Оценки возмущения резольвент краевых задач на многообразии (Estimates of resolvent perturbation of boundary value problems on a manifold)

А. М. Степин (A. M. Stepin), И. В. Цылин (I. V. Tsylin)

Московский государственный университет, Москва, Россия
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

ststepin@mail.ru, ioxlxoi@yandex.ru

Пусть M — гладкое связное многообразие с римановой метрикой g, эллиптический оператор $\mathcal{A}$ строится по полуторалинейной форме Φ, положительной и непрерывной в $H^1_0(\Omega)$. Сама форма Φ порождается дифференциальным выражением

$$\nabla^* \left(A\nabla u + au\right) + b\nabla u + cu, \tag{1}$$

где тензорное поле A предполагается эрмитовым и положительно определенным, $A \in L_\infty(M)2$, $a, b \in M(H^1(M) \to L_2(M))$, $c \in M(H^1(M) \to \to H^{-1}(M))$. Для области $\Omega \subset M$ рассмотрим задачу Дирихле

$$\mathcal{A}u = f \in H^{-1}(\Omega), \qquad u \in \mathring{H}^1(\Omega) \tag{2}$$

Введем оператор, решающий задачу (2)

$$\mathcal{G}_\Omega \colon H^{-1}(M) \to \mathring{H}^1(M).$$

Нас будет интересовать следующий вопрос. Пусть Ω_1 — некоторая фиксированная область и Ω_2 область близкая к Ω_1 (возмущение). Насколько будут близки резольвенты

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \varphi(\varepsilon), \tag{3}$$

где ε — величина расстояния (в том или ином смысле) между Ω_1 и Ω_2, X, Y — фиксированные банаховы пространства и функция φ зависит только от коэффициентов оператора $\mathcal{A}$ и от ε, но не от области Ω_2. Оценка (3) была представлена для произвольного возмущения области Ω_1 с границей C-класса в работе [1]. Однако, в свете работы [4] стало ясно, что при произвольных возмущениях мы теряем часть информации. Более того, изотропные пространства Соболева оказались менее полезными чем их анизотропные обобщения. Цель данного стендового доклада продемонстрировать часть результатов, полученных авторами за последние два года в этом направлении.

Определение 1 (расстояние типа Хаусдорфа)**.** Введем измеритель расстояния между множествами следующим образом, пусть X, Y — некоторые подмножества метрического компакта M, тогда

$$e(X,Y) = \sup_{x\in X} d(x,Y).$$

Определение 2. Для данного атласа $\mathcal{U}$ многообразия (M,g) скажем, что область $\Omega \subset M$ имеет границу класса $C^{0,\omega}_{\mathcal{U}}$ с нормой N, $\omega(\cdot)$ — модуль непрерывности, если для любого элемента $(U,\kappa_U) \in \mathcal{U}$ множество $\kappa_U\,(U\cap\partial\Omega)$ представимо в виде графика некоторой функции $h\in C^{0,\omega}(\tilde{U})$ и $\max_{\mathcal{U}}\|h\|_{C^{0,\omega}(U)} \le N$.

Будем писать $\partial\Omega \in C^{0,\omega}$, если существует такой атлас $\mathcal{U}$, что $\partial\Omega \in$ $\in C^{0,\omega}_{\mathcal{U}}$.

Пусть $F(L)$ — банахово пространство функций с носителями из (необязательно компактного) многообразия L, тогда $\tilde{F}(\Omega)$ состоит из всех функций $f \in F(L)$, таких, что $\operatorname{supp} f \subset \bar{\Omega}$. В свою очередь, замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ будем обозначать через $\mathring{F}(\Omega)$. Скажем, что функция $u \in W_p^k(\mathbb{R}^d)$, $k\in\mathbb{Z}_+$, принадлежит пространству Никольского $N_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)$, где s есть вектор размерности d, состоящий из модулей непрерывности, если конечна полунорма

$$\|u\|_{N_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)} = \max_{k=\overline{1,\dots d}}\sup_{h\neq 0}\frac{\|\Delta^2_{he_k}u\|_{W_2^m(\mathbb{R}^d)}}{s_k(|h|)},$$

$$\Delta_h^2 u = \Delta_h(\Delta_h u), \qquad \Delta_h u = u_h - u, \qquad u_h(x) = u(x+h).$$

Пространства Бесова отрицательной гладкости введем как

$$\left(B_{2,1}^{-k,\overline{s}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega) = \left[\left(\mathring{N}_{k-1,\frac{|\cdot|}{\overline{s}}}2\right)_{\mathcal{V}}(\Omega)\right]^\star, \qquad \frac{|\cdot|}{\overline{s}} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{|\cdot|}{s_1(\cdot)},\dots,\frac{|\cdot|}{s_d(\cdot)}\right);$$

если s_d — степенные функции и $\partial\Omega\in C^{0,1}$, то это определение эквивалентно классическому (см. [4]). Дополнительно введем вспомогательное пространство $K_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)$, которое получается из $N_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)$ заменой в определении нормы второй разности на первую, аналогично

$$\left(K_{2,1}^{-k,\overline{s}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega) = \left[\left(\mathring{\tilde{K}}_2^{k-1,\frac{|\cdot|}{\overline{s}}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega)\right]^\star.$$

Потребуем выполнения следующих условий:
A1. $A\in C_{\mathcal{V}}^{0,\overline{\varkappa}}(M)$, $\overline{\varkappa}=(\varkappa_1,\dots,\varkappa_d)$, $\varkappa_k$ — модули непрерывности.
A2. $a,b\in M\big(L_2(\Omega)\to\big(K_2^{-1,\overline{\gamma}}\big)_{\mathcal{V}}(\Omega)\big)$, $c\in M\big(\mathring{H}^1(\Omega)\to\big(K_2^{-m+m_2,\overline{\gamma}}\big)_{\mathcal{V}}(\Omega)\big)$.

