Асимптотический анализ в задачах математической физики

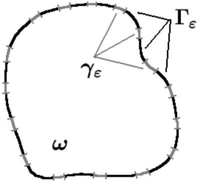
Д.И. Борисов

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
Уфа, Россия

Конференция профессоров РАН по Отделению математических наук РАН, 14–16 июня 2016 г.

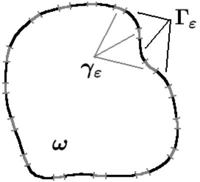
Постановка задач

Задача:



Постановка задач

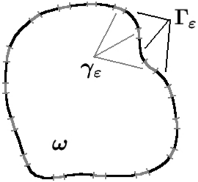
Задача:



Длины кусков в γ_ε: $\sim \varepsilon\eta$, в Γ_ε: $\sim \varepsilon$,
$\varepsilon \to +0$, $\eta = \eta(\varepsilon)$, $0 < \eta(\varepsilon) < const$

Постановка задач

Задача:



Длины кусков в γ_ε: $\sim \varepsilon\eta$, в Γ_ε: $\sim \varepsilon$,

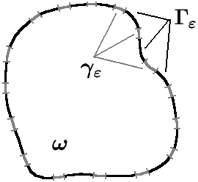
$\varepsilon \to +0$, $\eta = \eta(\varepsilon)$, $0 < \eta(\varepsilon) < const$

$H_\varepsilon := (\mathrm{i}\nabla + A)^2 + V$, $A = (A_1, A_2)$

$u = 0$ на γ_ε, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ на Γ_ε

Постановка задач

Задача:

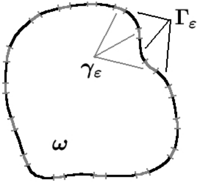


Длины кусков в γ_ε: $\sim \varepsilon\eta$, в Γ_ε: $\sim \varepsilon$,
$\varepsilon \to +0$, $\eta = \eta(\varepsilon)$, $0 < \eta(\varepsilon) < const$
$H_\varepsilon := (\mathrm{i}\nabla + A)^2 + V$, $A = (A_1, A_2)$
$u = 0$ на γ_ε, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ на Γ_ε

Цель: описать асимптотическое поведение резольвенты и спектра H_ε при $\varepsilon \to +0$

Постановка задач

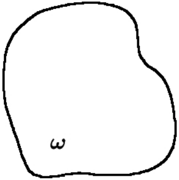
Задача:



Длины кусков в γ_ε: $\sim \varepsilon\eta$, в Γ_ε: $\sim \varepsilon$,
$\varepsilon \to +0$, $\eta = \eta(\varepsilon)$, $0 < \eta(\varepsilon) < const$
$H_\varepsilon := (\mathrm{i}\nabla + A)^2 + V$, $A = (A_1, A_2)$
$u = 0$ на γ_ε, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ на Γ_ε

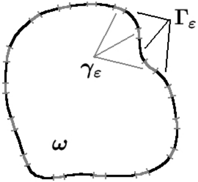
Цель: описать асимптотическое поведение резольвенты и спектра H_ε при $\varepsilon \to +0$

Усреднённый оператор:



Постановка задач

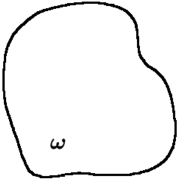
Задача:



Длины кусков в γ_ε: $\sim \varepsilon\eta$, в Γ_ε: $\sim \varepsilon$,
$\varepsilon \to +0$, $\eta = \eta(\varepsilon)$, $0 < \eta(\varepsilon) < const$
$H_\varepsilon := (\mathrm{i}\nabla + A)^2 + V$, $A = (A_1, A_2)$
$u = 0$ на γ_ε, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ на Γ_ε

Цель: описать асимптотическое поведение резольвенты и спектра H_ε при $\varepsilon \to +0$

Усреднённый оператор:



$H_0 := (\mathrm{i}\nabla + A)^2 + V$
$u = 0$ или $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ или $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + Ku = 0$ на $\partial\omega$
в зависимости от предела $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \ln \eta(\varepsilon)$
и от геометрии чередования

