

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ  
ТРЕХМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ  
(ANALYTICAL PROPERTIES OF SOLUTIONS  
OF THREE-DIMENSIONAL NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM)

В. В. Цегельник (V. V. Tsegel'nik)

*Белорусский государственный университет информатики  
и радиозлектроники, Минск, Республика Беларусь*

tsegvv@bsuir.by

Система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + z - 1) + ax, \\ \dot{y} = x(-x^2 + 3z + 1) + ay, \\ \dot{z} = -2z(b + xy) \end{cases} \quad (1)$$

(система Рабиновича–Фабриканта [1] с неизвестными функциями  $x, y, z$  независимой переменной  $t$  ( $a, b$  — произвольные фиксированные параметры)) моделирует процесс нелинейного взаимодействия волн в плазме. Она оказывается полезной при описании процессов, протекающих в вязкой среде (жидкой или газообразной), при возникновении волн Толлмина–Шлихтинга и др. При стандартных значениях  $a = 0.87$ ,  $b = 1.1$  в модели (1) наблюдается детерминированный хаос, а ее притягивающее множество представляет собой странный аттрактор [2].

Новые качественные свойства решений системы (1) получены в [3] (смотри также [4]) с учетом новых подходов к исследованию динамических систем, изложенных в [5]. В частности, доказано существование в (1) скрытых хаотических аттракторов при определенных значениях  $a$  и  $b$ .

На основании известной гипотезы [6] о несовместимости выполнения для системы свойства Пенлеве с хаотичностью ее поведения, актуальным является исследование аналитических свойств решений системы (1). Под свойством Пенлеве (в предположении, что независимая переменная  $t$  является комплексной) будем понимать отсутствие у общего решения системы (1) подвижных критических особых точек [7, 8], т.е. возможность наличия только подвижных полюсов.

Одним из алгоритмов, обеспечивающих проверку выполнения условий, необходимых для наличия у дифференциального уравнения свой-

ства Пенлеве является формальный тест Пенлеве [9, 10] (алгоритм Ковалевской–Гамбье [11]).

**Теорема 1.** Система (1) ни при каких значениях параметров  $a, b$  не проходит формальный тест Пенлеве и, следовательно, не обладает свойством Пенлеве.

Доказательство утверждения следует из того, что для системы (1) ни при каких  $a$  и  $b$  не выполняется первый (из трех) шаг формального теста Пенлеве.

Система (1) в общем случае обладает симметрией  $x(t) \rightarrow -x(t)$ ,  $y(t) \rightarrow -y(t)$ ,  $z(t) \rightarrow z(t)$ .

Если  $a = b = 0$ , то (1) сохраняет свой вид при следующих преобразованиях:

а)  $x(t) \rightarrow -x(-t)$ ,  $y(t) \rightarrow y(-t)$ ,  $z(t) \rightarrow z(-t)$ .

б)  $x(t) \rightarrow x(-t)$ ,  $y(t) \rightarrow -y(-t)$ ,  $z(t) \rightarrow z(-t)$ .

**Теорема 2.** Система (1) при  $a = 0$  имеет решение вида

$$x = \frac{x_{-1}}{\tau^{\frac{1}{2}}} + x_1 \tau^{\frac{1}{2}} + x_3 \tau^{\frac{3}{2}} + \dots, \quad (2)$$

$$y = \frac{ix_{-1}}{\tau^{\frac{1}{2}}} + y_1 \tau^{\frac{1}{2}} + y_3 \tau^{\frac{3}{2}} + \dots, \quad (3)$$

$$z = z_0 \tau + z_1 \tau^2 + \dots, \quad (4)$$

где  $\tau = t - t_0$ ,  $x_{-1}^2 = \frac{i}{2}$ ,  $i^2 = -1$ ,  $z_0$ ,  $x_1(y_1)$ ,  $t_0$  — произвольные постоянные, причем  $\frac{3}{2}x_1 - \frac{iy_1}{2} = -ix_{-1}$ . Ряды (2)–(4) сходятся в области  $0 < |\tau| < \rho$ ,  $\rho > 0$ .

В том, что разложения (2)–(4) зависят от трех произвольных постоянных, легко убедиться непосредственной подстановкой рядов в уравнения системы (1). Для доказательства сходимости разложений (2)–(4) достаточно ввести преобразования

$$\tau = s^2, x = \frac{1}{s}(x_{-1} + u_1(s)), y = \frac{1}{s}(ix_{-1} + u_2(s)), z = s^2(z_0 + u_3(s)),$$

переводящие систему (1) в систему Брио и Буке и воспользоваться следующим результатом (см. теорему А.12 из [12, с. 272]):

Если система Брио и Буке

$$su'_j = f_j(s, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad ' = \frac{d}{ds} \quad (5)$$

с аналитическими в некоторой окрестности точки  $s = u_1 = \dots = u_n = 0$  функциями  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , с условиями  $f_j(0, \dots, 0) = 0$ , допускает формальное решение

$$u_j(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} s^k, \quad c_{jk} \in \mathbb{C}, \quad (6)$$

то разложение (6) сходится в области  $0 < |s| < \rho_1$ ,  $\rho_1 > 0$ .

**Теорема 3.** Система (1) в случае  $a = -b$  имеет неавтономный первый интеграл  $x^2 + y^2 + 4z = Ce^{2at}$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

**Следствие.** Система (1) при  $a = b = 0$  имеет интеграл энергии [1]  $x^2 + y^2 + 4z = E$ , где  $E$  — произвольная постоянная.

**Теорема 4.** Система (1) в случае  $a = b = 0$  не обладает хаотическим поведением.

В силу следствия систему (1) можно свести к двумерной автономной системе. Но согласно [13] решения автономных систем с двумерным фазовым пространством не могут быть хаотичными.

### Список литературы

1. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // ЖЭТФ. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит. 2006.
3. Danca M.-F., Feskan M., Kuznetsov N., Chen G. Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system // Int. J. Bifurc. Chaos. 2016. V. 26, N 2. Art. 165 0038.
4. Danca M.-F., Chen G. Bifurcation and Chaos in a complex model of dissipative medium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2004. V. 14. P. 3409–3447.
5. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В. Скрытые колебания в динамических системах: шестнадцатая проблема Гильберта, гипотезы Айзермана и Кальмана, скрытые аттракторы в контурах Чуа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 105–121.
6. Горизли А. Интегрируемость и сингулярность. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед. 2006.
7. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГН-ТИУ, 1939.
8. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское. 1990.

9. Ablowitz *M.J.*, Ramani *A.*, Segur *H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 715–721.
10. Абловиц *М.*, Сигур *Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир. 1987.
11. Ковалевская *С.В.* Научные работы. М.: АН СССР. 1948.
12. Gromak *V.I.*, Laine *I.*, Shimomura *S.* Painlevé differential equations in the complex plane. Berlin: de Gruyter, 2002.
13. Мун *Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир. 1990.