Введем отношение порядка на модулях непрерывности. Будем писать $\omega_1\preceq\omega_2$, если существует такая константа C, что $\omega_2(x)\le C\omega_1(x)$ для любых $x\in[0,1]$, например $h^{\gamma_1}\preceq h^{\gamma_2}$, если $\gamma_1\le\gamma_2$.

Случай компактного риманова многообразия (M,g)**.** *Произвольные возмущения.*

Теорема 1. *Пусть*

$$\partial\Omega_1\in C^{0,\omega(\cdot)},\quad \omega\preceq(\cdot)$$

оператор $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* **A1**, **A2** *для*

$$\varkappa_1\equiv\dots\equiv\varkappa_d\equiv\varkappa_0\preceq(\cdot),\qquad \gamma_1\equiv\dots\equiv\gamma_d\equiv\varkappa_0\preceq(\cdot),$$

тогда для $\overline{s}=(s(\cdot),\dots s(\cdot))$, $s\preceq\sqrt{\varkappa_0}$

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1}-\mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M),\mathring{H}^1(M))}\le Cs[\omega(e(\partial\Omega_1,\Omega_1\Delta\Omega_2))],$$

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1}-\mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M),L_2(M))}\le Cs^2[\omega(e(\partial\Omega_1,\Omega_1\Delta\Omega_2))].$$

Регулярные внешние возмущения при произвольных внутренних. Как подчеркивалось в [2], для стабильности спектра внутренние и внешние возмущения области должны обладать некоторыми свойствами регулярности. Так, например, для стабильности при возмущении области по Хаусдорфу внутренние возмущения могут быть произвольные, а вот внешние накладывают ограничения на предельную область. Подобное условие содержится и в теореме ниже

Теорема 2. *Пусть*

$$\partial\Omega_1\in C_{\mathcal{U}}^{0,\omega(\cdot)},\quad \partial\left(\Omega_1\cup\Omega_2\right)\in C_{\mathcal{U}}^{0,\omega(\cdot)},\quad \omega\preceq(\cdot)$$

оператор $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* **A1**, **A2** *для*

$$\varkappa_1\equiv\dots\equiv\varkappa_{d-1}\equiv\gamma_1\equiv\dots\equiv\gamma_{d-1}\equiv1,\quad \gamma_d,\varkappa_d\preceq(\cdot),$$

тогда для $\overline{s}=(1,\dots1,s(\cdot))$, $s\preceq\sqrt{\varkappa_d}+\gamma_d^c$, $c\in(0,1)$, *выполнено*

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1}-\mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M),\mathring{H}^1(M))}\le Cs[\omega(e(\partial\Omega_1,\Omega_1\Delta\Omega_2))],$$

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1}-\mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M),L_2(M))}\le Cs^2[\omega(e(\partial\Omega_1,\Omega_1\Delta\Omega_2))].$$

Заметим, что в этом утверждении нам удалось усилить операторную норму оценки и в то же время ослабить условия на коэффициенты. Это возможно в силу теоремы из [4].

Случай областей в $\mathbb{R}^d$ с метрикой g. В случае областей в евклидовом пространстве можно ослабить условия на коэффициенты в утверждении 1

Теорема 3. *Пусть*

$$\partial\Omega_1 \in C^{0,\omega(\cdot)}, \quad \omega \preceq (\cdot)$$

оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям **A1**, **A2** *для*

$$\varkappa_1 \equiv \dots \equiv \varkappa_d \equiv \varkappa_0 \preceq (\cdot), \qquad \gamma_1 \equiv \dots \equiv \gamma_d \equiv \gamma_0 \preceq (\cdot),$$

тогда для $\overline{s} = (s(\cdot), \dots s(\cdot))$, $s \preceq \sqrt{\varkappa_0} + \gamma_0^c$, $c \in (0,1)$, выполнено

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), \mathring{H}^1(M))} \le Cs[\omega(e(\partial\Omega_1, \Omega_1\Delta\Omega_2))],$$
$$\|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), L_2(M))} \le Cs^2[\omega(e(\partial\Omega_1, \Omega_1\Delta\Omega_2))].$$

Список литературы

1. *Степин А.М., Цылин И.В.* О краевых задачах для эллиптических операторов в случае областей на многообразиях // ДАН. 2015. Т. 463, № 2. С. 144–148.
2. *Цылин И.В.* О непрерывности собственных значений оператора Лапласа в зависимости от области // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 2015. № 3. С. 35–39.
3. *Цылин И.В.* О регулярности решений вариационных и краевых задач в областях с гёльдеровой границей // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 794–800.
4. *Цылин И.В.* Регулярность решений первой краевой задачи в областях на многообразии // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 2016. № 5. С. 44–49.