

ПОВЕДЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
В ОБЛАСТЯХ С ТРЕЩИНАМИ
(RESOLVENT BEHAVIOR OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS
ON DOMAINS WITH CRACKS)

И. В. Цылин (I. V. Tsylin)

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
`ioxlxoi@yandex.ru`

Пусть M — гладкое связное многообразие с римановой метрикой g , $\mathcal{A}$ — эллиптический оператор

$$\nabla^* (A\nabla u + au) + b\nabla u + cu, \quad (1)$$

Введем оператор, решающий первую краевую задачу для оператора $\mathcal{A}$ в области Ω

$$\mathcal{G}_\Omega: H^{-1}(M) \rightarrow \mathring{H}^1(M).$$

Определение 1. Для пары фиксированных атласов $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ многообразия M положим, что $(\kappa_U, U) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (\kappa_U, V) \in \mathcal{U}$, $V \Subset U$, введем расстояние $d_{\mathcal{U}}$ между произвольными множествами X и Y следующим образом

$$d_{\mathcal{U}}(X, Y) = \sup_{\mathcal{U}} \inf_{\exists \delta \Rightarrow \infty} \{ \delta \mid \kappa_U(X \cap U) + \delta e_d \supset \kappa_U(Y \cap V), \\ \kappa_U(X \cap V) - \delta e_d \subset \kappa_U(Y \cap U) \}.$$

Определение 2. Для данного атласа $\mathcal{U}$ многообразия (M, g) скажем, что область $\Omega \subset M$ имеет границу класса $L_{\mathcal{U}}^\infty$, если для любого элемента $(U, \kappa_U) \in \mathcal{U}$ множество $\kappa_U(U \cap \partial\Omega)$ представимо в виде графика некоторой (многозначной) функции $h \in L_\infty(\tilde{U}, \mathbb{R})$. Причем прообраз $h^{-1}(x)$ любой точки $x \in \tilde{U}$ является линейно-связным множеством (то есть отрезком).

Таким образом, если $\partial\Omega \in L_{\mathcal{U}}^\infty$, то область Ω может иметь трещины. Необходимо, чтобы все поверхности трещин можно было выпрямить (то есть подобрать диффеоморфизм) таким образом, чтобы в каждой пересекаемой карте они (поверхности) стали параллельны некоторому направлению. Тогда для достаточно регулярных коэффициентов имеет место следующая

Теорема 1. Пусть

$$\partial\Omega_1 \in \partial\Omega \in L_{\mathcal{U}}^\infty, \quad \partial(\Omega_1 \cup \Omega_2) \in L_{\mathcal{U}}^\infty$$

тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), \dot{H}^1(M))} &\leq Cs(d_{\mathcal{U}}(\Omega_1, \Omega_2)), \\ \|\mathcal{G}_{\Omega_1} - \mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(B_2^{-1,\overline{s}}(M), L_2(M))} &\leq Cs^2(d_{\mathcal{U}}(\Omega_1, \Omega_2)). \end{aligned}$$

При этом приведенная оценка является точной.

Список литературы

1. *Степин А.М., Цылин И.В.* О краевых задачах для эллиптических операторов в случае областей на многообразиях // Доклады Академии Наук. 2015. Т. 463, № 2. С. 144–148.
2. *Цылин И.В.* О непрерывности собственных значений оператора Лапласа в зависимости от области // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 2015. № 3. С. 35–39.
3. *Цылин И.В.* О регулярности решений вариационных и краевых задач в областях с гёльдеровской границей // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 794–800.
4. *Цылин И.В.* Регулярность решений первой краевой задачи в областях на многообразии // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 2016. № 5. С. 44–49.
5. *Цылин И.В.* Регулярность типа Никольского решений нелинейных задач. Случай областей с гёльдеровской границей // Проблемы мат. анализа. 2016. Т. 86. С. 119–139