Результаты

- Сходимость резольвент в операторной норме для общего непериодического чередования:

$$\|(H_\varepsilon-\lambda)^{-1}-(H_0-\lambda)^{-1}\|_{L_2(\omega)\to L_2(\omega)}\leqslant C\phi(\varepsilon,\eta),$$
$$\|(H_\varepsilon-\lambda)^{-1}-(H_0-\lambda)^{-1}\|_{L_2(\omega)\to W_2^1(\omega)}\leqslant C\phi(\varepsilon,\eta),\quad \phi(\varepsilon,\eta)\to 0$$

Результаты

- Сходимость резольвент в операторной норме для общего непериодического чередования:

$$\|(H_\varepsilon-\lambda)^{-1}-(H_0-\lambda)^{-1}\|_{L_2(\omega)\to L_2(\omega)}\leqslant C\phi(\varepsilon,\eta),$$
$$\|(H_\varepsilon-\lambda)^{-1}-(H_0-\lambda)^{-1}\|_{L_2(\omega)\to W_2^1(\omega)}\leqslant C\phi(\varepsilon,\eta),\quad \phi(\varepsilon,\eta)\to 0$$

- Полные асимптотики (по ε и η) собственных значений и собственных функций в случае периодического и локально-периодического чередования

$$\lambda_\varepsilon=\lambda_0+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j c_j(\eta)$$

Результаты

- Сходимость резольвент в операторной норме для общего непериодического чередования:

$$\|(H_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1}\|_{L_2(\omega)\to L_2(\omega)} \leqslant C\phi(\varepsilon,\eta),$$
$$\|(H_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1}\|_{L_2(\omega)\to W_2^1(\omega)} \leqslant C\phi(\varepsilon,\eta), \quad \phi(\varepsilon,\eta) \to 0$$

- Полные асимптотики (по ε и η) собственных значений и собственных функций в случае периодического и локально-периодического чередования

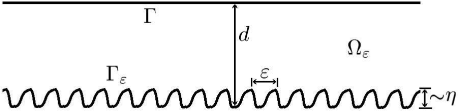
$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j c_j(\eta)$$

- Первые члены асимптотик в случае непериодического чередования, если в усреднённом операторе второе или третье краевое условие

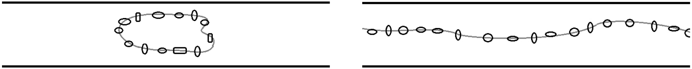
Другие задачи граничного усреднения

Результаты по сходимости резольвент получены для возмущений:

- Быстро осциллирующая граница



- Перфорация вдоль заданной кривой



Постановка

Невозмущённый периодический оператор:

$$H_0 := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A_j} + A_0$$ в $\mathbb{R}^2$, коэффициенты A_{ij}, A_j, A_0 периодичны относительно некоторой решётки, оператор H_0 самосопряжён

Постановка

Невозмущённый периодический оператор:

$$H_0 := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A_j} + A_0 \text{ в } \mathbb{R}^2,$$ коэффициенты A_{ij}, A_j, A_0 периодичны относительно некоторой решётки, оператор H_0 самосопряжён

Возмущение: $L_\varepsilon : W_2^2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, $\varepsilon \to +0$, $\chi_1 = \chi_1(x)$, $\chi_2 = \chi_2(x)$ – гладкие убывающие функции

Постановка

Невозмущённый периодический оператор:

$$H_0 := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A_j} + A_0$$ в $\mathbb{R}^2$, коэффициенты A_{ij}, A_j, A_0 периодичны относительно некоторой решётки, оператор H_0 самосопряжён

Возмущение: $L_\varepsilon : W_2^2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, $\varepsilon \to +0$, $\chi_1 = \chi_1(x)$, $\chi_2 = \chi_2(x)$ – гладкие убывающие функции

Возмущённый оператор: $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon \chi_1 L_\varepsilon \chi_2$.

