Группы диффеоморфизмов прямой и окружности. Структурные теоремы, критерии почти нильпотентности (Groups of diffeomorphisms of the line and circle. Structural theorems and almost nilpotency criteria)*

Л. А. Бекларян (L. A. Beklaryan)

Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия

beklar@cemi.rssi.ru, beklaryan@mailfrom.ru

Для абстрактных конечно порожденных групп $G = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ какой-либо шкалы соответствий между классами таких групп и их ростом не существует. Тем не менее для отдельных классов конечно порожденных групп имеет место взаимно однозначное соответствие с ростом группы.

Теорема 1 (Gromov, 1981) [1]**.** *Конечно порожденная группа имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда она почти нильпотентна.*

Учитывая значимость свойства почти нильпотентности группы в связи с его однозначным соответствием со свойством полиномиальности роста группы (теорема 1), представляются важными как критерии, так и признаки почти нильпотентности группы. Ранее такой результат был получен для разрешимых групп.

Теорема 2 (строгая альтернатива, Rosenblatt, 1974) [2]**.** *Конечно порожденная разрешимая группа либо содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо является почти нильпотентной* (*соответственно имеет полиномиальный рост*).

Интересен вопрос о возможности реализации абстрактных групп в виде подгрупп групп диффеоморфизмов интервала (прямой, окружности) различной гладкости [3–5] и, соответственно, критерии почти нильпотентности таких групп.

Теорема 3 (строгая альтернатива, Navas, 2007) [6]**.** *Для любого заданного $\alpha > 0$ каждая конечно порожденная подгруппа группы*

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 16-01-00110).

$Diff_+^{1+\alpha}([0,1])$ *либо содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо является почти нильпотентной.*

Для групп гомеоморфизмов прямой и окружности имеется серия метрических инвариантов [7, 8]. Критерии существования метрических инвариантов удается сформулировать в терминах различных характеристик группы. На основе полученных критериев предложена схема классификации таких групп [8]. На этом пути, в частности, получены критерии почти нильпотентности, а также структурные теоремы.

Теорема 4 (строгая альтернатива, Beklaryan, 2015) [9]**.** *Пусть группа $G = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff_+^1(\mathbb{S}^1)$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда либо группа G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо группа G является почти нильпотентной.*

Теорема 5 (структурная теорема, Beklaryan, 2015) [9]**.** *Пусть группа $G = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff^1(\mathbb{S}^1)$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда для группы G справедливо одно из перечисленных взаимоисключающих утверждений.*

1) *Для группы G не существует инвариантной меры, и группа G содержит свободную подгруппу с двумя образующими. Минимальное множество группы G не дискретное, и $H_G = \langle e \rangle$.*
2) *Для группы G существует инвариантная мера, и G — коммутативная бесконечная группа. Группа G топологически полусопряжена бесконечной группе вращений. Минимальное множество группы G не дискретное, и $H_G = \langle e \rangle$.*
3) *Для группы G существует инвариантная мера, и группа G почти нильпотентная. Фактор-группа G/H_G — циклическая группа конечного порядка, а подгруппа H_G коммутативная. Группа G полусопряжена циклической группе вращений конечного порядка, а минимальные множества группы G дискретные.*

Теорема 6 (строгая альтернатива, Beklaryan, 2015) [9]**.** *Пусть группа $G = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff_+^1(\mathbb{R})$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда либо группа G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо группа G является почти нильпотентной.*

Теорема 7 (структурная теорема, Beklaryan, 2015) [9]**.** *Пусть группа $G = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ является группой диффеоморфизмов с элементами* *из* $Diff^1_+(\mathbb{R})$, *которые являются взаимно трансверсальными. Тогда для группы* G *справедливо одно из перечисленных взаимоисключающих утверждений.*

1) *Для группы* G *не существует инвариантной меры, и группа* G *содержит свободную подполугруппу с двумя образующими. Минимальное множество группы* G *не дискретное, и* $H_G = \langle e \rangle$.

2) *Для группы* G *существует инвариантная мера, и группа* G *— коммутативная нециклическая группа. Группа* G *топологически полусопряжена группе сдвигов на прямой. Минимальное множество группы* G *не дискретное, и* $H_G = \langle e \rangle$.

3) *Для группы* G *существует инвариантная мера, и группа* G *почти нильпотентная. Фактор-группа* G/H_G *— циклическая группа, а подгруппа* H_G *коммутативная. Группа* G *полусопряжена циклической группе сдвигов на прямой, а минимальные множества группы* G *дискретные.*

4) *Для группы* G *существует инвариантная мера, и группа* G *содержит свободную подполугруппу с двумя образующими. Фактор-группа* G/H_G *— циклическая группа, подгруппа* $H_G \neq \langle e \rangle$ *коммутативная и, соответственно, группа* G *разрешимая. Группа* G *полусопряжена циклической группе сдвигов на прямой, а минимальные множества группы* G *дискретные.*

Список литературы

1. *Gromov M.* Group of polinomial growth and expending maps // Publ. Math. IHES. 1981. V. 53. P. 53–73.
2. *Rosenblatt J.* Invariant measures and growth conditions // Trans. AMS. 1974. V. 197. P. 33–53.
3. *Farb B., Franks J.* Groups of homeomorphisms of one-manifolds. III: Nilpotent supgroups // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2003. V. 23. P. 1467–1484.
4. *Deroin B., Kleptsyn V., Navas A.* Sur la dynamique unidimensionnelle en regularite intermediaire // Acta Math. 2007. V. 199. P. 199–262.
5. *Plante J., Thurston W.* Polinomial growth in holonomy groups of foliations // Comment. Math. Helv. 1976. V. 51. P. 567–584.
6. *Navas A.* Groups of circle diffeomorphisms: E-print. arXiv: math/0607481v3 [math.DS].
7. *Бекларян Л.А.* Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты // УМН. 2004. Т. 59, №4. С. 3–68.

8. *Бекларян Л.А.* Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Метрические инварианты и вопросы классификации // УМН. 2015. Т. 70, № 2. С. 148–184.
9. *Бекларян Л.А.* Критерии почти нильпотентности для групп гомеоморфизмов прямой и окружности. Структурные теоремы // Мат. сб. 2016 (в печати).