Группы G_n^k, нерейдемейстеровская теория узлов и динамические системы

Василий Олегович Мантуров
vomanturov@yandex.ru

Конференция профессоров РАН по отделению математических наук

МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва

14-16 июня 2016

Содержание

Определение групп G_n^k

Для двух целых чисел $n > k$ мы определим [Manturov, 2015] G_n^k как группу, имеющую $\binom{n}{k}$ образующих a_m, где m пробегает множество всех неупорядоченных наборов из k элементов $m_1, \dots, m_k$, где все m_i — попарно различные элементы из множества $\{1, \dots, n\}$.

$$G_n^k = \langle a_m | (1), (2), (3) \rangle$$

.

Группы G_n^k :

Соотношение тетраэдра (Замолодчикова)
Для каждого набора U индексов $u_1, \dots, u_{k+1} \in \{1, \dots, n\}$ рассмотрим $k+1$ множеств $m^j = U \setminus \{u_j\}, j = 1, \dots, k+1$. Набору U сопоставим соотношение

$$a_{m^1} \cdot a_{m^2} \cdots a_{m^{k+1}} = a_{m^{k+1}} \cdots a_{m^2} \cdot a_{m^1}; \tag{1}$$

для наборов U и $\bar{U}$, отличающихся обращением порядка, получим одно и то же соотношение.
Итого $\frac{(k+1)\binom{n}{k+1}}{2}$ соотношений.
Тензорная форма соотношения тетраэдра встречается в теории 2-узлов.

Соотношения в G_n^k

Дальняя коммутативность: для m, m' $Card(m \cap m') < k-1$ рассмотрим соотношения

$$a_m a_{m'} = a_{m'} a_m \tag{2}$$

Отметим, что дальняя коммутативность встречается только при $n > k+1$.
Кроме того, для каждого мультииндекса m запишем следующее соотношение:

$$a_m^2 = 1 \tag{3}$$

Определим G_n^k как факторгруппу сводобной группы, порожденной a_m, по соотношениям (1), (2) и (3).

Замечение: G_n^2 и Янг-Бакстер

При $k = 2$ главное соотношение является теоретико-групповой формой соотношения Янга-Бакстера:

$$a_{12}a_{13}a_{23} = a_{23}a_{13}a_{12}.$$

Примеры групп G_n^k

(при $n = k$ образующая единственна, группа изоморфна $\mathbb{Z}_2$).
G_n^2: *свободные косы*; *гауссовы косы*; решена проблема тождества.
Соизмеримы с группами Кокстера [Manturov-Coxeter].

$G_3^2 = \langle a, b, c | a^2 = b^2 = c^2, (abc)^2 = 1 \rangle$.

$G_4^3 = \langle a, b, c, d | a^2 = b^2 = c^2 = d^2, (abcd)^2 = (abdc)^2 = (acbd)^2 = 1$.
(проблема тождества решена А.А.Клячко)
(Л.А.Бокуть)

Основная теорема

Теорема ([Manturov, 2015])

Динамические системы, описывающие поведение набора n частиц в общем положении относительно хорошего свойства, задаваемого поднабором из k частиц, *обладают топологическим инвариантом со значением в* G_n^k.

Системы точек на $\mathbb{R}^2$

Откуда происходят G_n^k?

Рассмотрим набор попарно различных точек на $\mathbb{R}^2$. Динамика — непрерывное движение точек. Коса — динамика (в начале и в конце точки равномерно расположены на единичной окружности).

Точки — **в общем положении**, если никакие три из них не лежат на одной прямой.

Отметим те моменты, когда точки *не находятся в общем положении*

Когда три точки z_i, z_j, z_k лежат на одной прямой, запишем букву a_{ijk}.

Косе сопоставим произведение букв a_{ijk}, отвечающих критическим моментам.

Системы точек на $\mathbb{R}^2$

Откуда происходят G_n^k?

