

Методы нелинейной теории упругости в задачах численной геометрии

Гаранжа В.А.

ВЦ РАН garan@ccas.ru

- ▶ Принцип оптимальности отображений по П.Л. Чебышёву;
- ▶ обзор применений квазиизометрических отображений в прикладных задачах;
- ▶ “конструирование” поливыпуклых гиперупругих материалов и построение квазиизометрических деформаций с заданными свойствами;
- ▶ постановка задачи оптимизации и “распутывания” расчетных сеток и практические итерационные алгоритмы;
- ▶ метод упругой разгрузки для решения геометрических задач;
- ▶ применение теории упругости с конечными деформациями в задачах построения расчетных сеток;

Принцип оптимальности отображений по П.Л. Чебышёву, I

П.Л. Чебышев, Черчение географических карт. 1856

104

П. Л. ЧЕБЫШЕВ

Окончательное решение о наивыгоднейшей проекции карт очень просто: наивыгоднейшая проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину, легко определяемую по принятой нормальной величине масштаба *). Что же ка-

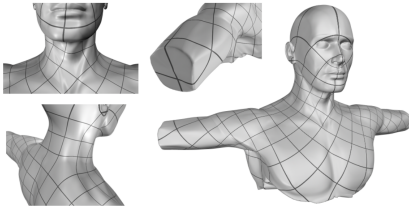
проекции, где это имеет место. На основании же свойства наивыгоднейшей проекции вообще нетрудно показать, при изображении каких именно земель такие проекции будут наивыгоднейшими: границы этих земель определятся точками, в которых масштаб, при этом роде проекций, сохраняет одну и ту же величину. Границы земель, таким образом определяемые, представляют вообще довольно сложные кривые линии. Но по мере уменьшения пространства, изображаемого на карте, они упрощаются и быстро подходят к эллипсисам, так что они незначительно разнятся от этих линий при изображении земель даже пространств, как напр. Европейской части России. Эл-

липсоидального. В теоретическом отношении этот предмет тем более интересен, что он приводится к исследованию уравнения в частных производных, особенно замечательного и, между прочим, выражающего равновесие теплоты в пластинках бесконечно-тонких. Так вопрос о наивыгоднейшей проекции карт связан с этим замечательным свойством теплоты: при равновесии теплоты в круглой бесконечно-тонкой пластинке температура центра есть *среднее* температуры всех точек на окружности; то же для шара: температура центра—*среднее* температуры на поверхности.

Принцип оптимальности отображений по П.Л. Чебышёву, II

- ▶ Задача: построить проекцию с наименьшей относительной ошибкой длины пути
- ▶ гипотеза Чебышёва - среди конформных параметризаций регулярной поверхности с краем, оптимальной является та, которая изометрична на границы области.
- ▶ проекция Чебышёва - для страны строится простая объемлющая фигура. Для этой фигуры строится оптимальная конформная проекция на плоскость. Для европейской части Российской империи Чебышёв построил карту с ошибкой масштаба не превышающей "одну милю на двадцать пять".
- ▶ считается, что гипотезу Чебышёва об оптимальности отображений доказал Д.А. Браве, 1896;
- ▶ Пример доказательства оптимальности энергии Дирихле логарифма масштаба:
Springborn, B., Schroder, P., Pinkall, U. 2008. Conformal Equivalence of Triangle Meshes. ACM Trans. Graph. 27, 3, Article 77 (August 2008)

Конформные отображения для натягивания текстур и пример доказательства гипотезы Чебышёва



Springborn, B., Schroder, P., Pinkall, U. 2008. Conformal Equivalence of Triangle Meshes. ACM Trans. Graph. 27, 3, Article 77 (August 2008)

- ▶ Формулируется дискретный принцип конформной эквивалентности метрик на триангуляциях;
- ▶ для каждой вершине триангуляции задается целевое значение полного угла;
- ▶ строится метрика, конформно-эквивалентная заданной, реализующая заданные полные углы;
- ▶ доказано, что дискретная конформная энергия является выпуклой функцией углов и длин сторон искомой триангуляции на плоскости
- ▶ на каждом шаге выпуклой минимизации решается задача вида

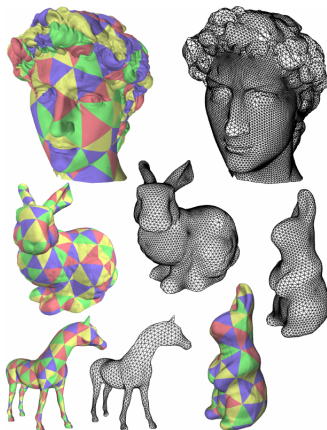
$$\Delta_h u = K,$$

где u - логарифм изменения масштаба, Δ_h - дискретный аналог оператора Лапласа-Бельтрами, а K - дискретный аналог гауссовой кривизны (угловой избыток вершины триангуляции)

- ▶ если заданы нулевые граничные условия первого рода для u (условие изометрии), то энергия Дирихле u минимальна!

Применение квазиизометрических отображений в прикладных задачах:
построение глобально гладких (“бесшовных”) параметризаций поверхности с
малым искажением

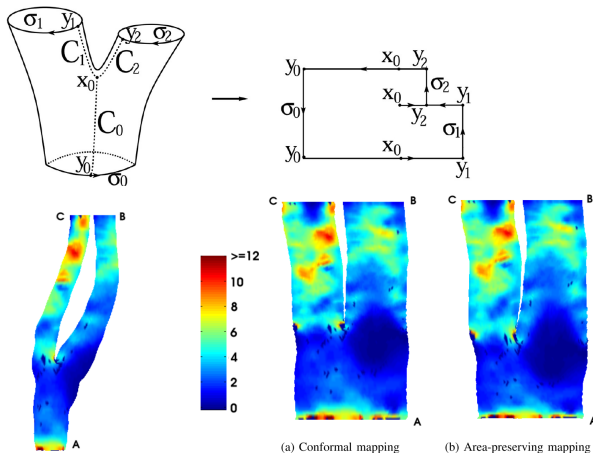
Globally Smooth Parameterizations with Low Distortion. Andrei Khodakovsky Caltech,
Nathan Litke Caltech, Peter Schroder Caltech ACM.Transactions on Graphics,
22:350–357, 2003.



Параметризация строится как дискретное гармоническое отображение
поверхности на абстрактный многогранник

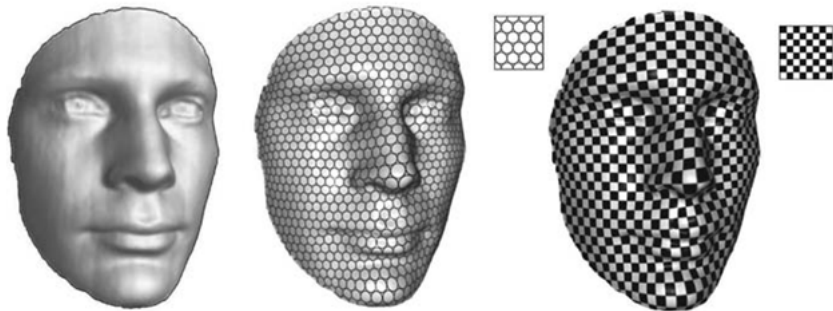
Применение квазиизометрических отображений в задачах вычислительной анатомии

Распластывание поверхности сосуда (IEEE TRANSACTIONS ON MEDICAL IMAGING, VOL. 24, NO. 2, FEBRUARY 2005 Flattening Maps for the Visualization Multibranched Vessels. Lei Zhu, Steven Haker, and Allen Tannenbaum).



