Наследование гамильтоновых структур в теории медленных модуляций

Андрей Мальцев

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Ма рассматриваем гамильтоновы структуры, получаемые "усреднением" гамильтоновых структур, задаваемых локальными теоретико-полевыми скобками Пуассона

$$\{\varphi^i(\mathbf{x})\,,\,\varphi^i(\mathbf{y})\} \;=\; \sum_{l_1,\dots,l_d} B^{ij}_{(l_1,\dots,l_d)}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}},\dots)\;\delta_{l_1x^1\dots\,l_dx^d}\,(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad (1)$$

на семействах m-фазных квазипериодических решений локальных гамильтоновых систем

$$\varphi^i_t \;=\; F^i(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}},\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{xx}},\dots) \;\equiv\; F^i(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}_{x^1},\dots,\boldsymbol{\varphi}_{x^d},\dots)\quad,\qquad i=1,\dots,n \qquad (2)$$

представленных в следующей общей форме

$$\begin{aligned}\varphi^i(\mathbf{x},\,t) \;&=\; \varphi^i_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]}(\mathbf{x},\,t) \;=\\ &=\; \Phi^i\left(\mathbf{k}_1(\mathbf{a})\,x^1+\dots+\mathbf{k}_d(\mathbf{a})\,x^d+\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a})\,t+\boldsymbol{\theta}_0,\;\mathbf{a}\right) \qquad (3)\end{aligned}$$

с некоторыми гладкими, 2π-периодическими по каждой θ^α, функциями $\Phi^i(\boldsymbol{\theta},\,\mathbf{a})$.

В наших обозначениях $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^d)$, $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^d)$ представляют точки Евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, при этом предполагается, что выражение (1) определяет гамильтонов оператор на пространстве гладких функций

$$\varphi(\mathbf{x}) \;=\; \left(\varphi^1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi^n(\mathbf{x})\right)$$

удовлетворяющий тождеству Якоби. Будем называть скобки (1) общими локальными теоретико-полевыми скобками Пуассона в $\mathbb{R}^d$. Мы предполагаем, что система (2) представляет гамильтонову систему, порожденную локальным гамильтонианом

$$H \;=\; \int P_H\left(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \varphi_{\mathbf{xx}}, \ldots\right)\; d^d x \tag{4}$$

относительно скобки (1).

Мы предполагаем, что семейство решений (3) определено с помощью гладкого семейства $\hat{\Lambda}$ 2π-периодических по каждой θ^{α} функций

$$\Phi^{i}\,(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}_{0},\,\mathbf{a})\;=\;\Phi^{i}\left(\theta^{1}+\theta_{0}^{1},\ldots,\theta^{m}+\theta_{0}^{m},\;a^{1},\ldots,a^{N}\right)$$

с гладкой зависимостью волновых чисел $\mathbf{k}_{q}(\mathbf{a})\,=\,(k_{q}^{1}(\mathbf{a}),\ldots,k_{q}^{m}(\mathbf{a}))$ и частот $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a})\,=\,(\omega^{1}(\mathbf{a}),\ldots,\omega^{m}(\mathbf{a}))$ от параметров $\mathbf{a}\,=\,(a^{1},\ldots,a^{N})$. Все функции $\Phi^{i}(\boldsymbol{\theta},\,\mathbf{a})$ должны удовлетворять системе

$$\omega^{\alpha}\,\Phi^{i}_{\theta^{\alpha}}\;-\;F^{i}\left(\boldsymbol{\Phi},\;k_{1}^{\beta_{1}}\,\boldsymbol{\Phi}_{\theta^{\beta_{1}}},\ldots,k_{d}^{\beta_{d}}\,\boldsymbol{\Phi}_{\theta^{\beta_{d}}},\ldots\right)\;=\;0 \qquad (5)$$

Параметры θ_{0}^{α} представляют начальные фазовые сдвиги решений (3) и принимают по определению все вещественные значения на семействе $\hat{\Lambda}$. Мы предполагаем также, что значения параметров $\mathbf{a}$ не изменяются при сдвигах начальных фаз. Будем обозначать через Λ семейство (3) функций $\varphi^{i}(\mathbf{x},\,t)$, соответствующих семейству $\hat{\Lambda}$.

Процедура усреднения скобки Пуассона связана с методом усреднения Уизема ([26, 27, 28]). В связи с этим нам понадобятся дополнительные требования регулярности и полноты семейства Λ, которые мы сформулируем ниже.

Мы будем рассматривать здесь ситуацию общего положения, когда величины $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d, \boldsymbol{\omega})$ представляют независимые параметры на полном семействе m-фазных решений системы (2). Таким образом, мы подразумеваем, что число вещественных параметров $(a^1, \dots, a^N)$ равно $md + m + s$, $s \geq 0$. В частности, параметры $(a^1, \dots, a^N)$ могут локально быть выбраны в виде $\mathbf{a} = (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, где $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d, \boldsymbol{\omega})$ представляют волновые числа и частоты m-фазных решений и $\mathbf{n} = (n^1, \dots, n^s)$ задают некоторые дополнительные параметры (если такие есть).

