Композиции случайных полугрупп и закон больших чисел (Composition of random semigroups and the law of large numbers)*

В. Ж. Сакбаев (V. Zh. Sakbaev)

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

fumi2003@mail

Для последовательностей $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k$, $n \in \mathbf{N}$, сумм независимых числовых случайных величин η_n, $n \in \mathbf{N}$, закон больших чисел утверждает, что $P(\{|S_n - M\eta| > \epsilon\}) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого числа $\epsilon > 0$, где $M\eta$ – математическое ожидание случайной величины η_k и $P(\{|S_n - M\eta| > \epsilon\})$ – вероятность отклонения случайной величины S_n от ее математического ожидания более чем на ϵ. Для последовательности $\{\mathbf{U}_n\}$ независимых случайных величин со значениями в множестве однопараметрических полугрупп линейных операторов в гильбертовом пространстве H ставится вопрос об асимптотическом поведении последовательности $\mathbf{U}(n) = \mathbf{U}_n^{1/n} \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1^{1/n}$, $n \in \mathbf{N}$, композиций независимых случайных полугрупп $\mathbf{U}_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Определение 1. Пусть $\{\mathbf{A}_n\}$ – последовательность независимых случайных операторов, имеющих одинаковое математическое ожидание $\bar{\mathbf{A}}$. Тогда если

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\|(\mathbf{A}_n)^{1/n} \circ \ldots \circ (\mathbf{A}_1)^{1/n} - \bar{\mathbf{A}}\|_{B(H)} > \epsilon\}) = 0 \tag{1}$$

при любых любых $\epsilon > 0$, либо

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\|((\mathbf{A}_n)^{1/n} \circ \ldots \circ (\mathbf{A}_1)^{1/n} - \bar{\mathbf{A}})x\|_H > \epsilon\}) = 0 \tag{2}$$

при любых $x \in H$, $x \neq 0$, и любых $\epsilon > 0$, то для последовательности независимых случайных операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ закон больших чисел выполнен но норме (1), либо в сильной операторной топологии (2).

Понятие случайной полугруппы состоит в следующем. Пусть $Y_s(X)$ — топологическое векторное пространство сильно непрерывных отобра-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00516), Российского научного фонда (проект № 14-11-00687).

жений $\mathbf{F}$ полуоси $R_+ = [0, +\infty)$ в банахово пространство $B(X)$ линейных преобразований банахова пространства X, топология τ_s на котором определяется семейством функционалов $\phi_{T,u}$, $T \geq 0$, $u \in X$, действующих по правилу $\phi_{T,u}(\mathbf{F}) = \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{F}(t)u\|_X$.

Определение 2. Случайной полугруппой мы называем случайную величину G, принимающую значения в множестве $\mathcal{S}(X)$ сильно непрерывных однопараметрических полугрупп операторов, действующих в банаховом пространстве X (алгебра $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ подмножеств $\mathcal{S}(X)$, превращающая его в измеримое пространство, представляет собой минимальную алгебру подмножеств множества $\mathcal{S}(X)$, содержащую все множества из топологии $\tau_\mathcal{S}$, индуцированной на $\mathcal{S}(X)$ из топологического пространства $Y_s(X)$).

Математическим ожиданием случайной полугруппы G как отображения пространства с мерой $(\Omega, 2^\Omega, \mu)$ в топологическое пространство $Y_s(X)$ будем называть интеграл Петтиса

$$M[G](t) = \int_\Omega G_\epsilon(t) d\mu(\epsilon), \quad t \geq 0.$$

Теорема 1. *Пусть μ – вещественнозначная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества E с ограниченной вариацией. Тогда если измеримое отображение $\xi\colon \Omega \to Y_s(X)$ является равномерно ограниченным и существует такое плотное в пространстве X линейное подпространство $\mathcal{D}$, что для каждого $u \in \mathcal{D}$ семейство отображений $\xi_\omega(t)u \in C(R_+, X)$, $\omega \in \Omega$, является равномерно непрерывным, то $M\xi(t) \in Y_s(X)$.*

Дисперсией случайного оператора $\mathbf{A}$ со значениями в пространстве $B(H)$ с математическим ожиданием $\bar{\mathbf{A}}$ (случайной оператор-функции $\mathbf{U}$ со значениями в пространстве $Y_s(H)$ с математическим ожиданием $\bar{\mathbf{U}}$) будем называть математическое ожидание случайного оператора $(\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}})^*(\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}})$ (математическое ожидание случайного оператора $(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}})^*(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}})$).