Рассмотрим набор попарно различных точек на $\mathbb{R}^2$. Динамика — непрерывное движение точек. Коса — динамика (в начале и в конце точки равномерно расположены на единичной окружности).
Точки — **в общем положении**, если никакие три из них не лежат на одной прямой.
Отметим те моменты, когда точки *не находятся в общем положении*
Когда три точки z_i, z_j, z_k лежат на одной прямой, запишем букву a_{ijk}.
Косе сопоставим произведение букв a_{ijk}, отвечающих критическим моментам.

Системы точек на $\mathbb{R}^2$

Деформации общего положения (особенности коразмерности 2) отвечают соотношениям:

шевеление квадрисеканты: соотношение тетраэдра;

изменение порядка независимых трисекант: дальняя коммутативность; (например, a_{123} коммутирует с a_{145}, но не с a_{135}).

касание: соотношение $a_m^2 = 1$.

Системы точек на $\mathbb{R}^2$

Деформации общего положения (особенности коразмерности 2) отвечают соотношениям:

шевеление квадрисеканты: соотношение тетраэдра;

изменение порядка независимых трисекант: дальняя коммутативность; (например, a_{123} коммутирует с a_{145}, но не с a_{135}).

касание: соотношение $a_m^2 = 1$.

Системы точек на $\mathbb{R}^2$

Деформации общего положения (особенности коразмерности 2) отвечают соотношениям:

шевеление квадрисеканты: соотношение тетраэдра;

изменение порядка независимых трисекант: дальняя коммутативность; (например, a_{123} коммутирует с a_{145}, но не с a_{135}).

касание: соотношение $a_m^2 = 1$.

Системы точек на $\mathbb{R}^2$

Деформации общего положения (особенности коразмерности 2) отвечают соотношениям:

шевеление квадрисеканты: соотношение тетраэдра;

изменение порядка независимых трисекант: дальняя коммутативность; (например, a_{123} коммутирует с a_{145}, но не с a_{135}).

касание: соотношение $a_m^2 = 1$.

Теория групп

1. В группах G_n^2 проблема тождества решена
2. *Простые эпиморфизмы в свободные группы и свободные произведения циклических групп*
3. Группы G_n^k много сложнее и богаче, чем группы G_n^2.
   Гомоморфизм удаления нити: $G_n^k \to G_{n-1}^k$
   Отобразим $a_{ijk} \to 1$, если один из индексов i, j, k равен n; в противном случае a_{ijk} to a_{ijk}.
   Гомоморфизм забывания нити: $G_n^k \to G_{n-1}^{k-1}$
   Переводим $a_{ijn} \to a_{ij}$; $a_{pqr} \to 1$ if $p \neq n, q \neq n, r \neq n$.
   Объяснение названия: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
4. Алгоритм переписывания: У *разных* групп бывают одинаковые графы Кэли. Таковы подгруппы конечного индекса в группах G_n^2 и группах Кокстера $C(n, 2)$.
   Связь с группами Кокстера (УМН., в печати).
5. Алгоритм градиентного спуска при распознавании.

Теория групп

1. В группах G_n^2 проблема тождества решена
2. *Простые эпимоморфизмы в свободные группы и свободные произведения циклических групп*
3. Группы G_n^k много сложнее и богаче, чем группы G_n^2.
   Гомоморфизм удаления нити: $G_n^k \to G_{n-1}^k$
   Отобразим $a_{ijk} \to 1$, если один из индексов i, j, k равен n; в противном случае a_{ijk} to a_{ijk}.
   Гомоморфизм забывания нити: $G_n^k \to G_{n-1}^{k-1}$
   Переводим $a_{ijn} \to a_{ij}$; $a_{pqr} \to 1$ if $p \neq n, q \neq n, r \neq n$.
   Объяснение названия: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
4. Алгоритм переписывания: У *разных* групп бывают одинаковые графы Кэли. Таковы подгруппы конечного индекса в группах G_n^2 и группах Кокстера $C(n, 2)$.
   Связь с группами Кокстера (УМН., в печати).
5. Алгоритм градиентного спуска при распознавании.

