

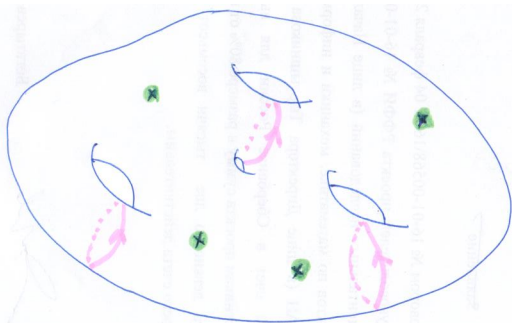
Рациональная аппроксимация и отображение периодов

Андрей Богатырев

(ИВМ РАН, МФТИ, МГУ)

Конференция профессоров ОМН РАН, 16 июня 2016

Отображения периодов

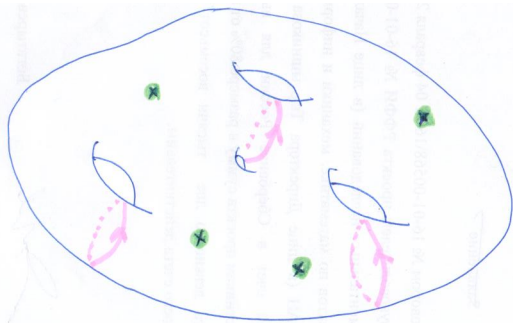


Локально:

$$\mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \mathbb{C}^m$$

$$\dim \mathcal{M}_{g,n} = 3g - 3 + n$$

Отображения периодов



Локально:

$$\mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \mathbb{C}^m$$

$$\dim \mathcal{M}_{g,n} = 3g - 3 + n$$

- Arnold et al, 1984 (теория особенностей)
- Krichever, Phong, 1997 (солитоны)
- Grushevskii, Krichever, 2010, 2011 (геометрия пространства модулей)
- Kuijlaars, Mo, 2011 (асимптотика ортогональных многочленов)
- АБ 1998 – (равномерная рациональная аппроксимация)

Мотивация

Решения нескольких задач **рационального приближения** в равномерной норме

Мотивация

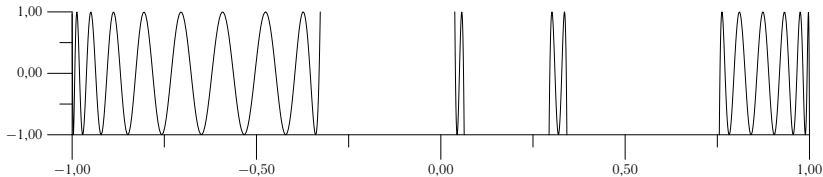


Рис.: Многочлен Чебышева степени $n = 29$ на 4 отрезках

Мотивация

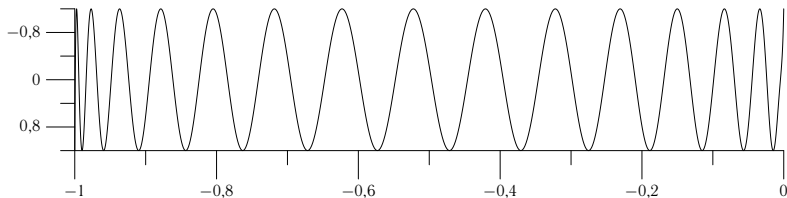


Рис.: Наилучший многочлен устойчивости степени $n = 31$ для метода RK порядка точности $p = 3$