Постановка

Невозмущённый периодический оператор:

$$H_0 := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A_j} + A_0 \text{ в } \mathbb{R}^2,$$ коэффициенты A_{ij}, A_j, A_0 периодичны относительно некоторой решётки, оператор H_0 самосопряжён

Возмущение: $L_\varepsilon : W_2^2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, $\varepsilon \to +0$, $\chi_1 = \chi_1(x)$, $\chi_2 = \chi_2(x)$ – гладкие убывающие функции

Возмущённый оператор: $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon \chi_1 L_\varepsilon \chi_2$. Оператор L_ε не предполагается симметричным, поэтому H_ε не является ни симметричным, ни самосопряжённым

Постановка

Невозмущённый периодический оператор:

$$H_0 := -\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} A_j\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j} + A_0 \text{ в } \mathbb{R}^2,$$ коэффициенты A_{ij}, A_j, A_0 периодичны относительно некоторой решётки, оператор H_0 самосопряжён

Возмущение: $L_\varepsilon : W_2^2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, $\varepsilon \to +0$, $\chi_1 = \chi_1(x)$, $\chi_2 = \chi_2(x)$ – гладкие убывающие функции

Возмущённый оператор: $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon\chi_1 L_\varepsilon \chi_2$. Оператор L_ε не предполагается симметричным, поэтому H_ε не является ни симметричным, ни самосопряжённым

Цель исследований: Структура и поведение спектра при $\varepsilon \to +0$

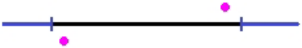
Результаты

- Остаточный спектр H_ε пуст, существенный спектр H_ε совпадает с существенным спектром H_0, точечный спектр H_ε вне существенного – счётен

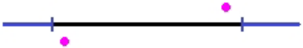
Результаты

- Остаточный спектр H_ε пуст, существенный спектр H_ε совпадает с существенным спектром H_0, точечный спектр H_ε вне существенного – счётен
- Существенный спектр – зонный 

Результаты

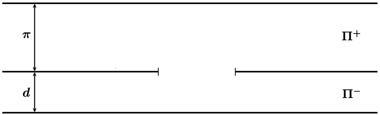
- Остаточный спектр H_ε пуст, существенный спектр H_ε совпадает с существенным спектром H_0, точечный спектр H_ε вне существенного – счётен
- Существенный спектр – зонный 
  В окрестности краев зон при малых ε могут возникать изолированные собственные значения 

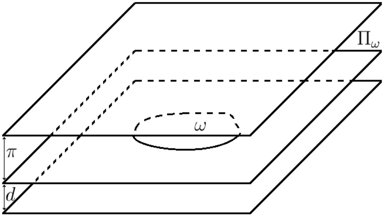
Результаты

- Остаточный спектр H_ε пуст, существенный спектр H_ε совпадает с существенным спектром H_0, точечный спектр H_ε вне существенного – счётен
- Существенный спектр – зонный 
  В окрестности краев зон при малых ε могут возникать изолированные собственные значения 
- Получены достаточные условия существования/отсутствия таких собственных значений + первые члены их асимптотик

Другие модели

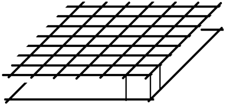
Аналогичные результаты получены для операторов на оси, в полосах, слоях





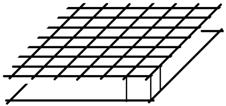
Постановка задачи

$\Pi := \{x = (x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ 0 < x_{n+1} < d\}$
Γ – решётка в $\mathbb{R}^n$, $\square'$ – ячейка периодичности,
$\square := \square' \times [0, d]$



Постановка задачи

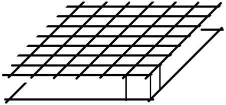
$\Pi := \{x = (x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < x_{n+1} < d\}$
Γ – решётка в $\mathbb{R}^n$, $\square'$ – ячейка периодичности,
$\square := \square' \times [0, d]$