Лемма 1. *Если случайный ограниченный линейный оператор $\mathbf{A}$ имеет дисперсию $D_K \in B(H)$, то тогда справедливы неравенства Чебышева:*

$$P(\{\|\mathbf{A} - M\mathbf{A}\|_{B(H)} > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\|D_K\|_{B(H)}$$

$$P(\{\|(\mathbf{A} - M\mathbf{A})x\|_H > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\|D_K x\|_H \quad \forall\ x \in H.$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с счетно-аддитивной мерой на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω. Для каждого числа $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $\mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}$ минимальную σ-алгебру, содержащую совокупность $\mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}$ всевозможных n-кратных прямых произведений множеств из алгебры $\mathcal{A}$; через $\mu \otimes \ldots \otimes \mu$ обозначим счетно-аддитивную меру, являющуюся счетно-аддитивным продолжением функции множества $\mu \times \ldots \times \mu$ с совокупности множеств $\mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}$ на σ-алгебру $\mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}$ (см. [1], теорема 3.3.1).

Определение 3. Композицией n независимых одинаково распределенных случайных полугрупп $\mathbf{U}$ называется отображение $\mathbf{U}^n$ пространства с мерой $(\Omega \times \ldots \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \ldots \otimes \mu)$ в измеримое пространство $(B(H), \mathcal{A}_{\mathcal{S}})$, определяемое равенством $\mathbf{U}^n(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \mathbf{U}(\omega_n) \circ \ldots \circ \mathbf{U}(\omega_1)$, $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega \times \ldots \times \Omega$.

Лемма 2. *Если при каждом $n \in \mathbf{N}$ случайные полугруппы $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_n$ являются независимыми, то*

$$M[\mathbf{U}^n] = M[\mathbf{U}_n] \circ \ldots \circ M[\mathbf{U}_2] \circ M[\mathbf{U}_1] \quad \forall\ n \in \mathbf{N}.$$

Теорема 2. *Пусть ξ — случайная величина со значениями в пространстве $B(H)$, множество значений которой ограничено по норме пространства $B(H)$, и $U(t) = \exp(i\xi t)$, $t \geq 0$, — соответствующая случайная полугруппа. Тогда для последовательности $\{\mathbf{U}_n\}$ независимых одинаково распределенных случайных полугрупп выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} [\sup_{T>0} \|D(U_n(\frac{t}{n}) \circ \ldots \circ U_n(\frac{t}{n}))\|_{B(H)}] = 0. \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть ξ — случайная величина со значениями в множестве самосопряженных операторов в пространстве H и пусть $U(t) = \exp(i\xi t)$, $t \geq 0$, — соответствующая случайная полугруппа. Пусть существует такое плотное в пространстве H подпространство $\mathcal{D}$, что для любого $u \in \mathcal{D}$ выполнено условие $\int_\Omega \|\xi(\omega)u\|_H d\mu(\omega) < \infty$. Тогда если определенный на пространстве $\mathcal{D}$ равенством $\bar{\xi}u = \int_\Omega \xi(\omega)u d\mu(\omega)$ оператор $\bar{\xi}$ существенно самосопряжен, то для последовательности $\{\mathbf{U}^n\}$ композиций независимых случайных полугрупп выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} [\sup_{t\in[0,T]} \|D(U_n(\frac{t}{n}) \circ \ldots \circ U_n(\frac{t}{n}))x\|_H] = 0\ \forall\ T > 0,\ \forall\ x \in H. \tag{4}$$

Замечание 1. Из условия (3) в силу леммы 2 следует справедливость закона больших чисел по норме (1), а из условия (4) — в сильной операторной топологии (2). Существуют случайные самосопряженные операторы ξ, удовлетворяющие условиям теоремы 3, для которых условие не выполняется закон больших чисел по норме. Таков, например, случайный самосопряженный оператор, принимающий с равной $1/2$ два значения: $\mathbf{A}$ и $-\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — самосопряженный оператор со спектром $\sigma(\mathbf{A}) = \mathbf{N}$, состоящим из однократных собственных значений. В работе [2] приведены примеры случайных полугрупп, для которых закон больших чисел не выполнен и в сильной операторной топологии.

Список литературы

1. *Богачев В.И.* Основы теории меры. М.; Ижевск: РХД, 2003. Т. 1.
2. *Сакбаев В.Ж.* О законе больших чисел для композиций независимых случайных операторов и случайных полугрупп // Тр. МФТИ. 2016. Т. 8, №1. С. 140–152.