Мотивация

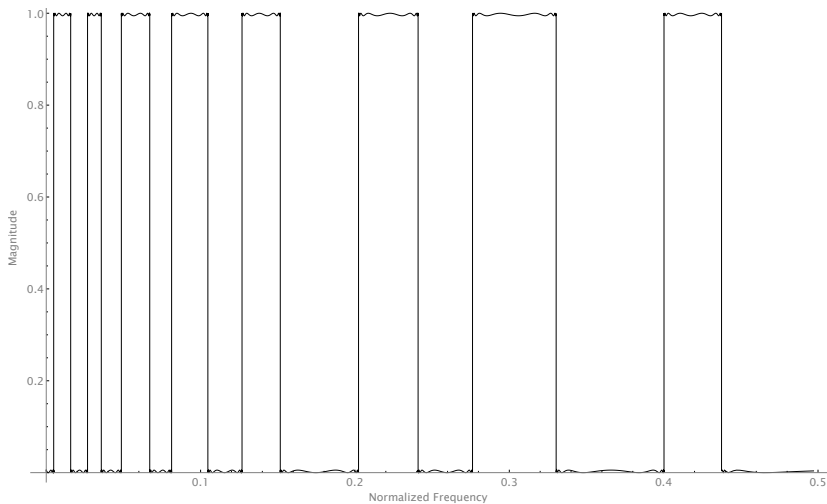


Рис.: АЧХ цифрового многополосного фильтра степени $n = 326$

Мотивация

Осцилляционное поведение решений а.к.а. **equiripple property** или **Чебышевский принцип альтернанса**.

Чебышевское представление многочленов

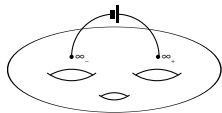
$$P(x) = \pm \cos\left(ni \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\eta_M\right)$$

в терминах ассоциированной кривой $M(E)$

$$w^2 = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s), \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2, \quad E = \{e_s\},$$

и выделенного дифференциала $d\eta_M$ на ней:
простые полюса на бесконечности с
вычетами ± 1 и чисто мнимыми периодами:

$$d\eta_M = (x^g + \dots) \frac{dx}{w}$$



Мотивация

Осцилляционное поведение решений а.к.а. **equiripple property**
или **Чебышевский принцип альтернанса**.

Чебышевское представление многочленов

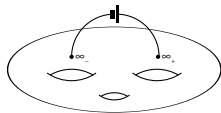
$$P(x) = \pm \cos\left(ni \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\eta_M\right)$$

в терминах ассоциированной кривой $M(E)$

$$w^2 = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s), \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2, \quad E = \{e_s\},$$

и выделенного дифференциала $d\eta_M$ на ней:
простые полюса на бесконечности с
вычетами ± 1 и чисто мнимыми периодами:

$$d\eta_M = (x^g + \dots) \frac{dx}{w}$$



Мотивация

Чебышевское представление многочленов

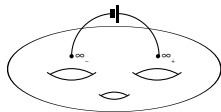
$$P(x) = \pm \cos\left(ni \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\eta_M\right)$$

в терминах ассоциированной кривой $M(E)$

$$w^2 = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s), \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2, \quad E = \{e_s\},$$

и выделенного дифференциала $d\eta_M$ на ней:
простые полюса на бесконечности с
вычетами ± 1 и чисто мнимыми периодами:

$$d\eta_M = (x^g + \dots) \frac{dx}{w}$$



Мотивация

Примеры:

Сфера $g = 0$ дает многочлены Чебышева (1853);

Торы $g = 1$ порождают семейство многочленов Золотарева (1868).

Квантование периодов

$$\int_C d\eta_M \in \frac{2\pi i}{n} \mathbb{Z}, \quad \forall C \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

Q: Как сохранить включения на переменной кривой M ?

A: Двигайтесь по слоям отображения периодов.

Мотивация

Квантование периодов

$$\int_C d\eta_M \in \frac{2\pi i}{n} \mathbb{Z}, \quad \forall C \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

Q: Как сохранить включения на переменной кривой M ?

A: Двигайтесь по слоям отображения периодов.

Мотивация

Квантование периодов

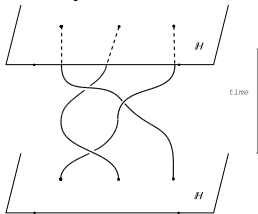
$$\int_C d\eta_M \in \frac{2\pi i}{n} \mathbb{Z}, \quad \forall C \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

Q: Как сохранить включения на переменной кривой M ?

A: Двигайтесь по слоям отображения периодов.

Пространство модулей вещественных гиперэллиптических кривых

Пространство модулей $\mathcal{H}$ вещественных (т.е. допускающих отражение) гиперэллиптических кривых с отмеченной точкой ∞ на ориентированном вещественном овале разбито на компоненты $\mathcal{H}_g^k$ фиксацией топологических инвариантов: числа k вещественных овалов и рода g . Элемент пространства задается половиной симметричного дивизора ветвления $E = \bar{E}$ из $2k$ вещественных точек и $g - k + 1$ точек верхней полуплоскости по модулю сдвигов и растяжений.