Показана схема распаствывания, сосуд с распределением поверхностного сдвигового напряжения, и два типа распаствывания.

Применение квазиизометрических отображений в прикладных задачах:
параметризация поверхности (натягивание текстур и другие задачи)

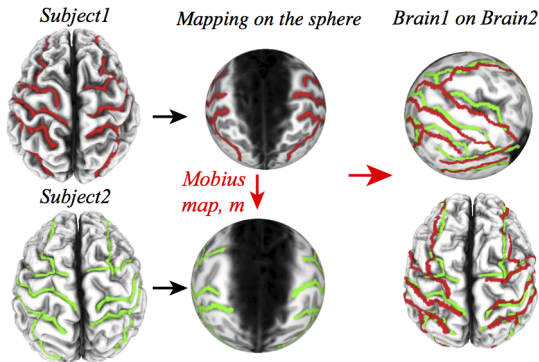


Surface Parameterization: a Tutorial and Survey. Michael S. Floater and Kai Hormann
Advances in multiresolution for geometric modelling 1 (1), 2005.

Применение квазиизометрических отображений в прикладных задачах: построение отображения коры головного мозга на поверхность сферы



THE ECONOMIST JANUARY 27TH 2001



Применение квазиизометрических отображений в прикладных задачах: распластывание интерфейсов в задачах молекулярной биологии

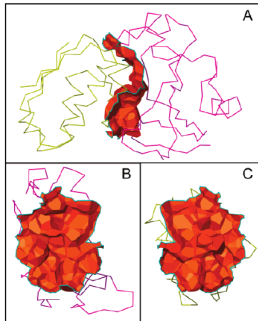
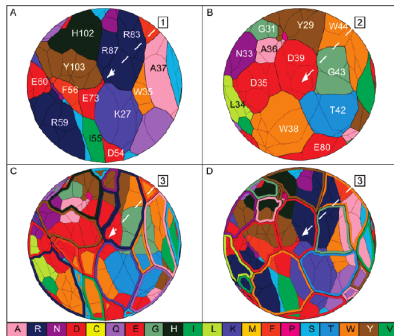
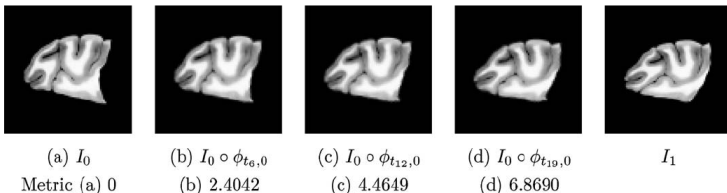


Figure 1. Three-dimensional interface. (A) Interface surface for barnase/barstar (1BRS) complex, with barnase colored purple and barstar colored yellow; (B) image from panel A rotated to show the barstar side of the interface against the barnase protein; (C) image from panel A rotated to show the barnase side of the interface against the barstar protein.



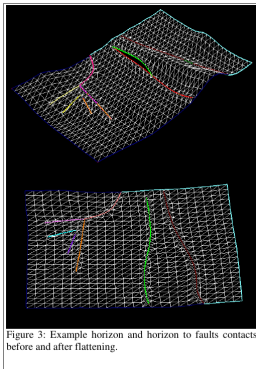
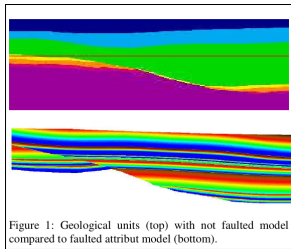
Protein-Protein Interfaces: Properties, Preferences, and Projections Jeffrey J. Headd, Y. E. Andrew Ban, Paul Brown, Herbert Edelsbrunner, Madhuwanti Vaidya, and Johannes Rudolph, 2007

Применение квазиизометрических отображений в прикладных задачах:
вычисление метрического расстояния в задачах распознавания



International Journal of Computer Vision 61(2), 139–157, 2005 Computing Large Deformation Metric Mappings via Geodesic Flows of Diffeomorphisms. MIRZA FAISAL BEG, MICHAEL I. MILLER, ALAIN TROUVE, LAURENT YOUNES

Применение квазиизометрических отображений в прикладных задачах: отображение хроностратиграфических слоев на плоскости с учетом сбросов.



Using a ChronoStratigraphic Unfolding Workflow to build an a priori model for Stratigraphic Inversion with accurate Horizon and Fault Fitting. Jean-Francois Rainaud, Vincent Clochard and Thomas Crabie (IFPEN), Houman Borouchaki (INRIA).

Вариационный принцип теории упругости в лагранжевых координатах

- ▶ Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 - лагранжевы координаты, а x_1, x_2, x_3 - эйлеровы координаты материальной точки.
- ▶ Отображение $x(\xi)$ задает стационарную деформацию упругого тела.
- ▶ Матрица Якоби отображения $x(\xi)$ обозначается через C , где $c_{ij} = \partial x_i / \partial \xi_j$.

Упругая деформация $x(\xi)$ является минимизирующим отображением для следующего функционала (запасенной энергии)

$$J(x) = \int_{\Omega} W(C) d\xi,$$

где $W(C)$ - упругий потенциал, а область Ω задает упругое тело в лагранжевых координатах.

Свойства упругого потенциала, I

- ▶ инвариантность и объективность: $W(UCV^T) = W(C)$, где $U^T U = I$, $\det U = 1$, $V^T V = I$, $\det V = 1$;
- ▶ абсолютный минимум $W(C)$ достигается при $C = U$, где $U^T U = I$, $\det U = 1$;
- ▶ закон Гука и определение постоянных Ламе λ , μ :

$$W(C) = W(I) + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} \mathcal{E})^2 + \mu \operatorname{tr} \mathcal{E}^2 + o(\|\mathcal{E}\|^2),$$

где $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(C^T C - I)$ - тензор деформации Грина – Сен-Венана.

Свойства упругого потенциала, II

Теоремы существования вариационных задач теории упругости [Ball J.M. Arch. Rat. Mech. Analys. 1977. V.63. P.337-403.] основаны на следующих дополнительных требованиях:

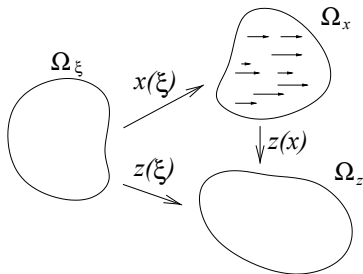
- ▶ упругая деформация ищется в классе соболевских отображений;
- ▶ барьерность: $W(C) \rightarrow +\infty$ при $\det C \rightarrow +0$ - бесконечная энергия при сингулярном сжатии материала. Это свойство несовместимо с выпуклостью [Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992.];
- ▶ поливыпуклость: $W(C)$ является непрерывной выпуклой функцией миноров матрицы C , например, в трехмерном случае существует непрерывная выпуклая функция Φ такая, что $W(C) = \Phi(C, \det C, \text{cof } C)$;
- ▶ условия роста (достаточно быстрый рост энергии при растяжении материала)

Поливывуклость, выпуклость ранга 1 и условие эллиптичности, I

Функция $W(C) : \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется выпуклой по рангу 1, если для нее справедливо неравенство

$$W(\lambda C_1 + (1 - \lambda)C_2) \leq \lambda W(C_1) + (1 - \lambda)W(C_2), \quad (1)$$

$$\text{rank}(C_1 - C_2) = 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$



Неравномерный сдвиг вдоль одной переменной - градиент отображения $x(\xi) + z(\xi)$ имеет ранг 1, и $\tilde{J}(z) = J(x + z)$ -выпуклый функционал.

