Пространства нестягиваемых замкнутых кривых в компактных пространственных формах (The spaces of non-contractible closed curves in compact space forms)

И. А. Тайманов (I. A. Taimanov)

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

taimanov@math.nsc.ru

Изучение проблемы о существовании замкнутых геодезических необратимых финслеровых метрик было инициировано Д.В. Аносовым в [1]. Мы, следуя [2], изложим некоторые результаты о вычислении когомологий пространств нестягиваемых замкнутых кривых в компактных пространственных формах и продемонстрируем, как они могут применяться для доказательства существования замкнутых геодезических финслеровых метрик.

Пусть

$$M = S^n/\Gamma, \quad n \geq 2,$$

где Γ свободно действует изометриями на n-мерной сфере, $\Lambda(M^n) = H^1(S^1, M)$ — пространство всех H^1-отображений

$$\gamma\colon [0,1] \to M, \quad f(0) = f(1),$$

окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в M, $\Omega_x(M)$ — подпространство в $\Lambda(M)$, образованное петлями, начинающимися и заканчивающимися в $\gamma(0) = \gamma(1) = x \in M$, и $\Pi^+(M)$ и $\Pi(M)$ — фактор-пространства пространства $\Lambda(M)$ относительно действия $SO(2)(= S^1)$:

$$\varphi \cdot \gamma(t) = \gamma(t + \varphi), \quad \varphi \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

и действия $O(2)$, соответственно. Здесь действие $O(2)$ является расширением действия $SO(2)$ с помощью инволюции

$$\sigma \cdot f(t) = f(-t).$$

Пусть $h \in \pi_1(M, x_0)$, h реализуется отображением $\omega\colon [0,1] \to M$, где $\omega(0) = x_0$, и $[h]$ — соответствующий свободный гомотопический класс замкнутых кривых: $[h] \in [S^1, M]$. Мы обозначим через

$$\Lambda M[h] \subset \Lambda M \quad \text{и} \quad LM[h] \subset LM$$

связные компоненты пространств ΛM и LM, образованные кривыми из класса $[h]$, а через $h_i, i = 1, 2, \dots,$ — автоморфизм

$$h_i \colon \pi_i(M, x_0) \to \pi_i(M, x_0),$$

отвечающий стандартному действию $h \in \pi_1$ на π_i.

Теорема 1. *Пусть $h \neq 1 \in \pi_1(M)$. Тогда*

1) *при $i \geq 2$*

$$\pi_i^{\mathbb{Q}}(\Lambda M[h])) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{при } i = 4k-2, 4k-1, \\ 0 & \text{в противных случаях} \end{cases}$$

для $M = S^{2k}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{2k}$ и

$$\pi_i^{\mathbb{Q}}(\Lambda M[h])) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{при } i = 2k, 2k+1, \\ 0 & \text{в противных случаях} \end{cases}$$

для $M = S^{2k+1}/\Gamma$;

2)

$$\pi_1(\Lambda M[h]) = C(h) = \mathbb{Z}_{r(h)} \quad \text{for } n \geq 3,$$

где $C(h) = \mathbb{Z}_{r(h)} \subset \Gamma$ — централизатор h в Γ, и

$$\pi_1(\Lambda \mathbb{R}P^2[h]) = \mathbb{Z}_4.$$

Здесь

$$\pi_i^{\mathbb{Q}}(X) = \pi_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad i \geq 2.$$

Фактор-пространство произведения $LM[h] \times ESO(2)$ по диагональному действию $SO(2)$ обозначим через $LM[h]_{SO(2)}$, когомологии этого пространства называются $SO(2)$–эквивариантными когомологиями пространства $LM[h]$.

Теорема 2. *Пусть $h \neq 1 \in \pi_1(M)$. Тогда*

1) *при $i \geq 2$*

$$\pi_i^{\mathbb{Q}}(LM[h]_{SO(2)}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{при } i = 2, 4k-2, 4k-1, \\ 0 & \text{в противных случаях,} \end{cases}$$

если $M = S^{2k}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{2k}$, и

$$\pi_i^{\mathbb{Q}}(LM[h]_{SO(2)}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{при } i = 2, 2k, 2k+1, \\ 0 & \text{в противных случаях,} \end{cases}$$

если $M = S^{2k+1}/\Gamma$;

2) *для нечетных* $n \geq 3$ *пространства* $LM[h]_{SO(2)}$ *гомотопически просты и*

$$\pi_1(LM[h]_{SO(2)}) = C(h)/\mathbb{Z}[h] \quad \text{для нечетных } n \geq 3,$$

где $C(h) \subset \Gamma$ *— централизатор* h *в* Γ *и* $\mathbb{Z}[h]$ *— подгруппа в* $C(h)$, *порожденная элементом* h;

3) *при* $n \geq 1$

$$\pi_1(L\mathbb{R}P^{2n}[h]_{SO(2)}) = 0.$$

Имеет место

Следствие 1. *Для каждой необратимой финслеровой метрики на* $\mathbb{R}P^2$ *все замкнутые геодезические которой невырожденны по Морсу, существует по меньшей мере две различные нестягиваемые замкнутые геодезические.*

Вывод аналогичного результата для $n \geq 3$ сводится к решению некоторых задач теории чисел. С использованием указанных выше теорем из [2] это было недавно сделано в [3]. Заметим, что при $n = 3$ аналогичный результат был получен ранее в [4].

Список литературы

1. *Аносов Д.В.* Геодезические в финслеровой геометрии // Proc. Int. Congr. Math. (Vancouver, B.C., 1974). Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975. V. 2. P. 293–297.
2. *Тайманов И.А.* Пространства нестягиваемых замкнутых кривых в компактных пространственных формах. // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 10. С. 105–118. (см. также arxiv: 1604.05237).
3. *Liu H., Xiao Y.* Resonance identity and multiplicity of non-contractible closed geodesics on Finsler $\mathbb{R}P^n$: E-print. arXiv: 1607.02746.
4. *Duan H., Long Y., Xiao Y.* Two closed geodesics on $\mathbb{R}P^{2n+1}$ with a bumpy Finsler metric // Calc. Var. Partial Diff. Equat. 2015. V. 54. P. 2883–2894.