C_{m-1})$ множества вершин графа $V(\Gamma)$ называется **совершенной раскраской** с **матрицей параметров** (**quotient matrix**) $S = (S_{ij})_{i,j=0}^{m-1}$ если каждая вершина из C_i имеет ровно S_{ij} соседей из C_j .

совершенная раскраска (perfect coloring) $\sim$ equitable partition $\sim$ regular partition $\sim$ partition design $\sim \dots$

Пример: совершенная раскраска



$$S = \begin{array}{ccccc} & \circ & \bullet & \bullet & \\ \circ & 1 & 2 & 0 & \\ \bullet & 1 & 0 & 2 & \\ \bullet & 0 & 2 & 1 & \end{array}$$

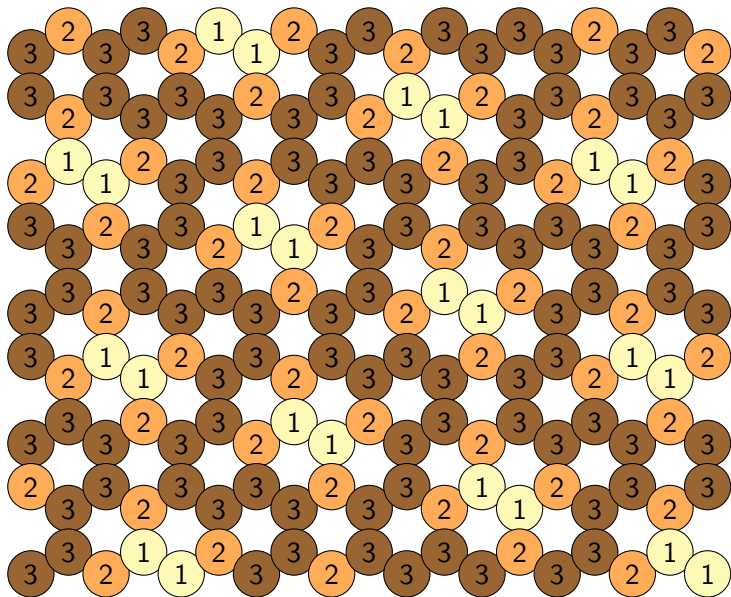
Матричное определение совершенной раскраски

A – матрица смежности графа; $\overline{C}$ – матрица инцидентности совершенной раскраски с матрицей параметров S .

$$A\overline{C} = \overline{C}S$$

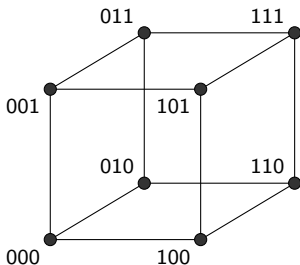
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ещё пример

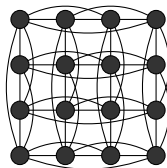


n -куб (гиперкуб) $H(n, 2)$ — граф, вершинами которого являются слова длины n в алфавите $\{0, 1\}$, два слова смежны если они различаются ровно в одной позиции.

$H(n = 3, q = 2)$:



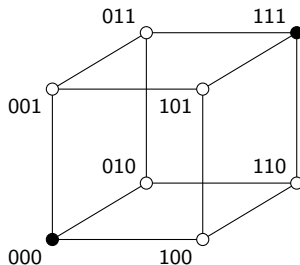
$H(n = 2, q = 4)$:



Аналогично определяется граф Хэмминга $H(n, q)$.

Совершенные коды

Совершенный код, исправляющий e ошибок, или e -совершенный код — множество вершин графа, такое, что любая вершина графа находится на расстоянии $\leq e$ ровно от одной вершины кода.