Джон Болл, 1977: Каждая поливыпуклая функция является выпуклой по рангу 1. Ниже будет показано, как использовать это свойство для построения эффективного метода минимизации.

Поливыпуклость, выпуклость ранга 1 и условие эллиптичности, II

Если функция $W(C)$ дважды непрерывно дифференцируема, то выпуклость по рангу 1 эквивалентна следующему условию Адамара-Лежандра

$$\sum_{i,j,k,p=1}^d \frac{\partial^2 W}{\partial c_{ik} \partial c_{jp}} p_i p_j r_k r_p \geq 0, \quad (2)$$

где c_{ik} - элементы матрицы C , а $p, r \in \mathbb{R}^d$ - произвольные векторы.

Это условие называют также условием эллиптичности уравнений

Эйлера-Лагранжа функционала энергии.

Если функция $W(\cdot)$ выпукла по рангу 1, то функция $\tilde{W}(Q) = W(C + Q)$ является выпуклой для произвольной матрицы Q такой, что $\text{rank } Q = 1$. Таким образом, матрица Гессе функции $\tilde{W}$ размерности $d^2 \times d^2$ является неотрицательно определенной на векторах специального вида. Другими словами, справедливо неравенство

$$\sum_{i,j,k,m} q_{ij} \frac{\partial^2 W}{\partial c_{ij} \partial c_{km}}(C) q_{km} \geq 0 \quad (3)$$

Поскольку любую матрицу ранга 1 можно записать в виде $Q = pr^T$, или $q_{ij} = p_i r_j$, из неравенства (3) следует (2).

Поливыпуклые меры искажения

Поливыпуклая мера искажения формы.

$$\varphi(C) = \begin{cases} \frac{(\frac{1}{d} \operatorname{tr}(C^T C))^{d/2}}{\det C} & \text{при } \det C > 0 \\ +\infty & \text{при } \det C \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Функция $\varphi(C)$ выглядит особенно просто в двумерном случае.

$$\varphi(C) = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(C^T C)}{\det C} \quad (5)$$

Поливыпуклая мера искажения объема. Для того, чтобы функционал штрафовал сильное растяжение или сжатие, используются специальные поливыпуклые меры искажения, зависящие от $\det C = \det \nabla_{\xi} x$. Простейшая мера искажения может быть записана в виде

$$\mu(C) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\det C + \frac{1}{\det C}) & \text{при } \det C > 0 \\ +\infty & \text{при } \det C \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку $\mu(C)$ - выпуклая функция детерминанта S , она является поливыпуклой.

Простейший способ получения комбинированной меры основан на выпуклой линейной комбинации вида

$$W(C) = (1 - \theta)\varphi(C) + \theta\mu(C), \quad 0 < \theta < 1,$$

Мы только что "сконструировали" упругий материал! 

Минимизация функционала для отображения между двумя многообразиями как решение задачи разгрузки упругого материала

Пусть $G_\xi(\xi)$ - метрический тензор, задающий посредством линейного элемента метрику в лагранжевых координатах в областях Ω_ξ :

$$d\nu^2 = \sum_{ij} (G_\xi)_{ij} d\xi_i d\xi_j$$

Тогда функционал энергии можно записать в виде

$$J(x) = \int_{\Omega_\xi} W(\nabla_\xi x H^{-1}) \det H d\xi, \quad (7)$$

где

$$H^T H = G_\xi, \det H > 0,$$

- некоторая факторизация метрического тензора. Если существует квазиизометрическая параметризации $\eta(\xi)$ многообразия M_ξ , то H может быть выбраны как матрица Якоби этой параметризации. Функционал (7) зависит только от главных инвариантов матрицы $C^T C G_\xi^{-1}$.

Построение отображений с минимальным искажением

Квазиизометрический функционал (Гаранжа, 2000)

$$J_t(x) = \int_{\Omega_\xi} (1 - t) \frac{W(\nabla_\xi x H^{-1})}{1 - t W(\nabla_\xi x H^{-1})} \det H d \xi, \quad (8)$$

где t - скалярный параметр качества. Для построения квазиизометрической деформации необходимо решать задачи продолжения по t с целью получения $t = t_{\max}$ для данной задачи.

Весовой функционал (Гаранжа 2000, Иваненко 2000)

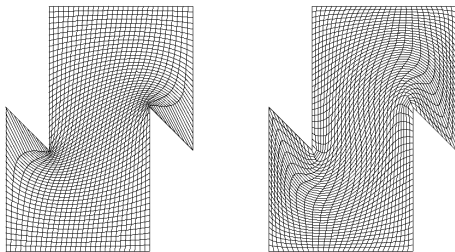
$$J_w(x) = \int_{\Omega_\xi} w(\xi) W(\nabla_\xi x H^{-1}) \det H d \xi, \quad (9)$$

Весовая функция w задается в лагранжевых координатах. Причем значения $w(\xi)$ велики там, где требуется наименьшее искажение. Как правило, наибольшее значение функции w задается у границы.

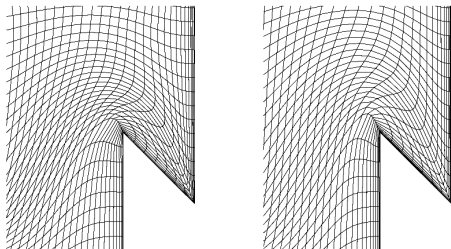
Теоретические результаты получены для квазиизометрического функционала. На практике используется весовой функционал.

Геометрические иллюстрации разных принципов оптимальности

Слева - отображение, обратное к гармоническому (функционал Винслоу), справа - квазиизометрическое отображение (функционал (8)).



Слева - функционал Винслоу с весом, справа - весовой функционал вида (9).



Квазиизометрическая регуляризация упругого потенциала

Пусть $W(C)$ - упругий потенциал. Пусть

$$W_{\alpha}(C) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{(\alpha - 1)^2 W(I) W(C)}{\alpha W(I) - W(C)} & \text{когда } \alpha W(I) - W(C) > 0 \\ +\infty & \text{когда } \alpha W(I) - W(C) \leq 0 \end{cases}, \quad 1 < \alpha < +\infty \quad (10)$$

Этот потенциал конечен при

$$W(C) < \alpha W(I) \quad (11)$$

Это преобразование сохраняет коэффициенты Ламе.

Теорема существования, I

Пусть Ω - ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим функционал

$$J_\alpha(x) = \int_{\Omega} W_\alpha(\nabla_\xi x) d\xi, \quad (12)$$

где $\nabla_\xi x = C$ матрица Якоби $x(\xi)$.