Теория групп

1. В группах G_n^2 проблема тождества решена
2. *Простые эпимоморфизмы в свободные группы и свободные произведения циклических групп*
3. Группы G_n^k много сложнее и богаче, чем группы G_n^2.
   Гомоморфизм удаления нити: $G_n^k \to G_{n-1}^k$
   Отобразим $a_{ijk} \to 1$, если один из индексов i, j, k равен n; в противном случае a_{ijk} to a_{ijk}.
   Гомоморфизм забывания нити: $G_n^k \to G_{n-1}^{k-1}$
   Переводим $a_{ijn} \to a_{ij}$; $a_{pqr} \to 1$ if $p \neq n, q \neq n, r \neq n$.
   Объяснение названия: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
4. Алгоритм переписывания: У *разных* групп бывают одинаковые графы Кэли. Таковы подгруппы конечного индекса в группах G_n^2 и группах Кокстера $C(n, 2)$.
   Связь с группами Кокстера (УМН., в печати).
5. Алгоритм градиентного спуска при распознавании.

Теория групп

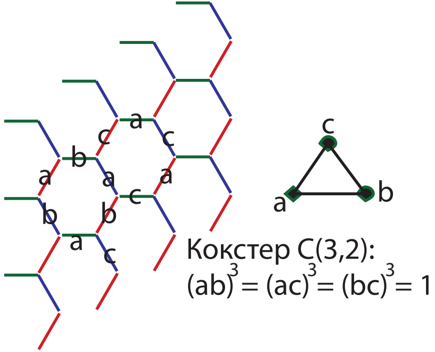
1. В группах G_n^2 проблема тождества решена
2. *Простые эпимоморфизмы в свободные группы и свободные произведения циклических групп*
3. Группы G_n^k много сложнее и богаче, чем группы G_n^2.
   Гомоморфизм удаления нити: $G_n^k \to G_{n-1}^k$
   Отобразим $a_{ijk} \to 1$, если один из индексов i, j, k равен n; в противном случае a_{ijk} to a_{ijk}.
   Гомоморфизм забывания нити: $G_n^k \to G_{n-1}^{k-1}$
   Переводим $a_{ijn} \to a_{ij}$; $a_{pqr} \to 1$ if $p \neq n, q \neq n, r \neq n$.
   Объяснение названия: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
4. Алгоритм переписывания: У *разных* групп бывают одинаковые графы Кэли. Таковы подгруппы конечного индекса в группах G_n^2 и группах Кокстера $C(n, 2)$.
   Связь с группами Кокстера (УМН., в печати).
5. Алгоритм градиентного спуска при распознавании.

Теория групп

1. В группах G_n^2 проблема тождества решена
2. *Простые эпиморфизмы в свободные группы и свободные произведения циклических групп*
3. Группы G_n^k много сложнее и богаче, чем группы G_n^2.
   Гомоморфизм удаления нити: $G_n^k \to G_{n-1}^k$
   Отобразим $a_{ijk} \to 1$, если один из индексов i, j, k равен n; в противном случае a_{ijk} to a_{ijk}.
   Гомоморфизм забывания нити: $G_n^k \to G_{n-1}^{k-1}$
   Переводим $a_{ijn} \to a_{ij}$; $a_{pqr} \to 1$ if $p \neq n, q \neq n, r \neq n$.
   Объяснение названия: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
4. Алгоритм переписывания: У *разных* групп бывают одинаковые графы Кэли. Таковы подгруппы конечного индекса в группах G_n^2 и группах Кокстера $C(n, 2)$.
   Связь с группами Кокстера (УМН., в печати).
5. Алгоритм градиентного спуска при распознавании.