$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_g^k = 2g;$$

$$\pi_1(\mathcal{H}_g^k) = Br_{g-k+1} \text{ (косы на } g - k + 1 \text{ нитях).}$$

Отображение периодов

Локально отображение периодов $\mathcal{H}_g^k \rightarrow \mathbb{R}^g$ задается на базисе нечетных циклов C_j (интегралы по четным циклам нулевые)

$$\Pi_j(E) = -i \int_{C_j} d\eta_{M(E)}, \quad j = 1, \dots, g.$$

Глобально это отображение неоднозначно из-за монодромии связности Гаусса-Манина: косы перепутывают базисные циклы C_j (представление Бурату).

На универсальной накрывающей $\tilde{\mathcal{H}}_g^k \simeq \mathbb{R}^{2g}$ пространства модулей отображение Π корректно определено.

Отображение периодов

Локально отображение периодов $\mathcal{H}_g^k \rightarrow \mathbb{R}^g$ задается на базисе нечетных циклов C_j (интегралы по четным циклам нулевые)

$$\Pi_j(E) = -i \int_{C_j} d\eta_{M(E)}, \quad j = 1, \dots, g.$$

Глобально это отображение неоднозначно из-за монодромии связности Гаусса-Манина: косы перепутывают базисные циклы C_j (представление Буржу).

На универсальной накрывающей $\tilde{\mathcal{H}}_g^k \simeq \mathbb{R}^{2g}$ пространства модулей отображение Π корректно определено.

Отображение периодов

Локально отображение периодов $\mathcal{H}_g^k \rightarrow \mathbb{R}^g$ задается на базисе нечетных циклов C_j (интегралы по четным циклам нулевые)

$$\Pi_j(E) = -i \int_{C_j} d\eta_{M(E)}, \quad j = 1, \dots, g.$$

Глобально это отображение неоднозначно из-за монодромии связности Гаусса-Манина: косы перепутывают базисные циклы C_j (представление Буржу).

На универсальной накрывающей $\tilde{\mathcal{H}}_g^k \simeq \mathbb{R}^{2g}$ пространства модулей отображение Π корректно определено.

Отображение периодов: F.A.Q.

Возникают естественные вопросы:

- Гладкие ли слои отображения Π ?
- Сколько рациональных слоев? (параметризуют решения задач)
- Как Π взаимодействует с косами? Есть ли неподвижные слои?
- Каков образ Π ?
- Какова глобальная топология слоя? Связность слоя?

Отображение периодов: F.A.Q.

Возникают естественные вопросы:

- Гладкие ли слои отображения Π ?
- Сколько рациональных слоев? (параметризуют решения задач)
- Как Π взаимодействует с косами? Есть ли неподвижные слои?
- Каков образ Π ?
- Какова глобальная топология слоя? Связность слоя?

Отображение периодов: F.A.Q.

Возникают естественные вопросы:

- Гладкие ли слои отображения Π ?
- Сколько рациональных слоев? (параметризуют решения задач)
- Как Π взаимодействует с косами? Есть ли неподвижные слои?
- Каков образ Π ?
- Какова глобальная топология слоя? Связность слоя?

Отображение периодов: F.A.Q.

Возникают естественные вопросы:

- Гладкие ли слои отображения Π ?
- Сколько рациональных слоев? (параметризуют решения задач)
- Как Π взаимодействует с косами? Есть ли неподвижные слои?
- Каков образ Π ?
- Какова глобальная топология слоя? Связность слоя?

Отображение периодов: F.A.Q.

Возникают естественные вопросы:

- Гладкие ли слои отображения P ?
- Сколько рациональных слоев? (параметризуют решения задач)
- Как P взаимодействует с косами? Есть ли неподвижные слои?
- Каков образ P ?
- Какова глобальная топология слоя? Связность слоя?

Отображение периодов: F.A.Q.

Возникают естественные вопросы:

- Гладкие ли слои отображения P ?
- Сколько рациональных слоев? (параметризуют решения задач)
- Как P взаимодействует с косами? Есть ли неподвижные слои?
- Каков образ P ?
- Какова глобальная топология слоя? Связность слоя?

Отображение периодов: F.A.Q.