Рассмотрим линейные операторы $\hat{L}^i_{j[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]} = \hat{L}^i_{j[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\boldsymbol{\omega},\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0]}$, задаваемые линеаризацией системы (5) на соответствующих решениях $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}_0,\, \mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\, \boldsymbol{\omega},\, \mathbf{n})$. Нетрудно видеть, что функции $\mathbf{\Phi}_{\theta^\alpha}(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}_0,\, \mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\, \boldsymbol{\omega},\, \mathbf{n})$, $\alpha = 1,\dots,m$, и $\mathbf{\Phi}_{n^l}(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}_0,\, \mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\, \boldsymbol{\omega},\, \mathbf{n})$, $l = 1,\dots,s$, лежат в ядре операторов $\hat{L}^i_{j[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\boldsymbol{\omega},\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0]}$, определенных на пространстве 2π-периодических по каждой θ^α функций, и зависят гладко от всех параметров $(\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\, \boldsymbol{\omega},\, \mathbf{n},\, \boldsymbol{\theta}_0)$. Наложим теперь следующие требования на операторы $\hat{L}^i_{j[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\boldsymbol{\omega},\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0]}$ на семействе $\hat{\Lambda}$:

1) Мы требуем, чтобы векторы $\boldsymbol{\Phi}_{\theta^\alpha}(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}_0,\, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, $\boldsymbol{\Phi}_{n^l}(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}_0,\, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$ были линейно независимы и представляли максимальный линейно независимый набор регулярных векторов, лежащих в ядре оператора $\hat{L}^i_{j[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\boldsymbol{\omega},\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0]}$ и зависящих гладко от параметров $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d,\, \boldsymbol{\omega},\, \mathbf{n})$.

2) Мы требуем, чтобы операторы $\hat{L}^i_{j[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\boldsymbol{\omega},\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0]}$ имели также в точности $m+s$ линейно независимых регулярных левых собственных векторов $\boldsymbol{\kappa}^{(q)}_{[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\boldsymbol{\omega},\mathbf{n}]}(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}_0)$, $q = 1, \dots, m+s$, соответствующих нулевому собственному значению и зависящих гладко от параметров $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d,\, \boldsymbol{\omega},\, \mathbf{n})$.

Мы выполнении сформулированных выше требований мы будем называть соответствующее семейство Λ *полным регулярным семейством* m-фазных решений системы (2).

Замечание. Помимо регулярных левых и правых собственных векторов с нулевым собственным значением операторы $\hat{L}^{i}_{j[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\boldsymbol{\omega},\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0]}$ могут иметь (при $m > 1$) также "иррегулярные" собственные векторы с нулевым собственным значением, число которых может меняться в зависимости от значений параметров $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d,\ \boldsymbol{\omega},\ \mathbf{n})$.

Как хорошо известно, метод Уизема дает описание медленно модулированных m-фазных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Решения Уизема представляют собой асимптотические решения нелинейных систем с главной частью, имеющей вид

$$\varphi_{(0)}(\mathbf{x},\, t,\, \boldsymbol{\theta}) \;=\; \\ =\; \Phi\left(\frac{\mathbf{S}(\mathbf{X},\, T)}{\epsilon} + \boldsymbol{\theta}_{(0)}(\mathbf{X},\, T) + \boldsymbol{\theta},\; \mathbf{S}_{X^1}, \dots, \mathbf{S}_{X^d},\, \mathbf{S}_T,\, \mathbf{n}(\mathbf{X},\, T)\right) \qquad (6)$$

где $\mathbf{X} \;=\; \epsilon\, \mathbf{x}$, $\;T \;=\; \epsilon\, t$, $\;\epsilon \to 0$, представляют “медленные” пространственные и временную переменные и функция

$$\mathbf{S}(\mathbf{X},\, T) \;=\; \left(S^1(\mathbf{X},\, T), \dots, S^m(\mathbf{X},\, T)\right)$$

задает “модулированную фазу” решения. Таким образом, главная часть решения Уизема представляет собой m-фазное решение нелинейной системы с медленно модулированными параметрами $\mathbf{a}(\mathbf{X},\, T)$ и быстро меняющейся фазой.

Мы имеем естественные соотношения

$$S^{\alpha}_{T} = \omega^{\alpha}(\mathbf{X}, T) \ , \qquad S^{\alpha}_{X^q} = k^{\alpha}_{q}(\mathbf{X}, T) \tag{7}$$

между производными модулированной фазы и параметрами $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, T)$ and $\mathbf{k}_q(\mathbf{X}, T)$.
Соотношения (7) накладывают естественные связи

$$k^{\alpha}_{qT} = \omega^{\alpha}_{X^q} \ , \qquad k^{\alpha}_{qX^p} = k^{\alpha}_{pX^q}$$

на функции $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, T)$ и $\mathbf{k}_q(\mathbf{X}, T)$, которые могут рассматриваться как первая часть системы Уизема на параметры $\mathbf{a}(\mathbf{X}, T)$.

