

Гурвицевы группы и гурвицевы образующие

Максим Всемиров

(ПОМИ РАН, Санкт-Петербург)

Конференция профессоров РАН
по Отделению математических наук РАН
Москва, МИАН, 15 июня 2016

Определение

Группа называется $(2,3,7)$ -порожденной, если она порождается инволюцией и элементом порядка 3, причем произведение этих образующих имеет порядок 7.

Определение

Конечные $(2,3,7)$ -порожденные группы называются гурвицевыми

Гурвицевы группы — это в точности нетривиальные конечные гомоморфные образы “группы треугольника” $T(2,3,7)$

$$T(2,3,7) = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = (XY)^7 = 1 \rangle.$$

Почему именно $(2,3,7)$?

Можно рассматривать (k, ℓ, m) -порожденные группы.

$$T(k, \ell, m) = \langle X, Y \mid X^k = Y^\ell = (XY)^m = 1 \rangle.$$

Известно:

- если $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} > 1$, то $T(k, \ell, m)$ конечна,
- если $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} = 1$, то $T(k, \ell, m)$ содержит абелеву нормальную подгруппу конечного индекса,
- если $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} < 1$, то $T(k, \ell, m)$ бесконечна и имеет сложную структуру.

Почему именно $(2,3,7)$?

Можно рассматривать (k, ℓ, m) -порожденные группы.

$$T(k, \ell, m) = \langle X, Y \mid X^k = Y^\ell = (XY)^m = 1 \rangle.$$

Известно:

- если $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} > 1$, то $T(k, \ell, m)$ конечна,
- если $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} = 1$, то $T(k, \ell, m)$ содержит абелеву нормальную подгруппу конечного индекса,
- если $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} < 1$, то $T(k, \ell, m)$ бесконечна и имеет сложную структуру.

Теорема (Hurwitz)

- Пусть R — компактная комплексная Риманова поверхность рода $g \geq 2$. Тогда $|\text{Aut} R| \leq 84(g - 1)$.

Почему именно $(2,3,7)$?

Можно рассматривать (k, ℓ, m) -порожденные группы.

$$T(k, \ell, m) = \langle X, Y \mid X^k = Y^\ell = (XY)^m = 1 \rangle.$$

Известно:

- если $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} > 1$, то $T(k, \ell, m)$ конечна,
- если $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} = 1$, то $T(k, \ell, m)$ содержит абелеву нормальную подгруппу конечного индекса,
- если $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} < 1$, то $T(k, \ell, m)$ бесконечна и имеет сложную структуру.

Теорема (Hurwitz)

- Пусть R — компактная комплексная Риманова поверхность рода $g \geq 2$. Тогда $|\text{Aut} R| \leq 84(g - 1)$.
- Конечная группа G порядка $84(g - 1)$ является группой автоморфизмов некоторой компактной Римановой поверхности рода g тогда и только тогда, когда G гурвицева.

- $\mathrm{PSL}_2(7) \simeq \mathrm{SL}_3(2)$, порядок 168, род 3

гурвицевы образующие:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Риманова поверхность — кватрика Клейна:

$$a^3b + b^3c + c^3a = 0.$$

- $\mathrm{PSL}_2(7) \simeq \mathrm{SL}_3(2)$, порядок 168, род 3

гурвицевы образующие:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Риманова поверхность — кватрика Клейна:

$$a^3b + b^3c + c^3a = 0.$$

- $\mathrm{PSL}_2(8)$, порядок 504, род 7,

гурвицевы образующие:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{-1} \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\epsilon^6 + \epsilon^5 + \epsilon^4 + \epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0.$$

- $\mathrm{PSL}_2(13)$, порядок 1092, род 14,
гурвицевы образующие:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 10 \end{pmatrix};$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теорема (Macbeath, 1969)

Группы $\mathrm{PSL}_2(q)$ гурвицевы в точности в следующих случаях:

- $q = p$, p простое, $p \equiv 0, \pm 1 \pmod{7}$;
- $q = p^3$, p простое, $p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$;

Для $q \neq 7$ имеется три класса сопряженности гурвицевых образующих; один класс для $q = 7$.

