О дискретных орбитах цилиндрического каскада с гёльдеровой функцией (On discrete orbits for a cylindrical cascade with a Hölder function)

А. В. Кочергин (A. V. Kochergin)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

a.kochergin@gmail.com

В 70-х годах под руководством Дмитрия Викторовича Аносова его ученики А.В. Крыгин и Е.А. Сидоров опубликовали ряд работ, в которых изучаются топологические и метрические свойства цилиндрических каскадов — косых произведений над эргодическим поворотом окружности T_ρ. Сам Дмитрий Викторович опубликовал замечательную статью [1], посвященную гомологическому (или когомологическому в современной терминологии) уравнению

$$f(x) = F(T_\rho x) - F(x), \tag{1}$$

где f — заданная функция на окружности, F — неизвестная функция. Д.В. Аносов исследовал разрешимость этого уравнения в различных классах функций и показал связь решения F или его отсутствия с топологическими и метрическими свойствами цилиндрического каскада и специального потока над поворотом окружности. В частности, он привел новый способ построения топологически транзитивного цилиндрического каскада, у которого всюду плотные орбиты образуют множество меры ноль.

Уточним обозначения. Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — окружность длины 1, $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ — цилиндр, $T_\rho\colon \mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $\quad T_\rho x = x+\rho \pmod 1$ — поворот окружности на иррациональный угол ρ; $f\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ — непрерывная на окружности функция, $\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx = 0$.

Мы рассматриваем косое произведение, построенное по повороту окружности T_ρ и функции f:

$$T_{\rho,f}\colon \mathbb{T}\times\mathbb{R}\to\mathbb{T}\times\mathbb{R}, \quad T_{\rho,f}(x,y) = (T_\rho x, y+f(x)).$$

Это косое произведение называется цилиндрическим отображением, построенным по повороту окружности T_ρ и функции f, или вслед за Д.В. Аносовым, цилиндрическим каскадом.

Цилиндрические каскады изучались А. Пуанкаре, Л.Г. Шнирельманом, А.С. Безиковичем и многими другими авторами.

В случае, если существует непрерывная F, удовлетворяющая уравнению (1), каждая орбита каскада $T_{\rho,f}$ ограничена, ее замыкание описывается с помощью графика функции F, и цилиндр расслаивается на такие инвариантные кривые. В этом случае f называется *когранцией*. Заметим, забегая вперед, что кограницы играют особую роль в конструкциях каскадов с дискретными орбитами.

Цилиндрический каскад топологически транзитивен тогда и только тогда, когда уравнение (1) не имеет непрерывного решения F.

В связи с изучением минимальных множеств цилиндрических каскадов А.С. Безикович [2] в 1951 году обнаружил, что существуют (топологически транзитивные) цилиндрические каскады, имеющие дискретные, убегающие в бесконечность, орбиты, а Е.А. Сидоров [3] в 1973 году построил каскад, у которого нет дискретных орбит. Дискретные орбиты образуют множество меры нуль, однако это множество может иметь положительную размерность Хаусдорфа. Также нетрудно видеть (хотя опубликовано это было только в двухтысячных годах, Сидоров этого не увидел), что для f с ограниченной вариацией каскад $T_{\rho,f}$ не может иметь дискретных орбит. Исходя из этого, К. Фрончек и М. Леманчик [4] поставили вопросы о том, при каких условиях непрерывности для функции f цилиндрический каскад может иметь дискретные орбиты, какую размерность Хаусдорфа может иметь множество, образованное дискретными орбитами, и связана ли эта размерность со степенью непрерывности f.

Мы называем множество точек на окружности $\mathbb{T} \times \{0\}$, имеющих дискретные орбиты, *множеством Безиковича.*

Теорема 1. *Для любого $\gamma \in (0, 1)$ существует функция f, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем γ, и поворот окружности T_ρ на иррациональный угол, для которых цилиндрический каскад $T_{\rho,f}$ имеет дискретные орбиты, а размерность Хаусдорфа множества Безиковича не меньше,чем $1 - \gamma$.*

Теорема 2. *Существует функция f, удовлетворяющая условию Гёльдера с любым показателем $\gamma \in (0, 1)$, и поворот окружности T_ρ такие, что цилиндрический каскад $T_{\rho,f}$ имеет дискретные орбиты.*

Во втором случае нижняя оценка размерности Хаусдорфа множества Безиковича, полученная тем же методом, что и в первой теореме, оказывается равной нулю. Есть основания полагать, что полученная оценка как в случае первой теоремы, так и второй, не улучшаема.

Гипотеза. *Если функция f, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma \in (0,1)$, то множество Безиковича цилиндрического каскада $T_{\rho,f}$ имеет размерность Хаусдорфа не выше, чем $1-\gamma$.*

Доказательство приведенных теорем основано на конструкции из работы [5] автора. За счет ее модификации удалось получить в теореме 1 множество Безиковича с лучшей нижней оценкой, а в теореме 2 увеличить степень непрерывности функции.

Список литературы

1. *Аносов Д.В.* Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, №6, С. 1259–1274.
2. *Besicovitch A.S.* A problem on topological transformations of the plane // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1951. V. 47. P. 38–45.
3. *Сидоров Е.А.* Об одном классе минимальных множеств // УМН. 1973. Т. 28, №4. С. 225–226.
4. *Frączek K., Lemańczyk M.* On Hausdorff dimension of the set of closed orbits for a cylindrical transformation // Nonlinearity. 2010. V. 23. P. 2393–2422.
5. *Кочергин А.В.* Цилиндрический каскад Безиковича с гёльдеровой функцией // Мат. заметки. 2016. Т. 99, №3. С. 366–375.