Вторая часть системы Уизема обычно определяется из требования существования ограниченной следующей поправки к нулевому приближению (6) и может быть определена разными способами, которые обычно эквивалентны друг другу (см. напр. [26, 27, 28, 17, 13, 1, 14, 15, 7, 8, 16]).

В нашей схеме мы будем определять вторую часть системы Уизема для полного регулярного семейства Λ m-фазных решений (2) как условие ортогональности при всех $\mathbf{X}$ и T всех регулярных левых собственных векторов

$$\boldsymbol{\kappa}^{(q)}_{[\mathbf{S}_{X^1},\dots,\mathbf{S}_{X^d},\mathbf{S}_T,\mathbf{n}(\mathbf{X},T)]}\left(\frac{\mathbf{S}(\mathbf{X},T)}{\epsilon}+\boldsymbol{\theta}_{(0)}(\mathbf{X},T)+\boldsymbol{\theta}\right)\quad,\quad q=1,\dots,m+s$$

первой ϵ-невязке $\mathbf{f}_1(\boldsymbol{\theta},\mathbf{X},T)$, получаемой после подстановки главного приближения (6) в систему

$$\epsilon\,\varphi^i_T \;=\; F^i\left(\boldsymbol{\varphi},\,\epsilon\,\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{X}},\,\epsilon^2\,\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{XX}},\,\dots\right)$$

Как хорошо известно, система Уизема, определенная одним из стандартных способов, не накладывает никаких ограничений на переменные $\boldsymbol{\theta}_0(\mathbf{X}, T)$ и представляет собой систему уравнений в частных производных только на параметры $\mathbf{a}(\mathbf{X}, T)$ (см. напр. [26, 27, 28, 17]). В частности, можно показать также, что условия ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \kappa^{(q)}_{[\mathbf{S}_{X^1},\dots,\mathbf{S}_{X^d},\mathbf{S}_T,\mathbf{n}(\mathbf{X},T)]\, i} \left(\frac{\mathbf{S}(\mathbf{X}, T)}{\epsilon} + \boldsymbol{\theta}_{(0)}(\mathbf{X}, T) + \boldsymbol{\theta} \right) \times$$
$$\times \quad f^i_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}, T) \, \frac{d^m\theta}{(2\pi)^m} \quad = \quad 0 \;, \quad (8)$$

определенные для любого полного регулярного семейства Λ, имеют то же самое свойство.

В общем случае, соотношения (8) могут быть записаны как система $m+s$ квазилинейных уравнений

$$P_\alpha^{(q)}(\mathbf{S_X},\mathbf{S}_T,\mathbf{n})\, S^\alpha_{TT} \;+\; Q_\alpha^{(q)p}(\mathbf{S_X},\mathbf{S}_T,\mathbf{n})\, S^\alpha_{X^pT} \;+$$

$$+\; R_\alpha^{(q)pk}(\mathbf{S_X},\mathbf{S}_T,\mathbf{n})\, S^\alpha_{X^pX^k} \;+\; V_l^{(q)}(\mathbf{S_X},\mathbf{S}_T,\mathbf{n})\, n^l_T \;+$$

$$+\; W_l^{(q)p}(\mathbf{S_X},\mathbf{S}_T,\mathbf{n})\, n^l_{X^p} \;=\; 0 \quad , \qquad q \,=\, 1,\ldots,m+s$$

с некоторыми гладкими функциями $P_\alpha^{(q)}$, $Q_\alpha^{(q)p}$, $R_\alpha^{(q)pk}$, $V_l^{(q)}$, $W_l^{(q)p}$.

Заметим здесь, что для однофазного случая $(m = 1)$ набор "регулярных" левых собственных векторов $\boldsymbol{\kappa}^{(q)}_{[k_1,\dots,k_d,\omega,\mathbf{n}]}(\theta + \theta_0)$, $q = 1, \dots, s + 1$, представляет обычно полный набор линейно независимых левых собственных векторов операторов $\hat{L}^i_{j[k_1,\dots,k_d,\omega,\mathbf{n},\theta_0]}$, соответствующих нулевому собственному значению, для всех значений $(k_1, \dots, k_d, \omega, \mathbf{n}, \theta_0)$ на полном регулярном семействе Λ. С другой стороны, в многофазном случае $(m > 1)$ ситуация обычно сложнее и имеются также "иррегулярные" левые собственные векторы $\hat{L}^i_{j[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\boldsymbol{\omega},\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0]}$, соответствующие нулевому собственному значению, которые возникают при специальных значениях параметров $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d,\ \boldsymbol{\omega},\ \mathbf{n})$. В результате, поправки к главному приближению (6) решения Уизема имеют в многофазном случае форму, сильно отличающуюся от форму поправок в случае $m = 1$ (см. напр. [2, 3, 4]). Заметим, тем не менее, что регулярная система Уизема, определенная выше, играет и в этом случае центральную роль в описании медленно модулированных m-фазных решений.

Один из наиболее элегантных способов построения системы Уизема был предложен Уиземом и связан с усреднением функции Лагранжа исходной системы. Этот метод применим к системам, имеющим локальную лагранжеву структуру и задает систему Уизема в локальной лагранжевой форме (см. напр. [28]). Отметим также, что лагранжев подход дает обычно существенные преимущества как при построении, так и при исследовании уравнений Уизема.