Зададим множество допустимых деформаций $\mathcal{A}_\alpha$ как

$$\mathcal{A}_\alpha = \{y \in W_p^1(\Omega), \ p > 3, \ W(\nabla_\xi y) < \alpha W(I) \text{ почти всюду в } \Omega\} \quad (13)$$

Теорема существования, II

Предполагается, что $W(C)$ такова, что:

- (P1) $W(C) : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ - поливыпуклая функция;
- (P2) $W(C) \geq W(U) = W(I) > 0$, для любого U такого, что $U^T U = 1$, $\det U = 1$;
- (P3) существуют непрерывные монотонно возрастающие функции $\phi_1(\alpha), \phi_2(\alpha)$ такие, что $\phi_i(1) = 1$, $\phi_i(+\infty) = +\infty$, и из неравенства $W(C) < \alpha W(I)$ следует

$$\det C > \frac{1}{\phi_1(\alpha)}, \quad \frac{1}{\phi_2(\alpha)} < k_i(C) < \phi_2(\alpha)$$

- (P4) существует непрерывная монотонно возрастающая функция $\phi_3(\alpha)$ такая, что если $\det C > 0$, и C удовлетворяет неравенству $\frac{1}{\phi_3(\alpha)} < k_i(C) < \phi_3(\alpha)$, то $W(C) < \alpha W(I)$

Теорема

Предположим, что функция $W(C)$ удовлетворяет условиям (P1)-(P4). Пусть $\Omega, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченные липшицевы области такие, что существует квазиизометрическое отображение $y_0(\xi) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}_1$, $y_0 \in \mathcal{A}_{\alpha_0}$ и $J_{\alpha_0}(y_0) < +\infty$ для некоторого $1 < \alpha_0 < +\infty$.

Тогда существует $x^*(\xi) \in \mathcal{A}_{\alpha_0}$ такой, что

$$J_{\alpha_0}(x^*) = \inf_{y \in \mathcal{A}_{\alpha_0}, y|_{\partial\Omega} = y_0|_{\partial\Omega}} J_{\alpha_0}(y) \quad (14)$$

и $x^*(\xi) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}_1$ - это квазиизометрическое отображение.

Дискретизация мер искажения

Рассмотрим отображение $x(\xi)$ из параметрической области Ω_ξ (на многообразии M_ξ) на расчетную область (на многообразии M_x). Предположим, что область Ω_ξ такова, что для нее существует нормальное разбиение из канонических ячеек K_k . Мету искажения отображения можно приблизить при помощи полудискретного функционала

$$J(x_h(\xi)) = \sum_{K_k} \int_{K_k} W(\nabla x_h(\xi)) d\xi$$

где $x_h(\xi)$ - непрерывное кусочно-гладкое отображение.

Если ячейки K_k - симплексы, то отображение $x_h(\xi)$ на каждом таком элементе можно положить аффинным, а матрицу Якоби - постоянной. Так что

$$J(x_h(\xi)) = \sum_k W(\nabla x_h(\xi))|_{K_k} \text{vol}(K_k) = J^h(x_h(\xi))$$

Когда локальное отображение не является аффинным, необходимо использовать квадратурные правила.

Для класса непрерывных кусочно-полиномиальных отображений, используя свойство поливыпуклости W , можно построить геометрические квадратуры, гарантирующие, что

$$J(x_h(\xi)) \leq J^h(x_h(\xi)),$$

где J^h обозначает дискретный функционал.

Смещение ранга 1

Предположим, что $W(C)$ - поливыпуклая функция.

Рассмотрим отображение $x(\xi)$ и смещение $\delta x(\xi)$ такое, что

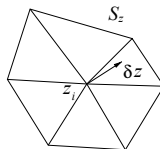
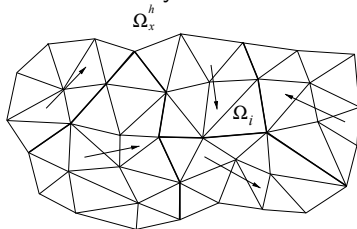
$$\text{rank } \nabla_{\xi} \delta x = 1$$

и отображение $x + \delta x$ является допустимым.

Тогда функционал

$$\int_{\Omega} W(\nabla_{\xi} x + \nabla_{\xi} \delta x) d\xi$$

является выпуклым по отношению к δx .



Примеры смещений ранга 1.

Локальная выпуклость дискретного функционала (двумерный пример)

- ▶ Пусть дискретный функционал строится при помощи кусочно-аффинного приближения. Пусть $z_i \in \mathbb{R}^2$ - положения вершин триангуляции $T^\times$ в расчетной области. Искомое решение - это матрица $Z = (z_1, \dots, z_{n_v})$.
- ▶ Обозначим через Z_1, Z_2 столбцы матрицы Z^T .
- ▶ Дискретный функционал, основанный на линейных треугольных элементах, можно записать как

$$J^h(Z) = F(Z_1, Z_2) = F(z_1, \dots, z_{n_v})$$

- ▶ Если мера искажения $W(C)$ поливыпукла, то функция F выпукла по отношению к каждому из аргументов $Z_i, i = 1, 2$ и $z_i, i = 1, \dots, n_v$.
- ▶ Это свойство справедливо и в d -мерном случае, при $d > 2$.

Метод минимизации: предобусловленный градиентный метод

- ▶ стандартный метод градиентного спуска;
- ▶ в качестве предобусловливателя используется блочно-диагональная часть матрицы Гессе;
- ▶ степень неявности легко контролировать;
- ▶ в ходе минимизации сетка не может вновь стать недопустимой;
- ▶ итерационный метод надежен и эффективен.

Сходимость к какой-либо стационарной точке доказана строго (Гаранжа, Капорин, 2005) для квазиизометрического функционала, а также для всех известных в теории гиперупругости поливыпуклых функций запасенной энергии .

Полученный метод является обобщением известного барьерного метода [Иваненко С.А., Чарахчян А.А. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т.28. No 4. С.503-514.]

Метод Ньютона

Градиент R функции $F(z_1, \dots, z_{n_v})$ составлен из 3-мерных векторов $r_k = \frac{\partial F}{\partial z_k}$.

Матрица Гессе H функции F составляется из 3×3 матриц $H_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j}$, причем матрица H_{ij} помещается на место пересечения i -й блочной строки и j -го блочного столбца.

Метода Ньютона - Рафсона для нахождения стационарной точки сеточного функционала можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n_v} H_{ij}(Z^l) \delta z_j + r_i(Z^l) = 0 \quad (15)$$

$$z_k^{l+1} = z_k^l - \tau_l \delta z_k, \quad k = 1, \dots, n_v \quad (16)$$

Одномерная минимизация

Итерационный параметр τ_l находится в результате приближенного решения одномерной задачи минимизации

$$\tau_l = \arg \min_{\tau} F(Z^l - \tau \delta Z)$$

Для решения этой одномерной задачи используется простейший метод деления пополам.

Для того, чтобы из общих формул (15) получить метод, аналогичный известному итерационному барьерному методу Иваненко-Чарахчяна, 1988, нужно положить $H_{ij} = 0$ при $i \neq j$. При этом для нахождения δz_i нужно решать независимые линейные системы размерности 3.

Для того, чтобы из (15) получить неявный метод (Гаранжа, 2000), в матрицах H_{ij} надо отбросить все внедиагональные члены. В этом случае линейная система (15) распадется на 3 независимых линейных системы относительно векторов δZ_m , которые получаются из δz_i при помощи равенств

$$(\delta Z_m)_i = (\delta z_i)_m \tag{17}$$

Метод двойного масштабирования, I

Пусть $B_i^T B_i = H_{ii}$ обозначают факторизации матриц 3×3 matrix H_{ii}

Рассмотрим блочную масштабированную матрицу $\tilde{H} = B^{-T} H B^{-1}$

$$\tilde{H}_{ij} = B_i^{-T} H_{ij} B_j^{-1}$$

Применим перестановку (17)

$$\bar{H} = P \tilde{H} P^T, \bar{H} = \begin{pmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} & \bar{H}_{13} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} & \bar{H}_{23} \\ \bar{H}_{31} & \bar{H}_{32} & \bar{H}_{33} \end{pmatrix}$$

Найдем приближенное решение 3-х независимых линейных систем с $n_v \times n_v$ матрицами $\bar{H}_{ii}$

Таким образом, матрица H аппроксимируется матрицей H' вида

$$H' = B^T P^T L L^T P B$$

где

$$L L^T \approx \text{blockdiag}(P B^{-T} H B^{-1} P^T)$$

это LU -факторизация второго порядка (Капорин, 1998)

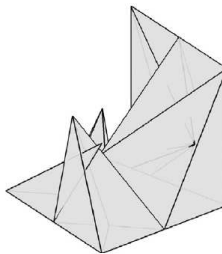
Поскольку матрица H симметрична, но не является положительно определенной, то положительная определенность матрицы H' не является очевидным фактом.