$L(t) := tL_1 + t^2 L_2 + t^3 L_3(t), \ t \in [-t_0, t_0]$,
$L_i : W_2^2(\square) \to L_2(\square)$ – ограниченные симметричные операторы

Постановка задачи

$\Pi := \{x = (x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < x_{n+1} < d\}$
Γ – решётка в $\mathbb{R}^n$, $\square'$ – ячейка периодичности,
$\square := \square' \times [0, d]$

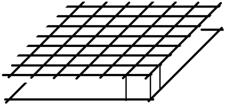


$L(t) := tL_1 + t^2 L_2 + t^3 L_3(t)$, $t \in [-t_0, t_0]$,
$L_i : W_2^2(\square) \to L_2(\square)$ – ограниченные симметричные операторы

$H_\varepsilon(\omega) := -\Delta + \sum\limits_{k\in\Gamma} S(k)L(\varepsilon\omega_k)S(-k)$ в $L_2(\Pi)$ с краевым условием Дирихле/Неймана; $(S(k)u)(x) := u(x' - k, x_{n+1})$;

Постановка задачи

$\Pi := \{x = (x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < x_{n+1} < d\}$
Γ – решётка в $\mathbb{R}^n$, $\square'$ – ячейка периодичности,
$\square := \square' \times [0, d]$



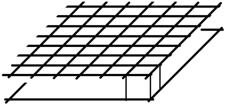
$L(t) := tL_1 + t^2 L_2 + t^3 L_3(t)$, $t \in [-t_0, t_0]$,
$L_i : W_2^2(\square) \to L_2(\square)$ – ограниченные симметричные операторы

$H_\varepsilon(\omega) := -\Delta + \sum_{k\in\Gamma} S(k) L(\varepsilon\omega_k) S(-k)$ в $L_2(\Pi)$ с краевым условием Дирихле/Неймана; $(S(k)u)(x) := u(x' - k, x_{n+1})$;

ω_k – независимые одинаково распределённые случайные величины

Постановка задачи

$\Pi := \{x = (x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < x_{n+1} < d\}$
Γ – решётка в $\mathbb{R}^n$, $\square'$ – ячейка периодичности,
$\square := \square' \times [0, d]$



$L(t) := tL_1 + t^2 L_2 + t^3 L_3(t)$, $t \in [-t_0, t_0]$,
$L_i : W_2^2(\square) \to L_2(\square)$ – ограниченные симметричные операторы

$H_\varepsilon(\omega) := -\Delta + \sum\limits_{k\in\Gamma} S(k)L(\varepsilon\omega_k)S(-k)$ в $L_2(\Pi)$ с краевым условием Дирихле/Неймана; $(S(k)u)(x) := u(x' - k, x_{n+1})$;

ω_k – независимые одинаково распределённые случайные величины
Пример: $H_\varepsilon(\omega) := -\Delta + \varepsilon \sum\limits_{k\in\Gamma} \omega_k V(x-k)$, $V \in C_0(\square)$

Результаты

Доказаны оценки начальных масштабов – первый шаг к доказательству локализации Андерсона для данной модели. Локализация Андерсона: спектр чисто точечный.

$$\mathbb{P}\left(\|\chi_{B_1}(H_N^\varepsilon-\lambda)^{-1}\chi_{B_2}\|\leqslant 2\sqrt{N}\mathrm{e}^{-\frac{c_3\,\mathrm{dist}(B_1,B_2)}{\sqrt{N}}}\ \forall\,\lambda\leqslant\Lambda_0+\frac{1}{2\sqrt{N}}\right)$$
$$\geqslant 1-N^{n\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\mathrm{e}^{-c_4N^{\frac{n}{\gamma}}},$$

χ_B – характеристическая функция.

Направления

- Теория усреднения
- Возмущения непрерывных спектров в различных моделях, в том числе, в моделях квантовых и акустических волноводов
- Случайные операторы
- Качественная теория периодических операторов
- Задачи в тонких областях
- Спектральная теория линейных PT-симметричных операторов
- Нелинейные эволюционные PT-симметричные уравнения