Класс локальных лагранжевых систем может быть существенно расширен, будучи включен в более широкий класс систем, имеющих локальную теоретико-полевую гамильтонову структуру. В общем случае, системы такого типа могут рассматриваться как эволюционные системы (2), которые могут быть представлены в форме

$$\varphi^i_t \;=\; \hat{J}^{ij}\,\frac{\delta H}{\delta\varphi^j(\mathbf{x})}\;,$$

где $\hat{J}^{ij}$ - оператор Гамильтона

$$\hat{J}^{ij} \;=\; \sum_{l_1,\dots,l_d} B^{ij}_{(l_1,\dots,l_d)}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}},\dots)\,\left(\frac{d}{dx^1}\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{d}{dx^d}\right)^{l_d}\;,$$

определяемый скобкой Пуассона (1), и H - функционал Гамильтона, имеющий вид (4).

Гамильтонов подход в теории уравнений Уизема был предложен в работах Б.А. Дубровина и С.П. Новикова, где была введена концепция гамильтоновых структур гидродинамического типа. В общем случае, скобка Дубровина-Новикова в пространстве $\mathbb{R}^d$ может быть записана в следующей локальной форме

$$\{U^{\nu}(\mathbf{X}), U^{\mu}(\mathbf{Y})\} \;=\; g^{\nu\mu\, I}(\mathbf{U}(\mathbf{X}))\, \delta_{X^I}(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) + b^{\nu\mu\, I}_{\lambda}(\mathbf{U}(\mathbf{X}))\; U^{\lambda}_{X^I}\; \delta(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) \tag{9}$$

(суммирование по повторяющимся индексам).
Общая теория скобок (9) является довольно нетривиальной. Довольно глубокие результаты по классификации скобок (9) были получены в работах [6, 22, 23], где представлено полное описание скобок (9), удовлетворяющих специальным условиям невырожденности. С другой стороны, существует множество интересных примеров, в которых нетривиальная структура системы определяется скобками (9) необщего положения (см. напр. [11, 12]). В связи с этим, можно сказать, что полная теория скобок (9) еще до конца не построена и представляет интересное направление теории скобок Пуассона.

Специальный класс скобок Дубровина - Новикова (9) представляют одномерные скобки Пуассона гидродинамического типа. Скобки (9) имеют в этом случае следующий вид

$$\{U^{\nu}(X)\,,\,U^{\mu}(Y)\} \;=\; g^{\nu\mu}(\mathbf{U}(X))\,\delta'(X-Y) \;+\; b^{\nu\mu}_{\lambda}(\mathbf{U}(X))\;U^{\lambda}_{X}\;\;\delta(X-Y) \tag{10}$$

и описываются в терминах дифференциальной геометрии. Так, можно показать ([5, 6, 7, 8]), что выражение (10) с невырожденным тензором $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ определяет скобку Пуассона на пространстве полей $\mathbf{U}(X)$ тогда и только тогда, когда тензор $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ определяет плоскую псевдо-риманову метрику с верхними индексами на пространстве $\mathbf{U}$, в то время как величины $\Gamma^{\nu}_{\mu\gamma} = -\,g_{\mu\lambda}\,b^{\lambda\nu}_{\gamma}$ представляют соответствующие символы Кристоффеля $(g_{\nu\tau}(\mathbf{U})\,g^{\tau\mu}(\mathbf{U}) = \delta^{\mu}_{\nu})$.

Теория скобок Пуассона гидродинамического типа дает базис для теории интегрирования многокомпонентных одномерных систем гидродинамического типа

$$U^{\nu}_{T} \;=\; V^{\nu}_{\mu}(\mathbf{U})\;U^{\mu}_{X} \quad , \qquad \nu = 1, \dots, N \tag{11}$$

Так, согласно гипотезе С.П. Новикова, каждая диагонализуемая система (11), являющаяся гамильтоновой по отношению к некоторой скобке (10) с гамильтонианом гидродинамического типа

$$H \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mathbf{U}) \ dX \ ,$$

является интегрируемой.
Гипотеза С.П. Новикова была доказана С.П. Царевым ([24, 25]), предложившим метод интегрирования диагональных гамильтоновых систем

$$U^{\nu}_{T} \ = \ V^{\nu}(\mathbf{U}) \ U^{\nu}_{X} \quad , \qquad \nu = 1, \ldots, N \tag{12}$$

Метод Царева применим в действительности к более широкому классу систем (12), названных С.П. Царевым полугамильтоновыми. В частности, класс полугамильтоновых систем содержит диагонализуемые системы, гамильтоновы относительно слабо-нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа - скобки Мохова - Ферапонтова ([21]) и более общих скобок Ферапонтова ([9, 10]), представляющих собой обобщения скобок Дубровина - Новикова. Диагонализуемые полугамильтоновы системы представляют один из наиболее широких классов интегрируемых одномерных систем гидродинамического типа.