Это можно доказать, используя то, что H порождается поливыпуклым функционалом, и принимая во внимание тот факт, что аффинные преобразования не нарушают поливыпуклости.

Распутывание сеток

цитата из работы Danczyk J, Surech K. Finite element analysis over tangled simplicial meshes: Theory and implementation. Finite Elements in Analysis and Design 2013; 70-71:57-67.

Unfortunately, untangling is as difficult as mesh generation and optimization [7]. Indeed, as pointed in [6], none of these untangling methods are guaranteed to work, and *"failure to untangle a single tetrahedron forces the simulation to fail for most real world constitutive model"*. Therefore, a new extension to FEA is proposed in this paper; this extension provides the necessary framework for handling tangled meshes.



- ▶ Задача о распутывания расчетных сеток была поставлена С.А. Иваненко в 1988 г.;
- ▶ в 1999 г. в работе Гаранжи, Капорина был предложен алгоритм распутывания сеток, способный строить допустимые сетки с произвольного начального приближения.
- ▶ в настоящее время алгоритмы распутывания применяются для решения сложных прикладных задач.

Идея метода распутывания, II

Штрафная формулировка (Гаранжа, Капорин, 1999)

$$\chi(\det C) = \frac{1}{2}(\det C + \sqrt{\varepsilon^2 + \det C^2})$$

$$\varepsilon(Z) = (\delta_0^2 + 0.004 * (\min(0, \min(\det C(Z)|_I)))^2)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

Здесь $C(Z)$ - матрица Якоби деформации как функция координат вершин сетки.

Барьерная формулировка (Иваненко, 1997)

$$\chi(\det C) = \det C + \varepsilon \quad (19)$$

метод продолжения по параметру использует формулу пересчета

$$\varepsilon^{l+1} = \max(\delta_0, \varepsilon^l - \sigma(\varepsilon^l - |\min(\det C, 0)|)), \quad 0 < \sigma < 1 \quad (20)$$

Допустимая сетка строится посредством продолжения по параметру, используя последовательность параметров $\varepsilon_k \rightarrow 0$, которая зависит от минимального значения $\det C$ в расчетной области.

Theorem

Пусть допустимое множество непусто, т.е. существует сетка Z такая, что $F(Z) < +\infty$. Пусть на каждом шаге алгоритма спуска выполняется следующее условие существенного убывания

$$F_{\varepsilon l}(Z^{l+1}) \leq (1 - \sigma)F_{\varepsilon l}(Z^l),$$

где $1 > \sigma > 0$ - это постоянная из формулы (20). Тогда через конечное число шагов L будет выполнено $F_0(Z^L) < +\infty$.

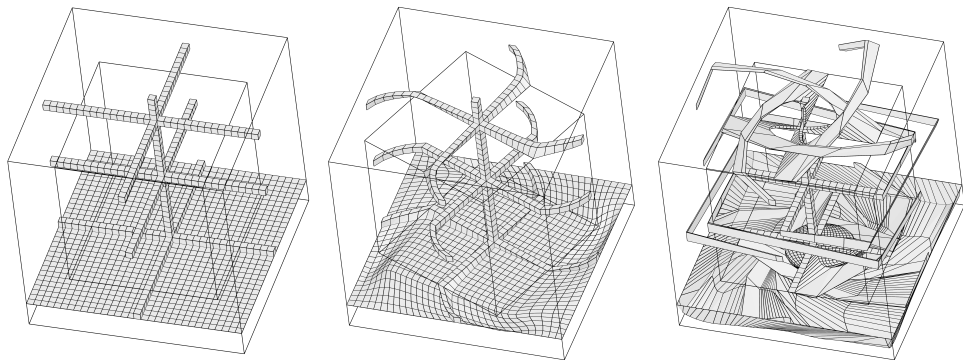
(Л.Н. Кудрявцева, В.А. Гаранжа, 2014)

Сам принцип конечного распутывания сформулирован Иваненко в 1997г., а здесь устраняется необходимость решать вариационную задачу на каждом шаге точно.

Потенциально конечность распутывания может быть доказана и для штрафного функционала.

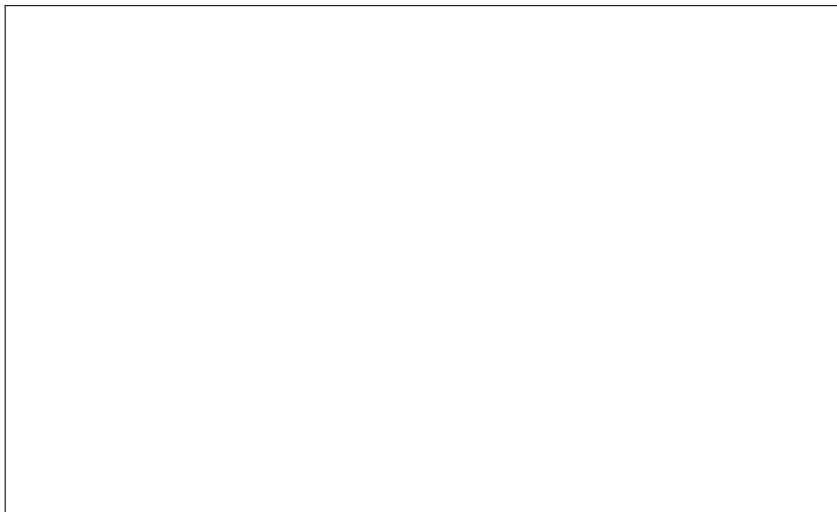
На практике используется штрафной функционал.

Распутывание и упругая деформация ячеек сетки при вращении внутреннего жесткого куба внутри упругого куба на угол $\pi/8$ и π , соответственно

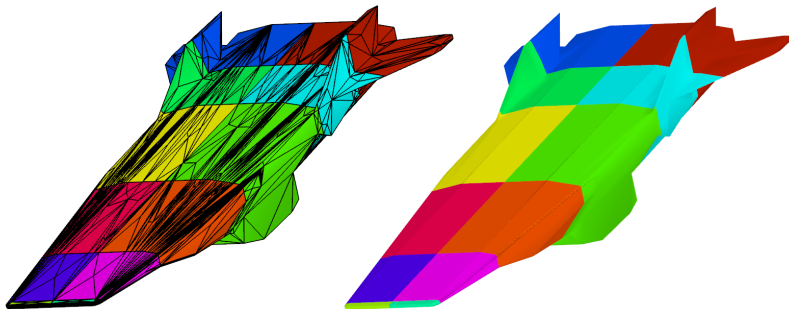


Жесткий тест на распутывание *Garanzha V.A., Kudryavtseva L.N., Utyzhnikov S.V.*
Untangling and optimization of spatial meshes // Journal of Computational and
Applied Mathematics. – 2014. – October. – V. 269 – P. 24–41.