Теория групп

1. В группах G_n^2 проблема тождества решена
2. *Простые эпиморфизмы в свободные группы и свободные произведения циклических групп*
3. Группы G_n^k много сложнее и богаче, чем группы G_n^2.
   Гомоморфизм удаления нити: $G_n^k \to G_{n-1}^k$
   Отобразим $a_{ijk} \to 1$, если один из индексов i, j, k равен n; в противном случае a_{ijk} to a_{ijk}.
   Гомоморфизм забывания нити: $G_n^k \to G_{n-1}^{k-1}$
   Переводим $a_{ijn} \to a_{ij}$; $a_{pqr} \to 1$ if $p \neq n, q \neq n, r \neq n$.
   Объяснение названия: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
4. Алгоритм переписывания: У *разных* групп бывают одинаковые графы Кэли. Таковы подгруппы конечного индекса в группах G_n^2 и группах Кокстера $C(n, 2)$.
   Связь с группами Кокстера (УМН., в печати).
5. Алгоритм градиентного спуска при распознавании.



Один и тот же граф Кэли задает две разные группы G_3^2 и $C(3,2)$: элементы одного цвета соответствуют одинаковым буквам в G_3^2.

Группы G_n^3 и группы Кокстера

Соотношения:

$$a_{12}^2 = a_{13}^2 = a_{23}^2 = 1,$$

$$(a_{12}a_{13}a_{23})^2 = 1.$$

Путь на графе Кэли *замкнут*, если каждый горизонтальный отрезок (буква a_{12}, буква зеленого цвета сокращается с другим горизонтальным отрезком с **той же абсциссой**).
У каждой буквы a_{12} в слове из G_3^2 есть **индекс**. Сокращаться могут буквы **одинакового индекса**.

Гомоморфизмы из группы крашеных кос в G_n^3 (совместная работа с И.М.Никоновым, [ManturovNikonov2015])

Точки на плоскости. Свойство: три точки на одной прямой, $k = 3$.
Отображение крашеных кос $PB_n \to G_n^3$

Еще один пример:

Точки на плоскости. Свойство: четыре точки на одной окружности/прямой, $k = 4$.
Отображение крашеных кос $PB_n \to G_n^4$.
Отображение крашеных кос в “смешаную” группу:

$$\sigma_{i_1 j_1} \cdots \sigma_{i_k j_k} \to \sigma_{i_1 j_1} Q_1(a) \sigma_{i_2 j_2} Q_2(a) \cdots \sigma_{i_k j_k} Q_k(a),$$

где $Q_j(a), j = 1, \ldots, k$ — слова от образующих a_{pqr}.

Гомоморфизмы из группы крашеных кос в G_n^3 (совместная работа с И.М.Никоновым, [ManturovNikonov2015])

Точки на плоскости. Свойство: три точки на одной прямой, $k = 3$.
Отображение крашеных кос $PB_n \to G_n^3$

Еще один пример:

Точки на плоскости. Свойство: четыре точки на одной окружности/прямой, $k = 4$.
Отображение крашеных кос $PB_n \to G_n^4$.

Отображение крашеных кос в "смешаную" группу:

$$\sigma_{i_1 j_1} \cdots \sigma_{i_k j_k} \to \sigma_{i_1 j_1} Q_1(a) \sigma_{i_2 j_2} Q_2(a) \cdots \sigma_{i_k j_k} Q_k(a),$$

где $Q_j(a), j = 1, \ldots, k$ — слова от образующих a_{pqr}.

Гомоморфизмы из группы крашеных кос в G_n^3 (совместная работа с И.М.Никоновым, [ManturovNikonov2015])

Точки на плоскости. Свойство: три точки на одной прямой, $k = 3$.
Отображение крашеных кос $PB_n \to G_n^3$
Еще один пример:
Точки на плоскости. Свойство: четыре точки на одной окружности/прямой, $k = 4$.
Отображение крашеных кос $PB_n \to G_n^4$.
Отображение крашеных кос в “смешаную” группу:

$$\sigma_{i_1 j_1} \cdots \sigma_{i_k j_k} \to \sigma_{i_1 j_1} Q_1(a) \sigma_{i_2 j_2} Q_2(a) \cdots \sigma_{i_k j_k} Q_k(a),$$

где $Q_j(a), j = 1, \ldots, k$ — слова от образующих a_{pqr}.