Возникают естественные вопросы:

- Гладкие ли слои отображения Π ?
- Сколько рациональных слоев? (параметризуют решения задач)
- Как Π взаимодействует с косами? Есть ли неподвижные слои?
- Каков образ Π ?
- Какова глобальная топология слоя? Связность слоя?

Гипотеза (2001)

Компонента любого слоя = g -клетка.

Графическое представление кривых

- A.Grothendieck, 1981, Dessins d'Enfant
- R.Penner, М.Концевич, Л.Чехов, В.Фок 1988-1990-е
Ленточные графы
- M.Bertola 2008 , Boutroux curves

Графическое представление кривых

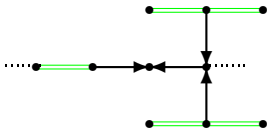
- A.Grothendieck, 1981, Dessins d'Enfant
- R.Penner, М.Концевич, Л.Чехов, В.Фок 1988-1990-е
Ленточные графы
- M.Bertola 2008 , Boutroux curves

Граф $\Gamma(M)$ составлен из отрезков критических траекторий двух ортогональных слоений штрэбелева квадратичного дифференциала $(d\eta_M)^2$ на сфере. Вершины графа содержат дивизор дифференциала. Ребрам приписана их длина в метрике $ds = |d\eta_M|$.

Пример ассоциированного графа

Замечания

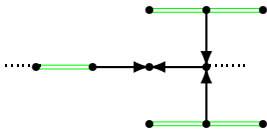
- Периоды дифференциала $d\eta_M$ – целочисленные линейные комбинации длин вертикальных ребер графа
- При заданном роде g графов конечное число и их можно перечислить алгоритмически: любой взвешенный граф Γ удовлетворяющий некоторым пяти свойствам происходит из единственной кривой $M \in \mathcal{H}$.



Пример ассоциированного графа

Замечания

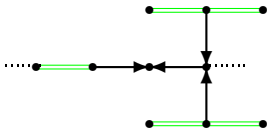
- Периоды дифференциала $d\eta_M$ – целочисленные линейные комбинации длин вертикальных ребер графа
- При заданном роде g графов конечное число и их можно перечислить алгоритмически: любой взвешенный граф Γ удовлетворяющий некоторым пяти свойствам происходит из единственной кривой $M \in \mathcal{H}$.



Пример ассоциированного графа

Замечания

- Периоды дифференциала $d\eta_M$ – целочисленные линейные комбинации длин вертикальных ребер графа
- При заданном роде g графов конечное число и их можно перечислить алгоритмически: любой взвешенный граф Γ удовлетворяющий некоторым пяти свойствам происходит из единственной кривой $M \in \mathcal{H}$.



Разбиение пространства модулей на многогранники

- На веса допустимого графа Γ имеются линейные ограничения типа неравенств. Они заполняют многогранник $\mathcal{A}[\Gamma]$ размерности не более $2g$. Для показанного ранее графа многогранник $\mathcal{A}[\Gamma]$ – произведение треугольника на квадрант.
- Многогранники вещественно аналитически вложены в пространство модулей.
- Отношения соседства многогранников известны – они соответствуют вырождениям графов Γ
- Отображение периодов (ветвь) в каждом многограннике – линейное с целыми коэффициентами.

Разбиение пространства модулей на многогранники

- На веса допустимого графа Γ имеются линейные ограничения типа неравенств. Они заполняют многогранник $\mathcal{A}[\Gamma]$ размерности не более $2g$. Для показанного ранее графа многогранник $\mathcal{A}[\Gamma]$ – произведение треугольника на квадрант.
- Многогранники вещественно аналитически вложены в пространство модулей.
- Отношения соседства многогранников известны – они соответствуют вырождениям графов Γ
- Отображение периодов (ветвь) в каждом многограннике – линейное с целыми коэффициентами.

Разбиение пространства модулей на многогранники

- На веса допустимого графа Γ имеются линейные ограничения типа неравенств. Они заполняют многогранник $\mathcal{A}[\Gamma]$ размерности не более $2g$. Для показанного ранее графа многогранник $\mathcal{A}[\Gamma]$ – произведение треугольника на квадрант.
- Многогранники вещественно аналитически вложены в пространство модулей.
- Отношения соседства многогранников известны – они соответствуют вырождениям графов Γ
- Отображение периодов (ветвь) в каждом многограннике – линейное с целыми коэффициентами.