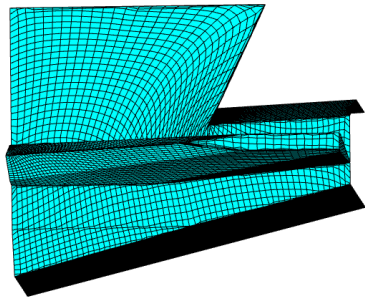
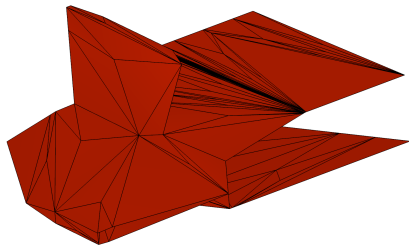
Распутывание и упругая деформация ячеек сетки



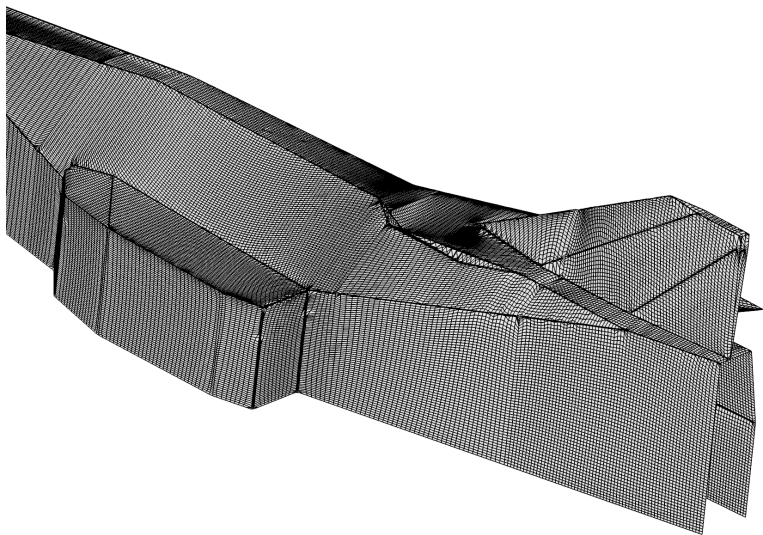
Модель гиперзвукового летательного аппарата



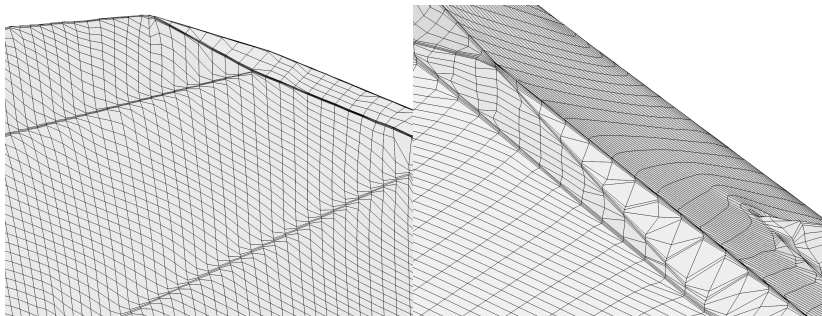
Фрагмент тесселяции поверхности, и сетка на поверхности



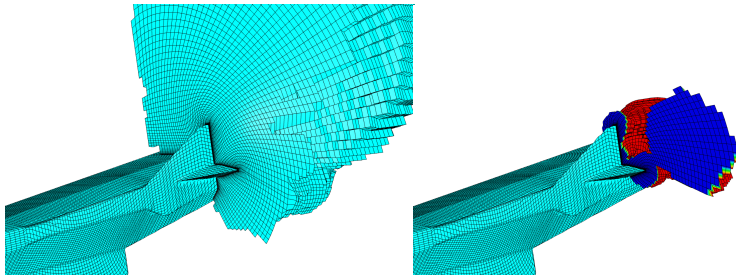
Адаптивная сетка на поверхности



Фрагменты адаптивной сетки

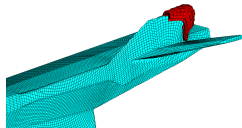
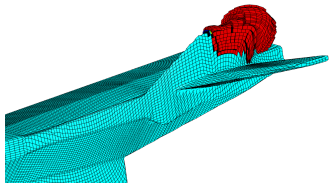


Адаптивный алгоритм распутывания трехмерный сеток: первая и вторая итерации



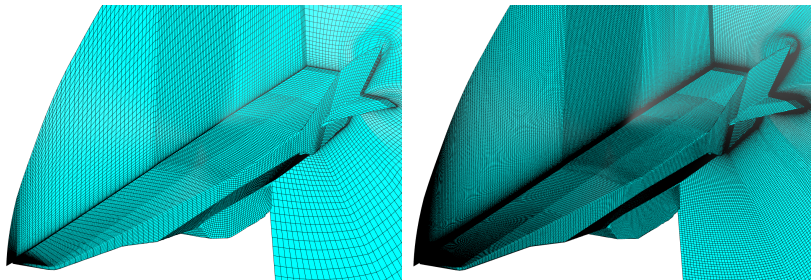
Слева - якобиан отрицателен в 165тыс. “квадратурных узлах”,
справа - якобиан отрицателен в 7 тыс. узлов.

Адаптивный алгоритм распутывания трехмерный сеток: третья и четвертая итерации

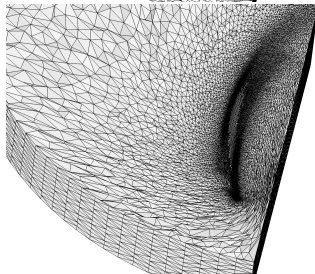
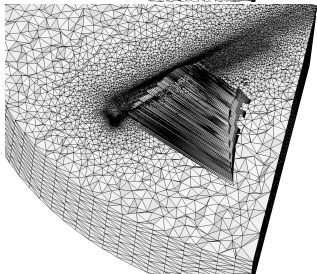
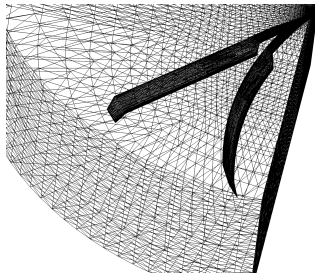
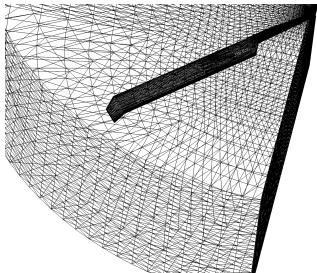


Слева - якобиан отрицателен в 250 “квадратурных узлах”,
справа - якобиан отрицателен в 3 узлах.