Воображаемые образующие и картинки в группах кос

[Совместно с Ким Сонжоном]
У каждой буквы в слове из $\sigma_{i_l j_l}$ возникают индексы. Если образующие сокращаются, то они имеют одинаковые индексы.
У кос возникают “**воображаемые образующие**”.

Узловой аналог групп G_n^k

Если динамическая система допускает изменение количества точек, то правильным аналогом группы G_n^k будет “многомерный узел.”
Получается отображение

$$(\text{Узлы}) \mapsto \text{Многомерные узлы.}$$

Узловой аналог групп G_n^k

Если динамическая система допускает изменение количества точек, то правильным аналогом теории G_n^3 будет (обобщенный) 2-узел.
Рассматриваем $K \subset \mathbb{R}^3$; Рассматриваем конфигурационное пространство горизонтальных прямых:

1. каждой точке $x \in K$ сопоставляем множество горизонтальных (направленных) прямых (x, ϕ), проходящих через K.
2. отождествляем пары $(x_1, \phi), (x_2, \phi)$, если прямая, проходящая через (x_1, x_2), направлена под углом ϕ
Автоматически отождествляются $(x_1, \phi + \pi), (x_2, \phi + \pi)$.
3. у конфигурационного пространства $K \times S^1$ происходит отождествление *двойных линий*;
4. получается 2-комплекс $\alpha(K)$ со структурой.

Теорема

Если два узла K_1, K_2 общего положения изотопны, то $\alpha(K_1), \alpha(K_2)$ эквивалентны посредством движений Розмана.

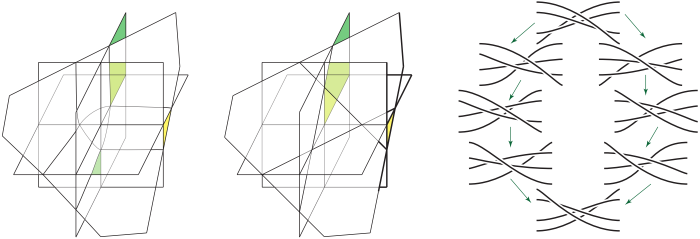


Рис.: Тетраэдральное движение Розмана

$a_{123}a_{124}a_{134}a_{234} = a_{234}a_{134}a_{124}a_{123}$ Следовательно, **классические узлы и динамические системы можно изучать с помощью инвариантов** 2**-узлов.**

Где искать дальнейшие применения групп G_n^k

1. Теория групп: какие группы вложимы в G_n^k?
2. Структуры в теории узлов: в каждом перекрестке косы Артина возникает много новых структур.
3. Изучение Mapping Class Group для 2-поверхности.
4. 2-узлы: уравнение Замолодчикова.
5. Монодромия дифферецниальных уравнения
6. Склейки римановых поверхностей (диаграммы Рудольфа); топологическая теория Галуа.
7. G_n^k-гомологии, G_n^k-гомотопии, G_n^k-теория Морса

References I

V.O.Manturov
Non-Reidemeister Knot Theory and Its Applications in Dynamical Systems, Geometry, and Topology, *http://arxiv.org/abs/1501.05208* (2015)

V.O.Manturov, I.M.Nikonov,
On braids and groups G_n^k *http://arxiv.org/abs/1507.03745* (2015) **JKTR 2015, Vol. 24, No.13.**

V.O.Manturov,
On Groups G_n^2 and Coxeter Groups *http://arxiv.org/abs/1512.09273* (2015) **УМН, в Печати**

V.O.Manturov,
A Note on a Map from Knots to 2-Knots,
http://arxiv.org/abs/1604.06597 (2016)