Б.А. Дубровиным и С.П. Новиковым был предложен также метод усреднения локальных теоретико-полевых гамильтоновых структур для одномерных систем. Процедура Б.А. Дубровина и С.П. Новикова предполагает существование N локальных интегралов системы (2)

$$I^{\nu} \;=\; \int P^{\nu}(\varphi, \varphi_x, \dots)\, dx \;\; ,$$

коммутирующих с гамильтонианом H и друг с другом

$$\{I^{\nu}\,,\, H\} \,=\, 0 \quad , \qquad \{I^{\nu}\,,\, I^{\mu}\} \,=\, 0 \tag{13}$$

в силу скобки (1) $(d = 1)$. Предполагается также, что набор параметров $\mathbf{a}$ на семействе Λ может быть выбран в форме $(a^1, \dots, a^N) \,=\, (U^1, \dots, U^N)$, где величины

$$U^{\nu} \;=\; \langle P^{\nu} \rangle \;\equiv\; \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} P^{\nu}\,(\boldsymbol{\Phi},\, k^{\alpha} \boldsymbol{\Phi}_{\theta^{\alpha}}, \dots)\; \frac{d^m \theta}{(2\pi)^m}$$

представляют собой плотности $P^{\nu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$ на Λ, усредненные по угловым (фазовым) переменным.

Мы можем написать для временной эволюции плотностей $P^{\nu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$ согласно системе (2):

$$P^{\nu}_t(\varphi, \varphi_x, \dots) \equiv Q^{\nu}_x(\varphi, \varphi_x, \dots) ,$$

где $Q^{\nu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$ являются гладкими функциями φ и их пространственных производных. Удобно записывать при этом систему Уизема в виде системы законов сохранения

$$\langle P^{\nu} \rangle_T = \langle Q^{\nu} \rangle_X \quad , \qquad \nu = 1, \dots, N \ , \tag{14}$$

используя функции $P^{\nu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$ и $Q^{\nu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$.

Процедура построения скобки Дубровина - Новикова для системы (14) может быть описана следующим образом:
Вычислим попарные скобки Пуассона плотностей $P^{\nu}(x)$, $P^{\mu}(y)$, которые могут быть представлены в виде:

$$\{P^{\nu}(x)\,,\,P^{\mu}(y)\} \;=\; \sum_{k\geq 0} A_k^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots)\;\delta^{(k)}(x-y)$$

с некоторыми гладкими функциями $A_k^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$.
Согласно условиям (13) мы можем записать соотношения

$$A_0^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots) \;\equiv\; \partial_x Q^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$$

для некоторых функций $Q^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$.

Положим теперь $U^{\nu} = \langle P^{\nu} \rangle$ и определим скобку Пуассона

$$\{U^{\nu}(X)\,,\,U^{\mu}(Y)\} \;=\; \langle A_1^{\nu\mu}\rangle(\mathbf{U})\;\delta'(X-Y)\;+\;\frac{\partial\langle Q^{\nu\mu}\rangle}{\partial U^{\gamma}}\;U^{\gamma}_X\;\delta(X-Y) \tag{15}$$

на пространстве функций $\mathbf{U}(\mathbf{X})$.
Система (14) может быть определена теперь как система, порожденная функционалом Гамильтона

$$H_{av} \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \langle P_H\rangle\,(\mathbf{U}(X))\;dX$$

с помощью скобки (15).

Полное обоснование процедуры Дубровина - Новикова представляет в действительности нетривиальную проблему. Некоторый обзор этой проблемы и наиболее полное рассмотрение обоснования процедуры представлен в работе [18]. В частности, можно утверждать, что процедура Дубровина - Новикова хорошо обоснована для полных регулярных семейств Λ, имеющих определенные регулярные гамильтоновы свойства ([18]).

В случае нескольких пространственных размерностей ($d > 1$) процедура усреднения скобки должна быть в действительности модифицирована, что связано главным образом со специальной ролью переменных $\mathbf{S}(\mathbf{X})$, проявляемой в этой ситуации. Сформулируем здесь соответствующую процедуру, а также условия ее применимости, согласно схеме, предложенной в [19, 20].

Рассмотрим полное регулярное семейство Λ m-фазных решений системы (2), параметризованное $m(d+1)+s$ параметрами $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$ и m начальными фазами $\boldsymbol{\theta}_0$. Мы будем называть такое семейство *полным гамильтоновым семейством* m*-фазных* решений (2) если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) Скобка (1) имеет в каждой точке $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\theta}_0)$ семейства Λ одно и то же число s' "аннуляторов", определяемых линейно независимыми решениями $\mathbf{v}^{(k)}_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]}(\mathbf{x})$ уравнения

$$\sum_{l_1,\dots,l_d} B^{ij}_{(l_1,\dots,l_d)}(\varphi_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]}, \varphi_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]\,\mathbf{x}}, \dots) \; v^{(k)}_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]\,j\,,\,l_1 x^1 \dots\, l_d x^d}(\mathbf{x}) \quad = \quad 0 \;, \qquad (16)$$

такими, что функции $v^{(k)}_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]\,i}(\mathbf{x})$ могут быть представлены в виде

$$v^{(k)}_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]\,i}(\mathbf{x}) \;=\; v^{(k)}_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]\,i}\left(\mathbf{k}_1 x^1 + \dots + \mathbf{k}_d x^d\right)$$

для некоторых гладких, 2π-периодических по каждой θ^α функций $v^{(k)}_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]\,i}(\boldsymbol{\theta})$.