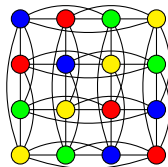


1-Совершенный код в регулярном графе степени d может быть определен как совершенная раскраска с параметрами

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & d-1 \end{pmatrix}.$$

Латинские квадраты

0	1	2	3
1	0	3	2
2	3	1	0
3	2	0	1



Латинский квадрат $q \times q$ можно определить как совершенную раскраску графа $H(2, q)$ с параметрами

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(на примере $q = 4$) или как совершенную раскраску графа $H(3, q)$ с параметрами

$$\begin{pmatrix} 0 & 3(q-1) \\ 3 & 3(q-2) \end{pmatrix}.$$

и латинские n -кубы (гиперкубы)

Латинский n -куб $q \times q \times \dots \times q$ можно определить как совершенную раскраску графа $H(n, q)$ с параметрами

$$\begin{pmatrix} 0 & n & n & n \\ n & 0 & n & n \\ n & n & 0 & n \\ n & n & n & 0 \end{pmatrix}$$

(на примере $q = 4$) или как совершенную раскраску графа $H(n + 1, q)$ с параметрами

$$\begin{pmatrix} 0 & (n + 1)(q - 1) \\ n + 1 & (n + 1)(q - 2) \end{pmatrix}.$$

Набор B подмножеств мощности k (блоков) некоторого конечного множества V называется **системой Штейнера** $S(t, k, v = |V|)$, если каждое t -элементное множество множества V включается ровно в один блок из B .

Система Штейнера $S(k-1, k, v)$ может быть определена как совершенная раскраска с параметрами

$$\begin{pmatrix} 0 & k(v-k) \\ k & k(v-k-1) \end{pmatrix}$$

Графа Джонсона $J(n, k)$.

Набор B подпространств размерности k (**блоков**) некоторого v -мерного пространства V над полем $GF(q)$ называется **q -ичной системой Штейнера $S_q(t, k, v)$** , если каждое t -мерное подпространство пространства V включается ровно в один блок из B .

Система Штейнера $S_q(k-1, k, v)$ может быть определена как совершенная раскраска с параметрами

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots \\ q^k - 1 & \dots \end{pmatrix}$$

Графа Грассмана $J_q(n, k)$.

Граф $H(n, q)$, q фиксировано, $n \rightarrow \infty$. Число вершин экспоненциально, число объектов может быть дважды экспоненциально (по n).

$$2^{2^{cn(1+o(1))}} \quad c - ??.$$

Граф $H(n, q)$, n фиксировано, $q \rightarrow \infty$. Число вершин полиномиально (по q), число объектов — экспонента от функции не более чем полиномиального роста. Например, число латинских 3-кубов, как и число $S(3, 4, v)$, равно $2^{\Theta(q^3) \log q}$ [V.Potapov, arXiv:1510.06212, arXiv:1606.02426].

Число объектов – оценка снизу

Трейд. Если есть два объекта C' , C'' одного типа, пара их разностей $(T_0, T_1) = (C' \setminus C'', C'' \setminus C')$ является битрейдом. Но в каждом случае (системы Штейнера, совершенные коды, латинские гиперкубы, ...) битрейды определяется независимо от существования полных объектов данного типа.

0	1	2	3
1	0	3	2
2	3	1	0
3	2	0	1

Число объектов может быть оценено снизу как 2^N , где N — максимальное число независимых трейдов, на которые может быть разбит один объект.

? – размер трейда

Какой размер минимального трейда в каждом конкретном случае?

- Для 1-совершенных кодов в $H(n, 2) — 2^{(n-1)/2}$.
- Для 1-совершенных кодов в $H(n, q > 2)$ — неизвестно.
- Для латинских n -кубов — 2^n .
- Для $S(t, k, v) — 2^t$.
- Для $S_q(t, k, v) — \prod_{i=1}^t (1 + q^i)$ [DK, V.Potapov, I.Mogilnykh, arXiv:1412.3792, arXiv:1512.02592].

Каков размер минимального носителя собственной функции?
Например, для второго наибольшего собственного значения в $H(n, q)$ ответ $2(q - 1)q^{n-2}$ [A.Valyuzhenich, arXiv:1512.02606].