Бифуркация удвоения ведущих элементов R-метода Гаусса на подпоследовательности, порожденной процедурой Сильвестра (Doubling bifurcation of the leading elements of the Gauss R-method on a subsequence generated by the Sylvester procedure)

П. Н. Сорокин (P. N. Sorokin),
Н. Н. Ченцова (N. N. Chentsova)

ФГУ ФНЦ НИИ системных исследований РАН, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

s_p_n_1974@bk.ru, nataly.chentsova@gmail.com

Определение 1. Пусть заданы $k \in \mathbb{N}^+$, квадратная матрица $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ порядка k с матричными элементами $(A^{(k)})_{i,j} \in \mathbb{R}$ с индексами $i,j = \overline{1,k}$, вектора-столбцы $x^{(k)}, b^{(k)}, p^{(k)} \in \mathbb{R}^k$ с координатами $(x^{(k)})_i, (b^{(k)})_i, (p^{(k)})_i \in \mathbb{R}$ и с индексами $i = \overline{1,k}$. R-методом Гаусса поиска решения $x^{(k)}$ системы линейных уравнений с матрицей $A^{(k)}$ и с правой частью $b^{(k)}$:

$$\sum_{1\le j\le k} (A^{(k)})_{i,j} \cdot (x^{(k)})_j = (b^{(k)})_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{1}$$

называется такая модификация метода Гаусса, когда при $n = \overline{1,k}$ за $\ell_n^{(k)}$ — ведущий элемент n-го шага — выбирается матричный элемент $(A_{n-1}^{(k)})_{i_n^{(k)},j_n^{(k)}}$ матрицы $A_{n-1}^{(k)}$ с максимальным значением модуля и минимальной в лексикографическом порядке парой индексов:

$$(i_n^{(k)}, j_n^{(k)}) = \min\{(i_1,j_1)\colon n \le i_1, j_1 \le k, |(A_{n-1}^{(k)})_{i_1,j_1}| = \max_{n\le i,j\le k} |(A_{n-1}^{(k)})_{i,j}|\}, \tag{2}$$

$$\ell_n^{(k)} = (A_{n-1}^{(k)})_{i_n^{(k)},j_n^{(k)}}. \tag{3}$$

Если при $1 \le n \le k$ оказалось, что $\ell_n^{(k)} = 0$, то алгоритм заканчивает работу, напечатав: “Матрица $A^{(k)}$ линейной системы (1) вырождена”.

Пусть ведущий элемент n-го шага отличен от нуля:

$$\ell_n^{(k)} \ne 0, \quad 1 \le n \le k. \tag{4}$$

Далее вычисляются матрица $A_n^{(k)}$ и вектора-столбцы $b_n^{(k)}$, $p^{(k)}$ по следующей схеме:

Если $n = 0$, то выполняются начальные присвоения:

$$(p^{(k)})_i = i, \quad (b_0^{(k)})_i = (b^{(k)})_i, \quad 1 \le i \le k, \tag{5}$$

$$(A_0^{(k)})_{i,j} = (A^{(k)})_{i,j}, \quad 1 \le i, j \le k, \tag{6}$$

где $A^{(k)}$ — исходная матрица, а $b^{(k)}$ — правая часть системы (1).

Если $1 \le n \le k-1$, то выполняются присвоения:

$$(b_n^{(k)})_i = (b_{n-1}^{(k)})_i, \quad 1 \le i \le k, \tag{7}$$

$$(A_n^{(k)})_{i,j} = (A_{n-1}^{(k)})_{i,j}, \quad 1 \le i, j \le k. \tag{8}$$

Далее, если оказалось, что

$$i_n^{(k)} \ne n, \tag{9}$$

то переставляются $i_n^{(k)}$-я и n-я строки матрицы $A_n^{(k)}$, а также $i_n^{(k)}$-е и n-е координаты вектора $b_n^{(k)}$.

Далее, если оказалось, что

$$j_n^{(k)} \ne n, \tag{10}$$

то переставляются $j_n^{(k)}$-й и n-й столбцы матрицы $A_n^{(k)}$, и определяется

$$(p^{(k)})_{j_n^{(k)}} = n, \quad (p^{(k)})_n = j_n^{(k)}. \tag{11}$$

Затем при каждом $i = \overline{n+1, k}$ к i-й строке матрицы $A_n^{(k)}$ прибавляется n-я строка матрицы $A_n^{(k)}$, умноженная на число:

$$(g_n^{(k)})_{i,\,n} = -(A_n^{(k)})_{i,n} / \ell_n^{(k)}, \quad n+1 \le i \le k, \tag{12}$$

$$(A_n^{(k)})_{i,j} = (A_n^{(k)})_{i,j} + (g_n^{(k)})_{i,\,n} \cdot (A_n^{(k)})_{n,j}, \quad n+1 \le i \le k, \quad 1 \le j \le k, \tag{13}$$

а i-я координата вектор-столбца $b_n^{(k)}$ изменяется аналогично:

$$(b_n^{(k)})_i = (b_n^{(k)})_i + (g_n^{(k)})_{i,\,n} \cdot (b_n^{(k)})_n. \tag{14}$$

Формулой (14) завершается n-й шаг при $1 \le n \le k-1$.