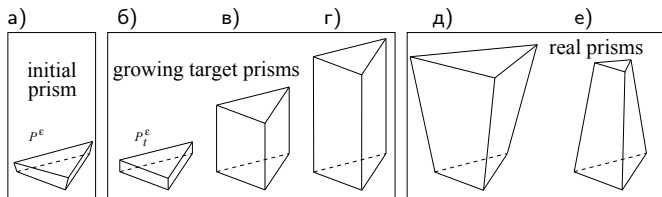
Блочная сетка и результат ее доразбиения - сетка
размером около 10^8 гексаэдров



Деформация винта вертолета и распутывание тетраэдральной сетки



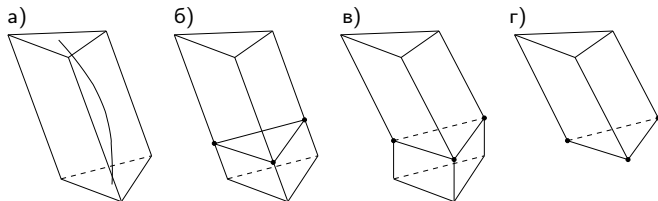
Построение толстых призматических слоев при помощи вариационного метода, I



К телу крепится тонкий слой сильно сжатого упругого материала. Затем он отпускается и в результате упругой разгрузки строится слой заданной толщины. Упругая разгрузка моделируется путем минимизации функционала с заданной метрикой. Метрика перестраивается в процессе построения слоя, увеличивая высоту целевых призм для призм сетки, как показано на рисунке.

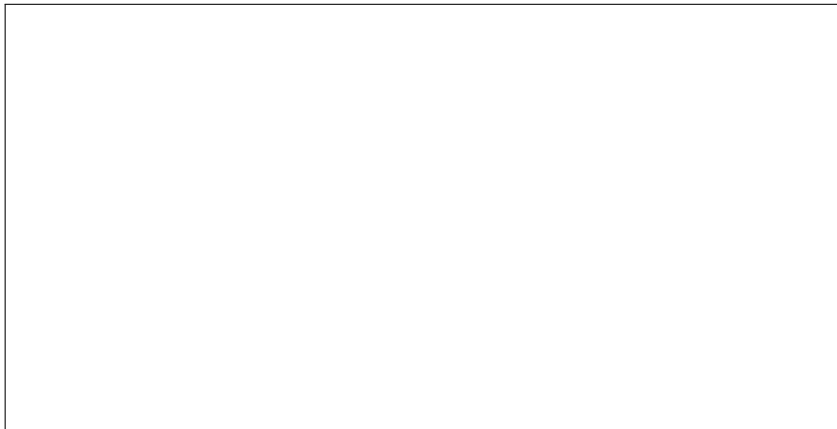
а) Начальная тонкая призма, б)-г) увеличение высоты целевой призмы, д)-е) - варианты конечных призм после упругой разгрузки.

Построение толстых призматических слоев при помощи вариационного метода, II

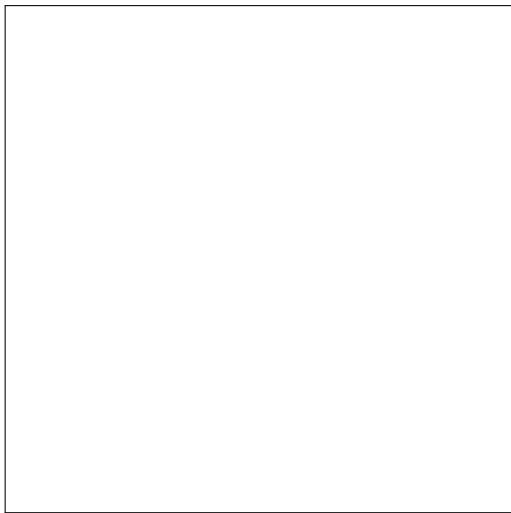


Последовательные шаги разбиения слоя и ортогонализации у нижней границы. После построения толстого слоя в одну ячейку производится доразбиение и ортогонализация слоя до исчерпания. Если верхняя поверхность слоя фиксирована, то мера неортогональности близка к нулю в нижней части слоя и максимальна вверху.

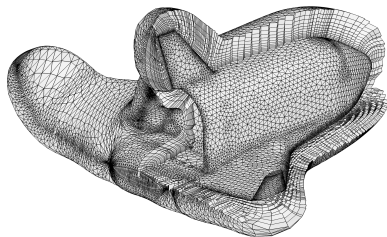
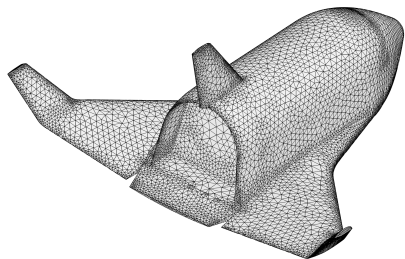
Построение призматического слоя вокруг самолета, I



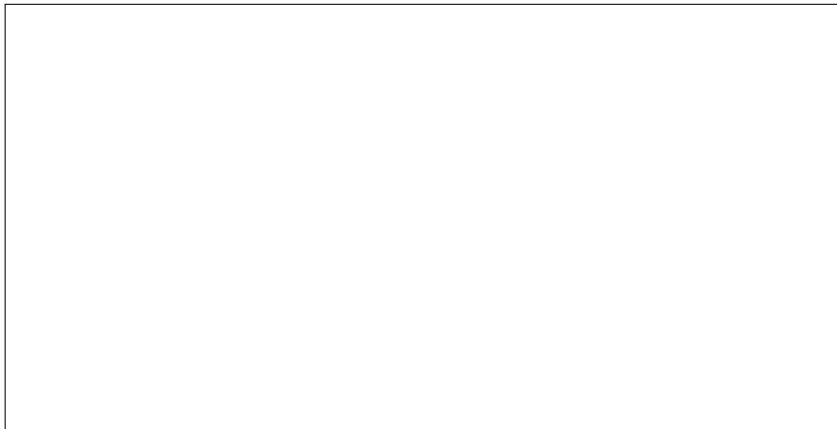
Построение призматического слоя вокруг самолета, II



Сетка на поверхности ВКА ЦАГИ и призматический слой

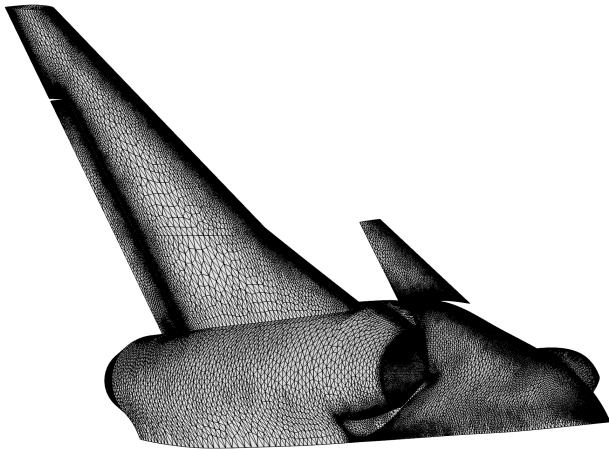


Процесс построения слоя вокруг ВКА ЦАГИ

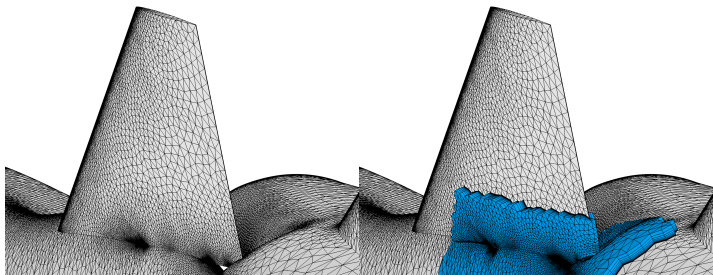


Метод упругой разгрузки для построения призматического сеточного слоя вокруг тел сложной формы

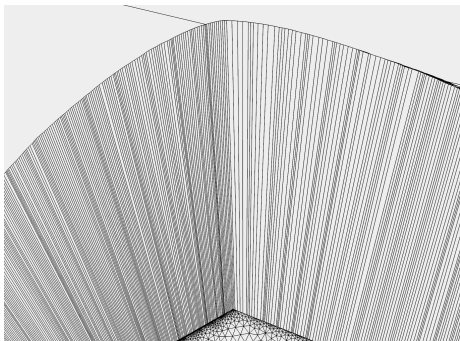
Модель “рафаль” с плохой параметрической деформацией:
предкрылок пересекает фюзеляж.