Теорема (Macbeath, 1969)

Группы $\mathrm{PSL}_2(q)$ гурвицевы в точности в следующих случаях:

- $q = p$, p простое, $p \equiv 0, \pm 1 \pmod{7}$;
- $q = p^3$, p простое, $p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$;

Для $q \neq 7$ имеется три класса сопряженности гурвицевых образующих; один класс для $q = 7$.

- Всякая гурвицева подгруппа $\mathrm{PSL}_3(q)$ изоморфна одной из групп в списке Макбета (Cohen, 1981).

Теорема (Macbeath, 1969)

Группы $\mathrm{PSL}_2(q)$ гурвицевы в точности в следующих случаях:

- $q = p$, p простое, $p \equiv 0, \pm 1 \pmod{7}$;
- $q = p^3$, p простое, $p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$;

Для $q \neq 7$ имеется три класса сопряженности гурвицевых образующих; один класс для $q = 7$.

- Всякая гурвицева подгруппа $\mathrm{PSL}_3(q)$ изоморфна одной из групп в списке Макбета (Cohen, 1981).
- Возникла гипотеза, что гурвицевы группы встречаются довольно “редко”.

Теорема (Macbeath, 1969)

Группы $\mathrm{PSL}_2(q)$ гурвицевы в точности в следующих случаях:

- $q = p$, p простое, $p \equiv 0, \pm 1 \pmod{7}$;
- $q = p^3$, p простое, $p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$;

Для $q \neq 7$ имеется три класса сопряженности гурвицевых образующих; один класс для $q = 7$.

- Всякая гурвицева подгруппа $\mathrm{PSL}_3(q)$ изоморфна одной из групп в списке Макбета (Cohen, 1981).
- Возникла гипотеза, что гурвицевы группы встречаются довольно “редко”.
- Оказывается, что ситуация в точности противоположная!

Теорема (Conder, 1980)

Группы A_n гурвицевы для всех $n > 167$.

Гурвицевы группы большого ранга

Теорема (Conder, 1980)

Группы A_n гурвицевы для всех $n > 167$.

Теорема (Lucchini, Tamburini, Wilson, 2000)

Для всех $n \geq 287$ и всех q группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Гурвицевы группы большого ранга

Теорема (Conder, 1980)

Группы A_n гурвицевы для всех $n > 167$.

Теорема (Lucchini, Tamburini, Wilson, 2000)

Для всех $n \geq 287$ и всех q группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Теорема (V., 2004)

Для всех $n \geq 252$ и для всех q группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Гурвицевы группы большого ранга

Теорема (Conder, 1980)

Группы A_n гурвицевы для всех $n > 167$.

Теорема (Lucchini, Tamburini, Wilson, 2000)

Для всех $n \geq 287$ и всех q группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Теорема (V., 2004)

Для всех $n \geq 252$ и для всех q группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Теорема (V., 2004; Sun 2005)

Группы $SL_{49}(q)$ гурвицевы для всех q .

Теорема (Lucchini, Tamburini, 1999)

Для всех $n \geq 371$ следующие группы гурвицевы:

- $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $\mathrm{SU}_{2n}(q^2)$, $\Omega_{2n}^+(q)$, q произвольно,
- $\mathrm{SU}_{2n+7}(q^2)$, $\Omega_{2n+7}(q)$, q нечетно.

Теорема (Di Martino, Tamburini, Zalesskii, 2000; Vincent, Zalesskii, 2007)

- Если $n \leq 11$ или $n = 13$ и $(n, q) \neq (2, 8), (3, 2)$, то группы $SL_n(q)$ и $SU_n(q)$ не гурвицевы.
- Если $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ и q нечетно, то группы $Sp_n(q)$ не гурвицевы.