2) Для производных φ_{ω^α}, φ_{n^l} функций $\varphi_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]}(\mathbf{x}) = \varphi_{[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\boldsymbol{\omega},\mathbf{n},\boldsymbol{\theta}_0]}(\mathbf{x})$ мы имеем соотношения

$$\mathrm{rank} \left\| \begin{matrix} (\varphi_{\omega^\alpha} \cdot \mathbf{v}^{(k)}) \\ (\varphi_{n^l} \cdot \mathbf{v}^{(k)}) \end{matrix} \right\| = s'$$

$(\alpha = 1, \dots, m, \; l = 1, \dots, s, \; k = 1, \dots, s')$, где выражения

$$\left(\varphi_{\omega^\alpha} \cdot \mathbf{v}^{(k)}\right) \equiv \lim_{K\to\infty} \frac{1}{(2K)^d} \int_{-K}^{K} \dots \int_{-K}^{K} \varphi^i_{\omega^\alpha}(\mathbf{x}) \; v^{(k)}_i(\mathbf{x}) \; d^d x$$

$$\left(\varphi_{n^l} \cdot \mathbf{v}^{(k)}\right) \equiv \lim_{K\to\infty} \frac{1}{(2K)^d} \int_{-K}^{K} \dots \int_{-K}^{K} \varphi^i_{n^l}(\mathbf{x}) \; v^{(k)}_i(\mathbf{x}) \; d^d x$$

определяют свертки вариационных производных аннуляторов с касательными векторами φ_{ω^α}, φ_{n^l}.

Удобно ввести также семейства $\Lambda_{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d}$, представляющие функции $\varphi_{[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\,\boldsymbol{\omega},\,\mathbf{n},\,\theta_0]}$ с фиксированными параметрами $(\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d)$. Дадим здесь следующее определение:

Скажем, что полное гамильтоново семейство Λ *оснащено минимальным набором коммутирующих интегралов*, если существуют $m+s$ функционалов I^γ, $\gamma = 1,\dots,m+s$, имеющих вид

$$I^\gamma \;=\; \int P^\gamma\,(\varphi,\,\varphi_{\mathbf{x}},\,\varphi_{\mathbf{xx}},\dots)\;d^d x \tag{17}$$

таких что:

1) Функционалы I^γ коммутируют с гамильтонианом (4) и друг с другом в силу скобки (1):

$$\{I^\gamma\,,\,H\} \;=\; 0\quad,\qquad \{I^\gamma\,,\,I^\rho\} \;=\; 0\;, \tag{18}$$

2) Величины U^γ:

$$U^\gamma = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{(2K)^d} \int_{-K}^{K} \dots \int_{-K}^{K} P^\gamma \left(\varphi_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]},\, \varphi_{[\mathbf{a},\boldsymbol{\theta}_0]\,\mathbf{x}}, \dots \right)\, d^d x$$

представляют независимые параметры на каждом семействе $\Lambda_{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d}$, так что полный набор параметров на Λ может быть представлен в виде $(\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\, U^1,\dots,U^{m+s},\, \boldsymbol{\theta}_0)$;

3) Гамильтоновы потоки, порождаемые функционалами I^γ, оставляют инвариантным семейство Λ и значения всех параметров $(\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\, \mathbf{U})$ функций $\varphi_{[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\,\mathbf{U},\,\boldsymbol{\theta}_0]}(\mathbf{x})$ и порождают линейную временную зависимость фаз $\boldsymbol{\theta}_0$ с постоянными частотами $\boldsymbol{\omega}^\gamma = (\omega^{1\gamma},\dots,\omega^{m\gamma})$, такими что

$$\mathrm{rk}\, ||\, \omega^{\alpha\gamma} (\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\, \mathbf{U})\, || = m$$

везде на Λ;

4) В каждой точке $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d,\, \mathbf{U},\, \boldsymbol{\theta}_0)$ семейства Λ линейное пространство, порожденное вариационными производными $\delta I^\gamma / \delta \varphi^i(\mathbf{x})$, содержит вариационные производные $\mathbf{v}^{(k)}_{[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\mathbf{U},\boldsymbol{\theta}_0]}(\mathbf{x})$ всех аннуляторов скобки (1), введеных выше. Другими словами, в каждой точке $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d,\, \mathbf{U},\, \boldsymbol{\theta}_0)$ мы можем написать для полного набора $\{\mathbf{v}^{(k)}_{[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\mathbf{U},\boldsymbol{\theta}_0]}(\mathbf{x})\}$ линейно независимых решений уравнения (16) соотношения:

$$v^{(k)}_{[\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_d,\mathbf{U},\boldsymbol{\theta}_0]\, i}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{\gamma=1}^{m+s} \gamma^k_\gamma(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d,\, \mathbf{U}) \;\left. \frac{\delta I^\gamma}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} \right|_\Lambda$$

с некоторыми функциями $\gamma^k_\gamma(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d,\, \mathbf{U})$ на Λ.

