РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ

В. И. Буслаев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Москва

2008

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

$R_0(f) = \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n|^{1/n}\right)^{-1}$ – формула Коши–Адамара

Теорема (Фабри, 1896). *Пусть коэффициенты степенного ряда* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ *таковы, что существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n/f_{n+1} = \lambda \neq 0$*. Тогда ряд сходится равномерно внутри круга* $|z| < |\lambda|$*, и* λ *– особая точка определяемой этим рядом функции* $f(z)$*.*

Фабер – доказательство Фабри из-за содержащихся в нем запутанных выкладок представляет некоторые трудности для понимания.
Ло – ловкие выкладки, к несчастью, довольные сложные.
Принсгейм – к сожалению, ценное содержание этой работы Фабри вследствие крайне малоудобоваримых рассуждений, вероятно, никогда не будет освоено полностью.
Бибербах – это, конечно, немалый труд – проникнуть в работы Фабри настолько, чтобы получать от них удовольствие и полностью понимать всю гениальную простоту хода мысли этого мастера своего дела. Мы изложили доказательство Фабри, полностью сохранив его идею, но сделав его удобоваримым для читателя.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Аппроксимацией Паде типа (n, m) степенного ряда f называется рациональная функция $P_{n,m}/Q_{n,m}$ такая, что

$$\deg P_{n,m} \leqslant n, \qquad \deg Q_{n,m} \leqslant m, \qquad Q_{n,m} \not\equiv 0 \quad \text{и}$$

$$Q_{n,m}(z) f(z) - P_{n,m}(z) = A z^{n+m+1} + \dots$$

$$Q_{n,m}(z) = \begin{vmatrix} f_{n+1} & \dots & f_{n+1-m} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n+m} & \dots & f_n \\ 1 & \dots & z^m \end{vmatrix}$$

$Q_{n,1}(z) = f_{n+1} z - f_n$

Гипотеза Гончара. *Пусть полюсы m-й строки таблицы аппроксимаций Паде степенного ряда f стремятся при $n \to \infty$ к отличным от нуля пределам $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.*

Тогда ряд определяет функцию f, голоморфную в круге $|z| < \min_{1 \leqslant j \leqslant m} |\lambda_j|$ и допускающую мероморфное продолжение в круг $|z| < \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\lambda_j|$.

При этом все точки $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ являются особыми точками функции f, и их можно перенумеровать таким образом, что $R_{j-1}(f) = |\lambda_j|$, $j = 1, \dots, m$, где $R_j(f)$ – радиус j-го круга мероморфности функции f.

При $m = 1$ гипотеза Гончара совпадает с теоремой Фабри "об отношении".

При $m > 1$ гипотеза Гончара доказана С.Суетиным.

Пусть E – континуум со связным дополнением,
ψ – функция, голоморфно и однолистно отображающая внешность E на внешность единичного круга, $\psi(\infty) = \infty$,
$\{z_{j,n}\}$ – таблица узлов интерполяции,
$\omega_n(z) = (z - z_{1,n}) \dots (z - z_{n,n})$.

Теорема (Kalmar, Walsh) *Для того чтобы для любой функции f, голоморфной в некоторой окрестности континуума E, последовательность ее интерполяционных многочленов сходилась к f равномерно на E, необходимо и достаточно, чтобы узлы $\{z_{j,n}\}$ $(n = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, n)$ интерполяции удовлетворяли условию*
$\lim\limits_{n\to\infty} |\omega_n(z)|^{1/n} = c|\psi(z)|,\ z \in \mathbb{C} \setminus E$
где c – некоторая положительная постоянная (емкость континуума E).

Более сильное условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_n(z)}{c^n\psi^n(z)} \rightrightarrows \omega(z) \neq 0\,,\ z \in \mathbb{C} \setminus E$$

Примеры.

1. $E = \{|z| \leqslant r\}$, $\omega_n(z) = z^n$ – классический случай

2. $E = \{|z| \leqslant 1\}$, $\omega_n(z) = z^n - 1$.