Теорема (Di Martino, Tamburini, Zalesskii, 2000; Vincent, Zalesskii, 2007)

- Если $n \leq 11$ или $n = 13$ и $(n, q) \neq (2, 8), (3, 2)$, то группы $SL_n(q)$ и $SU_n(q)$ не гурвицевы.
- Если $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ и q нечетно, то группы $Sp_n(q)$ не гурвицевы.

Теорема (Vincent, Zalesskii, 2007)

Если $q \not\equiv 1 \pmod{7}$, то группы $SL_{12}(q)$ не гурвицевы.

Аналогичные результаты известны для многих других пар (n, q) , $n \leq 38$ (Vincent, Zalesskii, 2007).

Гурвицевы подгруппы $\mathrm{PSL}_n(q)$, $n = 3, 4$

Теорема (Cohen, 1981)

Всякая неприводимая гурвицева подгруппа $\mathrm{PSL}_3(q)$ изоморфна одной из групп из списка Макбета.

Теорема (Tamburini, V.)

Всякая неприводимая гурвицева подгруппа $\mathrm{PSL}_4(q)$ либо изоморфна одной из групп из списка Макбета, либо изоморфна $\mathrm{PSL}_2(p) \times \mathrm{PSL}_2(p)$, $p \equiv \pm 1 \pmod{7}$.

Теорема (Tamburini, Zaleskii)

Неприводимые гурвицевы подгруппы в $\mathrm{PSL}_5(q)$ исчерпываются следующими сериями:

- $\mathrm{PSL}_5(p)$, p простое, $p \equiv 1, 6 \pmod{35}$;
- $\mathrm{PSL}_5(p^3)$, p простое, $p \equiv 11, 16, 26, 31 \pmod{35}$;
- $\mathrm{PSU}_5(p^2)$, p простое, $p \equiv 29, 34 \pmod{35}$;
- $\mathrm{PSU}_5(p^4)$, p простое, $p \equiv 8, 13, 22, 27 \pmod{35}$ или $p = 7$;
- $\mathrm{PSU}_5(p^6)$, p простое, $p \equiv 4, 9, 19, 24 \pmod{35}$;
- $\mathrm{PSU}_5(p^{12})$, p простое, $p \equiv 2, 3, 12, 17, 18, 23, 32, 33 \pmod{35}$.

Теорема (Tamburini, V., 2009)

Пусть $p \neq 3$ и n_6 — порядок p по модулю 9. Следующие группы гурвицевы

- $\mathrm{PSL}_6(p^{n_6})$, n_6 нечетно
- $\mathrm{PSU}_6(p^{n_6})$, n_6 четно.

Теорема (Tamburini, Vsemirnov)

Пусть $p \neq 7$ и n_7 — порядок p по модулю 49. Следующие группы гурвицевы

- $\mathrm{PSL}_7(p^{n_7})$, n_7 нечетно.
- $\mathrm{PSU}_7(p^{n_7})$, n_7 четно.

Нежесткий случай

Впервые появляется:

- $n = 6$, проективные группы (подгруппы $\mathrm{PSL}_n(q)$, q нечетно);
- $n = 6$, линейные группы (подгруппы $\mathrm{SL}_n(q)$, q четно);
- $n = 7$ линейные группы (подгруппы $\mathrm{SL}_n(q)$, q нечетно).

В отличие от жесткого случая имеются несопряженные пары гурвицевых образующих с одними и теми же инвариантами подобия.

Впервые появляется:

- $n = 6$, проективные группы (подгруппы $\mathrm{PSL}_n(q)$, q нечетно);
- $n = 6$, линейные группы (подгруппы $\mathrm{SL}_n(q)$, q четно);
- $n = 7$ линейные группы (подгруппы $\mathrm{SL}_n(q)$, q нечетно).

