Аппроксимация голоморфными и гармоническими отображениями

Е. С. Дубцов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

(На основе работ с Е.В. Абакумовым, Université Paris-Est)

14 июня 2016 г.

"Конференция профессоров РАН по ОМН", Москва, МИАН

Пусть B^d обозначает единичный шар из комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^d$, $d \geq 1$.

Функция $w : [0,1) \to (0, +\infty)$ по определению называется весовой, если она является неубывающей, неограниченной и непрерывной.

Формальное равенство $w(z) = w(|z|)$, $z \in B^d$, определяет соответствующий радиальный вес w на шаре B^d. В дальнейшем весовая функция и радиальный вес взаимозаменяют друг друга и для них используется общее обозначение.

Функции $u, v : B^d \to (0, +\infty)$ называются эквивалентными (и используется обозначение $u \asymp v$), если

$$C_1 u(z) \leq v(z) \leq C_2 u(z), \quad z \in B^d,$$

для некоторых абсолютных констант $C_1, C_2 > 0$.

Заданный на шаре B^d радиальный вес w приближается голоморфным отображением (кратко, $w \in B_{\mathrm{hol}}$), если существуют число $n \in \mathbb{N}$ и голоморфное отображение $f : B^d \to \mathbb{C}^n$ такие, что

$$|f(z)| \asymp w(z), \quad z \in B^d.$$

Заданный на шаре B^d радиальный вес w приближается гармоническим отображением (кратко, $w \in B_{\mathrm{har}}$), если существуют число $m \in \mathbb{N}$ и гармоническое отображение $g : B^d \to \mathbb{R}^m$ такие, что

$$|g(z)| \asymp w(z), \quad z \in B^d.$$

1. Базовые понятия
   - Весовые функции и радиальные веса
   - Приближение отображениями
2. Основные результаты
   - Основная теорема
   - Примеры весов со свойством $w \in B^d_{\mathrm{hol}}$
   - Логарифмическая выпуклость
   - О доказательствах

Очевидно, что $w \in B_{\mathrm{hol}} \Rightarrow w \in B_{\mathrm{har}}$. В определенном смысле, гармонических функций существенно больше, чем голоморфных; тем не менее, обратная импликация также верна.

Теорема.

Пусть на шаре B^d задан радиальный вес w. Тогда следующие свойства равносильны:
(i) $w \in B_{\mathrm{hol}}$;
(ii) $w \in B_{\mathrm{har}}$.

Интерес к свойству $w \in B^d_{\mathrm{hol}}$ изначально был связан с приложениями в теории операторов, в частности, в теории операторов композиции.
Иной взгляд (с точки зрения комплексного анализа): это задача о возможном росте собственных отображений (погружений, вложений) шара B^d в $\mathbb{C}^n$.

Первый пример радиального веса со свойством $w \in B^1_{\mathrm{hol}}$ (в единичном круге B^1 на комплексной плоскости) получили У. Рамей и Д. Уллрич (1991):

$$\frac{1}{1-t} \in B^1_{\mathrm{hol}};$$

более того, сформулированное свойство верно при $n = 2$, т.е. искомое приближающее голоморфное отображение f переводит круг в $\mathbb{C}^2$.

После У. Рамея и Д. Уллрича иные примеры весовых функций, приближаемых голоморфными отображениями, были получены несколькими авторами.

- B.R. Choe and K.S. Rim (1996)
- P.M. Gauthier and J. Xiao (2002)
- J. Xiao (2004)
- P. Galanopoulos (2008)
- S.G. Krantz and S. Stević (2009)
- D. Girela, J.Á. Peláez, F. Pérez-González and J. Rättyä (2008)
- E. G. Kwon and M. Pavlović (2011)
- Е. Абакумов и Е. Д. (2012)
- J. Gröhn, J. Á. Peláez and J. Rättyä (2014)

1. Базовые понятия
   - Весовые функции и радиальные веса
   - Приближение отображениями

2. Основные результаты
   - Основная теорема
   - Примеры весов со свойством $w \in B^d_{\mathrm{hol}}$
   - Логарифмическая выпуклость
   - О доказательствах

Функция $v : [0,1) \to (0,+\infty)$ называется логарифмически выпуклой, если $\log v$ — это выпуклая функция от переменной $\log t$. Иными словами, логарифмическое преобразование $\Phi_v(x) := \log v(e^x)$ является выпуклой функцией от переменной $x \in (-\infty, 0)$.

На самом деле, в сформулированной выше теореме присутствует третье свойство: по определению $w \in B_{\log}$, если весовая функция w эквивалентна некоторой логарифмически выпуклой функции.

Теорема.

Пусть на шаре B^d задан радиальный вес w. Тогда следующие свойства равносильны:
(i) $w \in B^d_{\mathrm{hol}}$ (вес w приближается голоморфным отображением);
(ii) $w \in B_{\log}$ (вес w эквивалентен логарифмически выпуклой функции);
(iii) $w \in B^d_{\mathrm{har}}$ (вес w приближается гармоническим отображением).

Схема: $B^d_{\mathrm{har}} \subset B_{\log} \subset B^d_{\mathrm{hol}} \subset B^d_{\mathrm{har}}$.

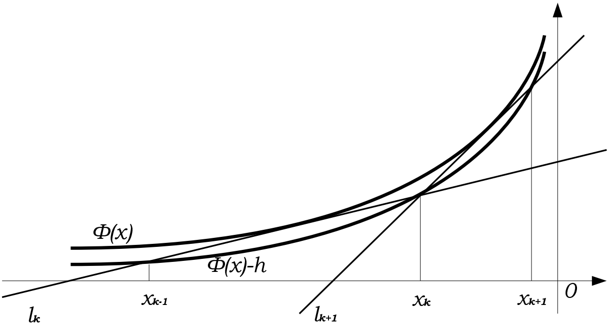
1) Вложение $B^d_{\mathrm{hol}} \subset B^d_{\mathrm{har}}$ очевидно.

2) $B^d_{\mathrm{har}} \subset B_{\log}$. Если $w \in B^d_{\mathrm{har}}$, то переход к L^2-средним по r-сферам, $0 < r < 1$, показывает, что весовая функция w эквивалентна степенному ряду с положительными коэффициентами ($w \in B_{\mathrm{pspc}}$). Такой степенной ряд задает логарифмически выпуклую весовую функцию, поэтому $w \in B_{\log}$.

3) $B_{\log} \subset B^d_{\mathrm{hol}}$. В единичном круге B^1 для заданной весовой функции $w \in B_{\log}$ удается построить голоморфное отображение $f : B^1 \to \mathbb{C}^2$ такое, что $|f| \asymp w$. Для этого используется геометрическая конструкция на левой вещественной полуоси. Эта конструкция генерирует искомые координатные функции f_1 и f_2 в виде подходящих степенных рядов. Соответствующее геометрическое рассуждение использует выпуклость функции $\Phi_w(x) = \log w(e^x)$, $-\infty < x < 0$.

При $d \geq 2$ мономы z^j, $j \in \mathbb{N}$, заменяются в соответствующих лакунарных степенных рядах на полиномы Александрова–Рыля–Войтащика.

Геометрическая конструкция на основе Φ_w и $\Phi_w - h$, $h \geq 2$.



Basic induction construction