3. $E = [-1, 1]$, $\omega_n(z)$ – классические ортогональные многочлены; ортогональные многочлены, построенные по мере σ, удовлетворяющей условию Сеге

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln \sigma'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx > -\infty$$

$D_\rho = E \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus E : |\psi(z)| < \rho\}$ – каноническая область, определяемая параметром $\rho > 1$.

f – функция, голоморфная в некоторой окрестности континуума E

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{\omega_{n+1}(z)} dz$$

Γ – контур, охватывающий E и лежащий в области голоморфности функции f

$\rho_0(f)$ – максимальное из чисел $\rho > 1$ таких, что функция f допускает голоморфное продолжение в каноническую область D_ρ.

$\rho_m(f)$ – максимальное из чисел $\rho > 1$ таких, что функция f допускает мероморфное продолжение в каноническую область D_ρ и имеет в этой области не более m полюсов.

Замечание Гончара. *Для таблиц интерполяции, удовлетворяющих сильному условию, имеет место аналог формулы Коши–Адамара*

$$\rho_0(f) = \left(c\overline{\lim}_{n\to\infty}|A_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

Теорема. *Пусть таблица узлов интерполяции удовлетворяет сильному условию, и пусть в вышеприведенных обозначениях существует предел* $\lim_{n\to\infty} A_n/A_{n+1} = \lambda$. *Тогда*

1°. $|\lambda| > c$, *и функция* f *голоморфно продолжается в область* $D_{|\lambda|/c}$.

2°. $\psi^{-1}(\lambda/c)$ *– особая точка функции* f.

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)}{\omega_{n+1}(t)}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\big(\varphi(z)\big)}{\omega_{n+1}\big(\varphi(z)\big)}\varphi'(z)dz$$
$$= \frac{[f^*(z)g_{n+1}(z)]_n}{c^{n+1}},$$

где $\varphi(z) = \psi^{-1}(z),\ f^*(z) = f\big(\varphi(z)\big),$
$g_n(z) = \frac{c^n z^n}{\omega_n\left(\varphi(z)\right)}\varphi'(z) \rightrightarrows g(z) \neq 0,\ |z| > 1.$

Следовательно,

$$[f^*(z)\alpha_n(z)]_n = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

где

$$\alpha_n(z) = g_{n+1}(z) - \frac{A_n}{cA_{n+1}}g_{n+2}(z)z^{-1},$$
$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(z) = g(z)\big(1 - \frac{\lambda}{cz}\big).$$

Теорема (Пуанкаре). *Пусть последовательность* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет рекуррентным соотношениям*

$$[f(z)P_n(z)]_n = 0, \quad n = k, k+1, \dots$$

где $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, *многочлены* $P_n(z) = 1 + \alpha_{n,1}z + \dots + \alpha_{n,k}z^k$ *имеют предел* $P(z) = 1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_k z^k$ *и корни многочлена* $P(z)$ *различны по модулю.*

Тогда либо $f_n = 0$ *при всех* $n \geqslant n_0$, *либо существует предел* $\lim_{n\to\infty} f_n/f_{n+1}$, *и этот предел равен одному из корней многочлена* $P(z)$.

$$[f(z)P_n(z)]_n = f_n + \alpha_{n,1}f_{n-1} + \dots + \alpha_{n,k}f_{n-k}$$

Теорема. *Пусть функция* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n$ *голоморфна в кольце* $1 < |z| < R = \left(\overline{\lim}_{n\to\infty}|f_n|^{1/n}\right)^{-1}$, *а функции* α_n, $n = 1, 2, \ldots$ *голоморфны и имеют равномерный предел* α *при* $n \to \infty$ *в кольце* $R-\delta < |z| < R+\delta$, *где* $\delta > 0$, *и пусть*

$$[f\alpha_n]_n = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда функция α *имеет по крайней мере один нуль, лежащий на окружности* $|z| = R$, *и если* $p(z) = \prod_{j=1}^{N}(1 - z/\lambda_j)$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *– все нули функции* α, *лежащие на окружности* $|z| = R$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[fp]_n}{\max\{|f_{n-1}|, \ldots, |f_{n-N}|\}} = 0.$$

В частности, если на окружности $|z| = R$ *лежит ровно один нуль* λ *функции* α, *то* $\lim_{n\to\infty} f_{n-1}/f_n = \lambda$.