Как и в одномерном случае, мы можем записать здесь следующие соотношения для временной эволюции плотностей $P^{\gamma}(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \dots)$:

$$P^{\gamma}_{t}(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \dots) \quad = \quad Q^{\gamma 1}_{x^1}(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \dots) + \dots + Q^{\gamma d}_{x^d}(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \dots)$$

Рассмотрим теперь модуляционные уравнения для полного гамильтонова семейства Λ, оснащенного минимальным набором коммутирующих интегралов $\{I^1, \dots, I^{m+s}\}$. Удобно выбрать теперь параметры медленно модулированных решений системы (2) в виде

$$(\mathbf{S}(\mathbf{X}, T), \mathbf{U}(\mathbf{X}, T)) \ =$$

$$= \ (S^1(\mathbf{X}, T), \dots, S^m(\mathbf{X}, T), U^1(\mathbf{X}, T), \dots, U^{m+s}(\mathbf{X}, T)) \ ,$$

так что параметры $\mathbf{k}_q(\mathbf{X}, T)$ определены соотношениями $\mathbf{k}_q = \mathbf{S}_{X^q}$ $(\mathbf{X} = \epsilon \mathbf{x},\ T = \epsilon t)$.

Регулярная система Уизема может быть теперь записана в виде

$$
\begin{aligned}
S^{\alpha}_{T} \quad &= \quad \omega^{\alpha}\left(\mathbf{S}_{X^1}, \ldots, \mathbf{S}_{X^d}, \mathbf{U}\right) \;\; , \qquad \qquad \alpha = 1, \ldots, m \; , \\
U^{\gamma}_{T} \quad &= \quad \langle Q^{\gamma 1} \rangle_{X^1} + \ldots + \langle Q^{\gamma d} \rangle_{X^d} \;\; , \qquad \gamma = m + s \; ,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

что эквивалентно системе, определяемой (7)-(8).

Процедура усреднения скобки Пуассона (1) может быть теперь описана следующим образом ([19, 20]):
Как и в одномерном случае, вычислим попарные скобки Пуассона плотностей $P^{\gamma}(\mathbf{x})$, $P^{\rho}(\mathbf{y})$, которые могут быть теперь представлены в виде

$$\{P^{\gamma}(\mathbf{x}), P^{\rho}(\mathbf{y})\} = \sum_{l_1,\dots,l_d} A^{\gamma\rho}_{l_1\dots l_d}(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \dots) \ \delta^{(l_1)}(x^1 - y^1) \dots \delta^{(l_d)}(x^d - y^d)$$

$(l_1, \dots, l_d \geq 0)$.
Точно также, мы можем написать здесь соотношения

$$A^{\gamma\rho}_{0\dots 0}(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \dots) \equiv \partial_{x^1} Q^{\gamma\rho 1}(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \dots) + \dots + \partial_{x^d} Q^{\gamma\rho d}(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \dots)$$

для некоторых функций $(Q^{\gamma\rho 1}(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \dots), \dots, Q^{\gamma\rho d}(\varphi, \varphi_{\mathbf{x}}, \dots))$.

Определим усредненную скобку Пуассона $\{\ldots,\ldots\}_{\mathrm{AV}}$ на пространстве полей $(\mathbf{S}(\mathbf{X}),\mathbf{U}(\mathbf{X}))$ следующими соотношениями:

$$\{S^{\alpha}(\mathbf{X}),\, S^{\beta}(\mathbf{Y})\}_{\mathrm{AV}} \;=\; 0$$

$$\{S^{\alpha}(\mathbf{X}),\, U^{\gamma}(\mathbf{Y})\}_{\mathrm{AV}} \;=\; \omega^{\alpha\gamma}(\mathbf{S}_{X^1},\ldots,\mathbf{S}_{X^d},\mathbf{U}(\mathbf{X}))\;\delta(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) \quad ,$$

$$\{U^{\gamma}(\mathbf{X}),\, U^{\rho}(\mathbf{Y})\}_{\mathrm{AV}} \;=\; \langle A^{\gamma\rho}_{10\ldots0}\rangle(\mathbf{S}_{X^1},\ldots,\mathbf{S}_{X^d},\mathbf{U}(\mathbf{X}))\;\delta_{X^1}(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) \;+$$

$$+\;\ldots\;+\;\langle A^{\gamma\rho}_{0\ldots01}\rangle(\mathbf{S}_{X^1},\ldots,\mathbf{S}_{X^d},\mathbf{U}(\mathbf{X}))\;\delta_{X^d}(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) \;+$$

$$+\;[\langle Q^{\gamma\rho\,p}\rangle(\mathbf{S}_{X^1},\ldots,\mathbf{S}_{X^d},\mathbf{U}(\mathbf{X}))]_{X^p}\;\delta(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) \tag{20}$$

Система (19) может быть записана теперь как гамильтонова система по отношению к скобке (20) с гамильтонианом

$$H_{av} \;=\; \int \langle P_H\rangle\,(\mathbf{S}_{X^1},\ldots,\mathbf{S}_{X^d},\,\mathbf{U}(\mathbf{X}))\;d^d X$$

[1] С.Ю. Доброхотов, В.П. Маслов., Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях., Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. - М.: ВИНИТИ, 1980. - Т. 15. - С. 3-94.