Модель “рафаль”, увеличенный фрагмент призматического слоя



При построении слоя призм отношение высоты призмы к основанию - это параметр жесткости дискретной задачи упругой разгрузки. В модели “рафаль” этот параметр достигает 10^3 !

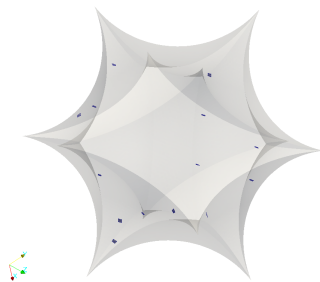
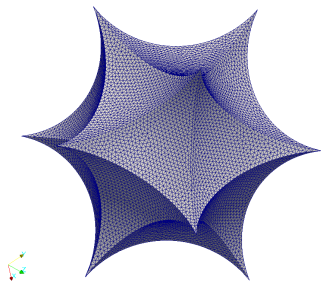


Такие жесткие задачи удалось решить только с использованием предобуславливателя с двойным масштабированием.

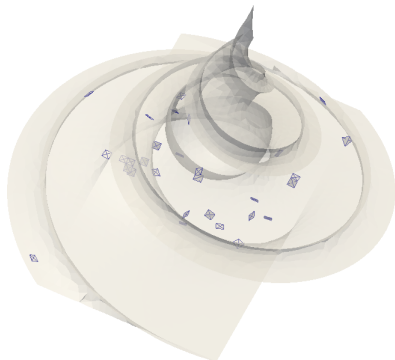
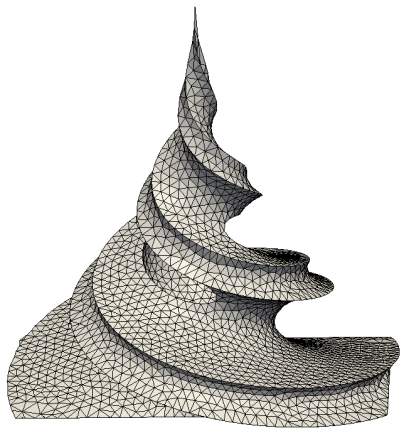
Совместно с А.И. Белокрыс-Федотовым, Л.Н. Кудрявцевой.

- ▶ Пусть трехмерная область задана как изоповерхность некоторой, вообще говоря, негладкой функции, скажем, на основе аппарата R -функций Рвачева;
- ▶ постановка задачи: построить тетраэдральную сетку Делоне, в которой неизвестные заранее острые ребра границы области приближаются цепочками ребер сетки;
- ▶ алгоритм основан на сетке как упругой сети, которая расправляется и заполняет объем области, и на специальном алгоритме обострения граничных ребер;
- ▶ такой алгоритм очень удобен для математиков, физиков, химиков, биологов, поскольку они могут построить сетку, просто задав расчетную область формулами, без использования пакетов геометрического моделирования;

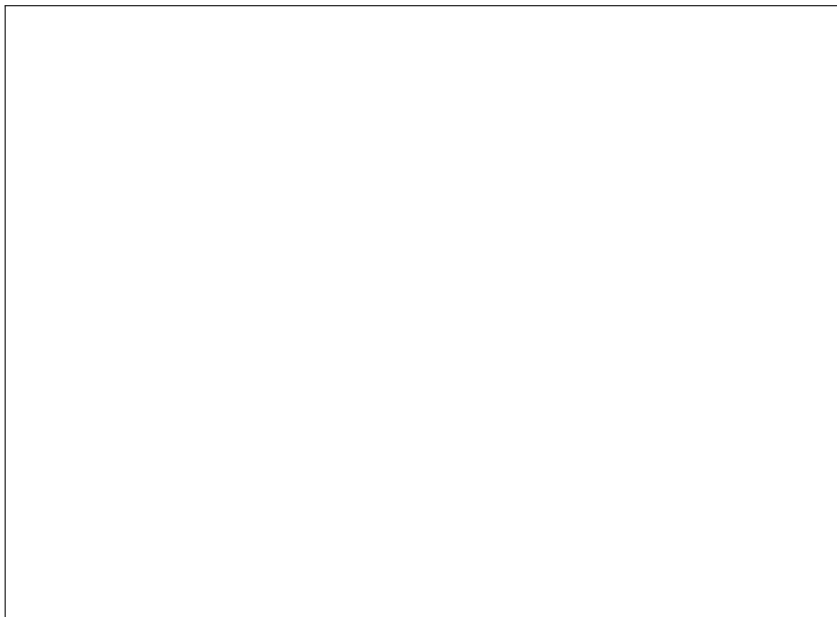
Примеры аналитически заданных тел и сетки Делоне, I



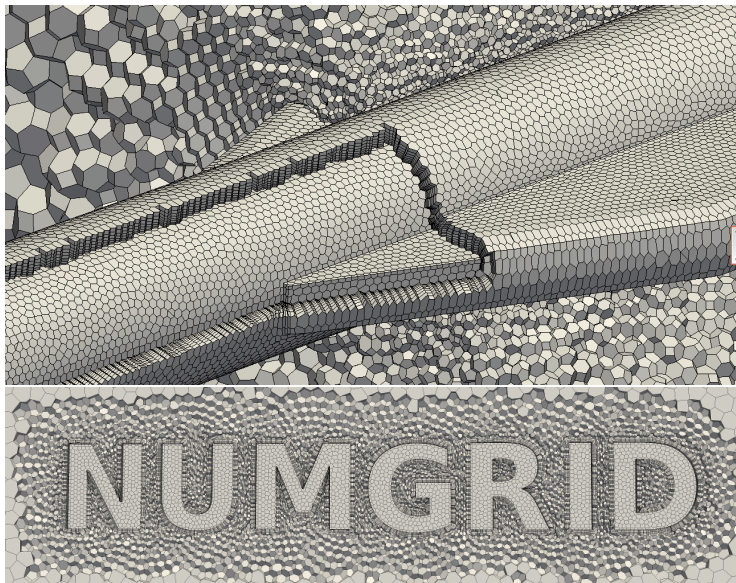
Примеры аналитически заданных тел и сетки Делоне, II



Процесс самоорганизации сетки



Построение гибридно-полиэдральных сеток на основе алгоритма самоорганизации



**«НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ
ОБЪЕДИНЕНИЕ МАШИНОСТРОЕНИЯ»
(АО «ВПК «НПО машиностроения»)**
ул. Галактик, д. 33, г. Реутов, Московская область, 143966
телефонный: Реутов Московской ВЕСНА (47246418)
Тел.: (495) 828-30-15 (канцелярия) Факс: (495) 932-30-01
E-mail: vpk@peromash.ru <http://www.peromash.ru>
ОКПО 07501736, ОГРН 1075012001402

АО «ВПК «НПО машиностроения»
генеральный конструктор ОТР В
д.т.н. А.А. Дортчаев
8. 8. 2016

Д.А. Забарко