В отличие от жесткого случая имеются несопряженные пары гурвицевых образующих с одними и теми же инвариантами подобия.

Удается параметризовать.

Параметризация $(2,3,7)$ -троек над произвольным полем:

для $n = 7$: 5 семейств (Tamburini, V., 2009).

для $n = 6$ (V., 2016).

Исключительные группы типа Ли: теорема Малле

Теорема (Malle, 1990, 1995)

- $G_2(q)$ гурвицевы для всех $q \geq 5$;
- ${}^2G_2(3^{2m+1})$ гурвицевы для всех $m \geq 2$;
- ${}^3D_4(q)$ гурвицевы если и только если $q \neq 4$, $q \neq 3^m$;
- ${}^2F_4(2^{2m+1})$ гурвицевы если и только если $m \equiv 1 \pmod{3}$.

Исключительные группы типа Ли: теорема Малле

Теорема (Malle, 1990, 1995)

- $G_2(q)$ гурвицевы для всех $q \geq 5$;
- ${}^2G_2(3^{2m+1})$ гурвицевы для всех $m \geq 2$;
- ${}^3D_4(q)$ гурвицевы если и только если $q \neq 4$, $q \neq 3^m$;
- ${}^2F_4(2^{2m+1})$ гурвицевы если и только если $m \equiv 1 \pmod{3}$.

Идея доказательства. Пусть G — конечная группа, X , Y , Z — классы сопряженности. Для фиксированного $z \in Z$ число решений уравнения $xu = z$, $x \in X$, $u \in Y$ равно

$$\frac{|X| \cdot |Y|}{|G|} \sum_{\chi \in Irr(G)} \frac{\chi(X)\chi(Y)\overline{\chi(Z)}}{\chi(1)}.$$

Теорема (V., 2016)

Неприводимые гурвицевы подгруппы $SL_7(q)$, q нечетно исчерпываются следующими

- $G_2(q)$, $q > 4$;
- ${}^2G_2(3^{2m+1})$, $m > 0$;
- $PSL_2(q)$;
- J_1 ;
- $PSL_2(8)$;
- $PSL_2(7)$;
- $PSL_2(7).2^3$.

В каждом случае все допустимые наборы гурвицевых образующих (с точностью до сопряженности) указаны явно.

Гурвицевы образующие с фиксированным порядком коммутатора

Теорема (V., 2006)

Для простого $p \geq 5$ группа $G_2(p)$ является гомоморфным образом группы

$$(2, 3, 7; 2p) = \langle x, y : x^2 = y^3 = (xy)^7 = [x, y]^{2p} = 1 \rangle.$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определение

$$(2,3,7;n) = \langle x, y : x^2 = y^3 = (xy)^7 = [x, y]^n = 1 \rangle.$$

Определение

$$(2,3,7;n) = \langle x, y : x^2 = y^3 = (xy)^7 = [x, y]^n = 1 \rangle.$$

Теорема (Holt, Plesken, and Souvignier, 1997; Howie, Thomas, 1993)

Группа $(2,3,7;n)$ бесконечна в точности при $n \geq 9$.

Группы $(2,3,7;n)$

Определение

$$(2,3,7;n) = \langle x, y : x^2 = y^3 = (xy)^7 = [x, y]^n = 1 \rangle.$$

Теорема (Holt, Plesken, and Souvignier, 1997; Howie, Thomas, 1993)

Группа $(2,3,7;n)$ бесконечна в точности при $n \geq 9$.

Для $n > 9$ можно дать новое доказательство, используя классификацию $(2,3,7)$ -троек в $GL_7(\mathbb{C})$:

Теорема (V.)

Для $n > 9$ группа $(2,3,7;n)$ имеет бесконечное 7-мерное представление.

Теорема (V., 2016)

Для всякого $n > 60$ существует q , для которого группа $\mathrm{PSL}_2(q)$ гурвицева и для её гурвицевых образующих x, y порядок $[x, y]$ в точности равен n .