[2] С.Ю. Доброхотов., Резонансы в асимптотике решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с быстроосциллирующим конечнозонным потенциалом., Математические заметки **44**:3 (1988), 319-340.

[3] С.Ю. Доброхотов., Резонансная поправка к адиабатически возмущенному конечнозонному почти периодическому решению уравнения Кортевега–де Фриза., Математические заметки **44**:4 (1988), 551-555.

[4] С.Ю. Доброхотов, И.М. Кричевер., Многофазные решения уравнения Бенджамина–Оно и их усреднение., Математические заметки **49**:6 (1991), 42-58.

[5] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков., Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова-Уизема, Доклады Акад. Наук СССР, **270**:4 (1983), 781-785.

[6] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков., О скобках Пуассона гидродинамического типа., Доклады Акад. Наук СССР **279**:2 (1983), 294-297.

[7] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков., Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория., Успехи Математических Наук, **44**:6 (1989), 29-98.

[8] B.A.Dubrovin and S.P. Novikov., Hydrodynamics of soliton lattices, *Sov. Sci. Rev. C, Math. Phys.*, 1993, V.9. part 4. P. 1-136.

[9] Е.В. Ферапонтов., Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа., Функциональный анализ и его приложения, **25**:3 (1991), 37-49.

[10] Е.В. Ферапонтов., Ограничение по Дираку гамильтонова оператора $\delta^{IJ}\frac{d}{dx}$ на поверхности евклидова пространства с плоской нормальной связностью., Функциональный анализ и его приложения, **26**:4 (1992), 83-86.

[11] E.V. Ferapontov, A.V. Odesskii, N.M. Stoilov., Classification of integrable two-component Hamiltonian systems of hydrodynamic type in 2+1 dimensions, *J. Math. Phys.*, **52**:7, 073505 (2011), arXiv:1007.3782 .

[12] E.V. Ferapontov, P. Lorenzoni, A. Savoldi., Hamiltonian operators of Dubrovin-Novikov type in 2D, arXiv:1312.0475 .

[13] Flaschka H., Forest M.G., McLaughlin D.W., Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg - de Vries equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, - 1980.- Vol. 33, no. 6, 739-784.

[14] R. Haberman., The Modulated Phase shift for Weakly Dissipated Nonlinear Oscillatory Waves of the Korteweg-deVries Type., *Studies in applied mathematics*, **78**:1 (1988), 73-90.

[15] R. Haberman., Standard Form and a Method of Averaging for Strongly Nonlinear Oscillatory Dispersive Traveling Waves., *SIAM Journal on Applied Mathematics* **51**:6 (1991), 1489-1798.

[16] И.М. Кричевер., Метод усреднения для двумерных "интегрируемых" уравнений, Функциональный анализ и его приложения, **22**:3 (1988), 37-52.

[17] Luke J.C., A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **292**, No. 1430, 403-412 (1966).

[18] A.Ya.Maltsev., Whitham's method and Dubrovin - Novikov bracket in single-phase and multiphase cases., SIGMA **8** (2012), 103.

[19] A.Ya. Maltsev., The multi-dimensional Hamiltonian Structures in the Whitham method., Journ. of Math. Phys. **54**:5 (2013), 053507.

[20] A.Ya. Maltsev., On the minimal set of conservation laws and the Hamiltonian structure of the Whitham equations., Journ. of Math. Phys. **56**:2 (2015), 023510.

[21] О.И. Мохов, Е.В. Ферапонтов., Нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа, связанные с метриками постоянной кривизны., Успехи Математических Наук, **45**:3 (1990), 191-192.

[22] О.И. Мохов., О скобках Пуассона типа Дубровина-Новикова (ДН-скобки)., Функциональный анализ и его приложения, **22**:4 (1988), 92-93.

[23] О.И. Мохов., Классификация неособых многомерных скобок Дубровина–Новикова., Функциональный анализ и его приложения, **42**:1 (2008), 39-52.

[24] С.П. Царев., О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа., Докл. Акад. Наук СССР, Том. 282, No. 3, (1985), 534-537.

[25] С.П. Царев., Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа., Изв. АН СССР. Сер. матем. **54**:5 (1990), 1048–1068.

[26] G. Whitham, A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian, *J. Fluid Mech.* **22** (1965), 273-283.

[27] G. Whitham, Non-linear dispersive waves, *Proc. Royal Soc. London Ser. A* **283** no. 1393 (1965), 238-261.

[28] G. Whitham, Linear and Nonlinear Waves. Wiley, New York (1974).