Если $k \le n \le 2 \cdot k - 1$, то сначала выполняются присвоения (7), (8).

Затем при каждом $i = \overline{1, 2 \cdot k - n - 1}$ к i-й строке матрицы $A_n^{(k)}$ прибавляется n-я строка матрицы $A_n^{(k)}$, умноженная на число:

$$g_{i,2\cdot k-n} = -(A_n^{(k)})_{i,2\cdot k-n}/\ell_{2\cdot k-n}^{(k)}. \tag{15}$$

Затем вычисляются

$$(x^{(k)})_{(p^{(k)})_{2\cdot k-n}} = (b_{n-1}^{(k)})_{2\cdot k-n}/\ell_{2\cdot k-n}^{(k)}. \tag{16}$$

Формулой (16) завершается n-й шаг при $k \leq n \leq 2 \cdot k - 1$.

После $(2 \cdot k - 1)$-го шага алгоритм R-метода Гаусса заканчивается.

Определение 2. Пусть $p \in N^+$, $k = 2^p$. Следуя [6], будем говорить, что подпоследовательность матриц $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ порождена процедурой Сильвестра, если

$$A^{(1)} = 1, \quad A^{(2\cdot k)} = \begin{pmatrix} A^{(k)} & A^{(k)} \\ A^{(k)} & -A^{(k)} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Замечание. Пусть $p \in \mathbb{N}^+, k = 2^p$ и матрицы $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ принадлежат подпоследовательности, порожденной процедурой Сильвестра. Тогда

$$(A^{(k)})_{i,j} \in \{-1, 1\}, \quad 1 \leq i, j \leq k, \quad |\det A^{(k)}| = k^{k/2}. \tag{18}$$

Теорема. *Пусть $p \in \mathbb{N}^+$, $k = 2^p$ и подпоследовательность матриц $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ порождена процедурой Сильвестра. Тогда R-метод Гаусса, примененный к матрице $A^{(k)}$ совпадает с методом Гаусса, так как перестановок строк и столбцов нет. Пусть $A_{k-1}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ получена из матрицы $A^{(k)}$ после выполнения $k-1$ шагов R-метода Гаусса. Пусть матрица $A_k^{(2\cdot k)} \in \mathbb{R}^{2\cdot k\times 2\cdot k}$ получена из матрицы $A^{(2\cdot k)}$ после выполнения k шагов R-метода Гаусса, а матрица $A_{2\cdot k-1}^{(2\cdot k)} \in \mathbb{R}^{2\cdot k\times 2\cdot k}$ — после $2\cdot k-1$ шагов. Тогда*

$$A_k^{(2\cdot k)} = \begin{pmatrix} A_{k-1}^{(k)} & A_{k-1}^{(k)} \\ Z^{(k)} & -2 \cdot A^{(k)} \end{pmatrix}, \quad A_{2\cdot k-1}^{(2\cdot k)} = \begin{pmatrix} A_{k-1}^{(k)} & A_{k-1}^{(k)} \\ Z^{(k)} & -2 \cdot A_{k-1}^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где матрица $Z^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ состоит из одних нулей.

Ведущие элементы $\ell_n^{(2\cdot k)} = \ell_n^{(k)}$ при $1 \leq n \leq k$, а при $k < n \leq 2 \cdot k$ происходит бифуркация удвоения, то есть: $\ell_n^{(2\cdot k)} = -2 \cdot \ell_{n-k}^{(k)}$.

При всех $k \in \mathbb{N}^+$ ведущие элементы $\ell_n^{(k)}$ удовлетворяют неравенству

$$|\ell_n^{(k)}| \leq n, \quad 1 \leq n \leq k. \tag{20}$$

Замечание. Метод, названный нами R-методом Гаусса (см., например, [1]), хорошо известен и используется при расчетах на ЭВМ, но общепринятого названия не имеет. Например, в [2–4] он называется методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, а в [5] — методом Гаусса с полным перебором. Вопрос о скорости роста ведущих элементов остается открытым. Нами найдена верхняя оценка роста для матриц, порожденных процедурой Сильвестра при всех $k = 2^p$. Эта оценка (20) достигается при всех $n = 2^s \leq k = 2^p$. В монографиях [4, 5] приведены ссылки на статьи с некоторыми оценками. Мы надеемся, что наша оценка универсальна в смысле [7].

Список литературы

1. *Сорокин П.Н., Ченцова Н.Н.* Предельные теоремы для R-метода Гаусса // Материалы 12-й международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Тула: Изд-во ТПГУ им. Л.Н. Толстого, 2014. С. 210–214.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
3. *Богачев К.Ю.* Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М.: Изд-во мехмата МГУ, 1999.
4. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
5. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
6. *Таранников Ю.В.* Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптографии. М.: МЦНМО, 2011.
7. *Синай Я.Г.* Современные проблемы эргодической теории. М.: Физматлит, 1995.