Теорема. *Пусть коэффициенты ряда* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n P_n(z)$ *по ортонормированным на отрезке* $[-1, 1]$ *многочленам, построенным по мере, удовлетворяющей условию Сеге, таковы, что существует предел* $\lim_{n\to\infty} F_n/F_{n+1} = \lambda$, $|\lambda| > 1$.
Тогда ряд сходится равномерно внутри эллипса с фокусами в точках ± 1, *проходящего через точку* $\frac{\lambda+\lambda^{-1}}{2}$, *и* $\frac{\lambda+\lambda^{-1}}{2}$ *– особая точка функции* $F(z)$.

Многоточечной аппроксимацией Паде *типа* (n, m) *функции* F*, построенной по таблице* $\{z_{j,n}\} \subset E$ *(*$j = 1, \dots, n$*;* $n = 1, 2, \dots$*) узлов интерполяции, называется рациональная функция* $P_{n,m}/Q_{n,m}$ *такая, что*

$$\deg P_{n,m} \leqslant n, \qquad \deg Q_{n,m} \leqslant m, \qquad Q_{n,m} \not\equiv 0$$

и функция $Q_{n,m}F - P_{n,m}$ *обращается в ноль в узлах* $z_{1,n+m+1}, \dots, z_{n+m+1,n+m+1}$ *таблицы интерполяции.*

Далее предполагается, что узлы интерполяции удовлетворяют сильному условию. Все аппроксимации Паде можно расположить в таблицу. Наиболее интересные объекты этой таблицы – строка (m *фиксировано,* $n \to \infty$*) и диагональ.*

Гипотеза Гончара. *Пусть полюсы m-й строки таблицы многоточечных аппроксимаций Паде функции f стремятся при $n \to \infty$ к пределам $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Тогда все эти пределы лежат в $\mathbb{C} \setminus E$ и их можно перенумеровать таким образом, что $\rho_{j-1}(f) = |\psi(\tau_j)|$, $j = 1, \ldots, m$. При этом $\tau_1, \ldots, \tau_m$ являются особыми точками функции f.*

При дополнительном условии, что полюсы многоточечных аппроксимаций Паде стремятся к пределам со скоростью геометрической прогрессии гипотеза доказана А.Гончаром.
Без дополнительного условия на скорость сходимости аппроксимаций гипотеза доказана автором.

Усиленный вариант гипотезы Гончара. *Пусть f – функция, голоморфная в окрестности ограниченного континуума E со связным дополнением, и пусть один из полюсов m-й строки таблицы многоточечных аппроксимаций Паде функции f стремится к пределу τ. Тогда:*

1°. $\tau \in \mathbb{C} \setminus E$.

2°. $\rho_0(f) \leqslant |\psi(\tau)| \leqslant \rho_{m-1}(F)$.

3°. *τ является особой точкой f.*

Усиленный вариант гипотезы Гончара при $m > 1$ не доказан и не опровергнут даже в классическом случае.

Паде-гипотеза (Бейкер–Гаммель–Уиллс, 1961). *Пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности точки $z = 0$ и мероморфна в круге $D = \{|z| < 1\}$. Тогда найдется бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f)$ натуральных чисел такая, что диагональные аппроксимации Паде (классические) функции f сходятся к f при $n \to \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов f.*

Теорема (Любински, 2001). *Функция* $H_q(z)$, *определяемая непрерывной дробью Роджерса–Рамануджана* $1+\cfrac{qz}{1+\cfrac{q^2z}{1+\dots}}$ *опровергает Паде-гипотезу при* $q=\exp\left(\dfrac{4\pi i}{99+\sqrt{5}}\right)$.