Разбиение пространства модулей на многогранники

- На веса допустимого графа Γ имеются линейные ограничения типа неравенств. Они заполняют многогранник $\mathcal{A}[\Gamma]$ размерности не более $2g$. Для показанного ранее графа многогранник $\mathcal{A}[\Gamma]$ – произведение треугольника на квадрант.
- Многогранники вещественно аналитически вложены в пространство модулей.
- Отношения соседства многогранников известны – они соответствуют вырождениям графов Γ
- Отображение периодов (ветвь) в каждом многограннике – линейное с целыми коэффициентами.

PL модель слоя отображения периодов

Универсальная накрывающая пространства модулей разбита на клетки, помеченные устойчивым графом Γ и косой $\beta \in Br_{g-k+1}$.

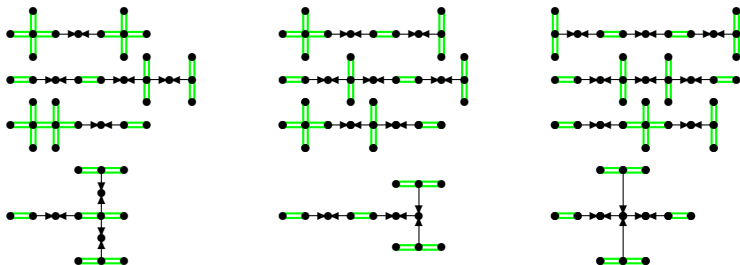
PL модель слоя отображения периодов

Универсальная накрывающая пространства модулей разбита на клетки, помеченные устойчивым графом Γ и косой

$$\beta \in Br_{g-k+1}.$$

Пример:

20 полноразмерных клеток пространства $\mathcal{H}_3^2$ закодированы графами (с точностью до симметрии)



PL модель слоя отображения периодов

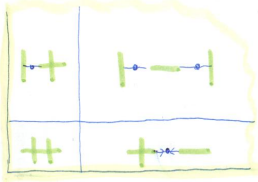
Универсальная накрывающая пространства модулей разбита на клетки, помеченные устойчивым графом Γ и косой

$$\beta \in Br_{g-k+1}.$$

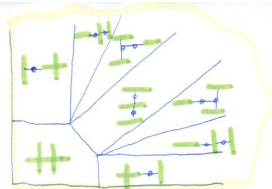
В каждой клетке слой отображения периодов это сечение многогранника плоскостью половинной размерности

Сборка слоя пространства $\tilde{\mathcal{H}}_2^1$

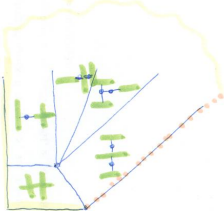
$h \in a$



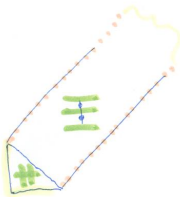
$h \in b$



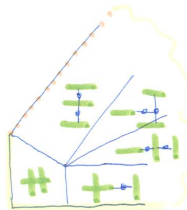
— absolute (boundary) of moduli space $\tilde{\mathcal{H}}_2^1$



$h \in d$



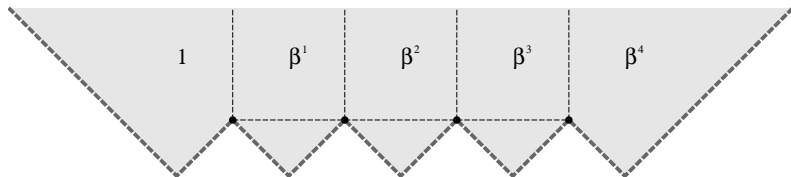
$h \in e$



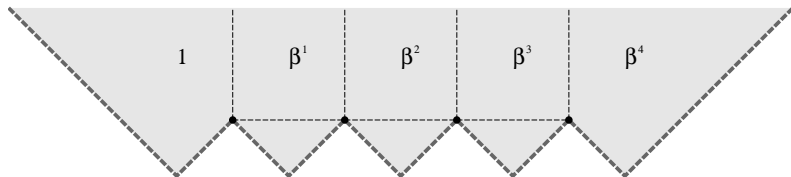
$h \in c$

— exceptional cells. glueing "with braids"

Дальнейшая сборка слоя в фазе 'е'



Дальнейшая сборка слоя в фазе 'е'



Спасибо за внимание!