Теорема (2001) . *Гиперэллиптическая функция*

$$f(z)=\frac{-27+6z^2+3(9+\zeta)z^3+\sqrt{81(3-(3+\zeta)z^3)^2+4z^6}}{2z(9+9z+(9+\zeta)z^2)},$$

где $\zeta=\sqrt[3]{1}=(-1+\sqrt{3}i)/2$ *и выбрана та ветвь функции* f, *для которой* $f(0)=0$, *опровергает голоморфный вариант Паде-гипотезы.*

$$f(z) = \frac{z|}{|3 - 3\zeta^2 z} + \frac{\zeta z^2|}{|3 - 3\zeta^4 z} + \frac{\zeta^2 z^2|}{|3 - 3\zeta^6 z} + \frac{\zeta^3 z^2|}{|3 - 3\zeta^8 z} + \cdots$$

Функция Роджерса–Рамануджана

$$G_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2} z^n}{(q)_n}$$

где $(q)_0 = 1$, $(q)_n = (1-q)\dots(1-q^n)$ *(*$n \in \mathbb{N}$*)*

Функциональное равенство

$$G_q(z) = G_q(qz) + qzG_q(q^2 z)$$

$$H_q(z) = \frac{G_q(z)}{G_q(qz)}$$

Функциональное равенство

$$H_q(z) = 1 + \frac{qz}{H_q(qz)}$$

$$H_q(z) = 1 + \frac{qz}{H_q(qz)} = 1 + \frac{qz}{1 + \frac{q^2 z}{H_q(q^2 z)}} = \dots$$

Критерий Ворпицкого *Непрерывная дробь* $\dfrac{a_1}{1+\dfrac{a_2}{1+\ldots}}$ *сходится, если* $|a_n| \leqslant 1/4$ *при всех* $n = 1, 2, \ldots$.

Следствие. *При* $|q| < 1$ *непрерывная дробь Роджерса–Рамануджана сходится к функции* H_q *во всей комплексной плоскости. При* $|q| = 1$ *дробь сходится к функции* H_q *в круге* $|z| \leqslant 1/4$.

Случай $|q| = 1$.

$R_q = \varliminf_{n\to\infty} |(q)_n|^{1/n}$ – *радиус голоморфности функции* G_q.

ρ_q – *радиус мероморфности функции* H_q.

$|z| = R_q$ – *естественная граница голоморфности функции* G_q.

$|z| = \rho_q$ – *естественная граница мероморфности функции* H_q.

$R_q \leqslant \rho_q \leqslant 1$, $1/4 \leqslant \rho_q \leqslant 1$

Харди и Литтлвуд: $R_q = \underline{\lim}_{n\to\infty}|1-q^n|^{1/n}$.

Д.Любински: *R_q может принимать любое наперед заданное значение $\gamma \in [0,1]$.*

Д.Любински: $\rho_q \geqslant \frac{1}{2+|1+q|}$

Теорема. *$\rho_q = 1$ при всех $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ – иррационально, и равен $4^{-1/m}$ при $q = \exp(2\pi ik/m)$, где целые числа k и m взаимно просты.*

Теорема (Любински)

$$\lim_{n\in\Lambda^\beta} P_n(z;q) = G_q(z)\overline{G_q(\overline{\beta qz})}$$

$$\lim_{n\in\Lambda^\beta} Q_n(z;q) = G_q(qz)\overline{G_q(\overline{\beta qz})},$$

где Λ^β *– любая подпоследовательность, для которой* $\lim_{n\in\Lambda^\beta} q^n = \beta$,
$P_n(z;q)$ *и* $Q_n(z;q)$ *– числитель и знаменатель дроби Роджерса–Рамануджана.*

Следствие. *При всех* $q = \exp(2\pi i\tau)$, τ *- иррационально, непрерывная дробь Роджерса–Рамануджана сходится к функции* H_q *равномерно на компактах, лежащих в области* $\{|z| < R_q\} \setminus \Omega_q$, *где* Ω_q *– объединение окружностей с центром в точке* $z = 0$, *проходящих через полюсы функции* H_q.

Теорема. *При всех* $q = \exp(2\pi i\tau)$, τ *- иррационально, непрерывная дробь Роджерса–Рамануджана сходится к функции* H_q *равномерно на компактах, лежащих в области* $\{|z| < 1\} \setminus \Omega_q$, *где* Ω_q *– объединение окружностей с центром в точке* $z = 0$, *проходящих через полюсы функции* H_q.