Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении многомерной сферы (Integrable variable dissipation systems on tangent bundle of multi-dimensional sphere)*

М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем с диссипацией на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики (маломерного или многомерного) твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил, а также задачи динамики точки в силовых полях на конечномерной сфере. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств.

В качестве примера рассмотрим следующую систему уравнений по-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-00848-а).

рядка $2n-3$:

$$\ddot{\xi} + b_*\dot{\xi}\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \big[\dot{\eta_1}^2 + \dot{\eta_2}^2\sin^2\eta_1 +$$

$$+\dot{\eta_3}^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}\big]\,\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0,$$

$$\ddot{\eta_1} + b_*\dot{\eta_1}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta_1}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \big[\dot{\eta_2}^2 + \dot{\eta_3}^2\sin^2\eta_2 +$$

$$+\dot{\eta_4}^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}\big]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0,$$

$$\ddot{\eta_2} + b_*\dot{\eta_2}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta_2}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta_1}\dot{\eta_2}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \big[\dot{\eta_3}^2 + \dot{\eta_4}^2\sin^2\eta_3 +$$

$$+\dot{\eta_5}^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\big]\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \quad (1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ddot{\eta}_{n-3} + b_*\dot{\eta}_{n-3}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-3}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta_1}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +$$

$$+ \ldots + 2\dot{\eta}_{n-4}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} - \dot{\eta}_{n-2}^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0,$$

$$\ddot{\eta}_{n-2} + b_*\dot{\eta}_{n-2}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-2}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta_1}\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +$$

$$+ \ldots + 2\dot{\eta}_{n-3}\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0,$$

$b_* > 0$, описывающую закрепленный n-мерный маятник в неконсервативном поле сил. Переменная η_{n-2} является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства, являющимся касательным расслоением

$$T\mathbf{S}^{n-1}\{\dot{\xi}, \dot{\eta_1}, \ldots, \dot{\eta}_{n-2}; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\} \quad (2)$$

к $(n-1)$-мерной сфере

$$\mathbf{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}:\ 0 \le \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \le \pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}.$$

Рассматриваемая система (1) является динамической системой с переменной диссипацией [1–3] на касательном расслоении (2).

Теорема. *Система (1) на касательном расслоении (2) обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.*

Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда рассматриваемые функции (первые интегралы) имеют существенно особые точки, соответствующие притягивающим или отталкивающим предельным множествам в фазовом пространстве системы.

Для полного интегрирования системы (1) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после некоторой замены переменных система (1) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\xi' = -w_{n-1} - b_* \sin\xi,\ w'_{n-1} = \sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\ &w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &w'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\\ &\eta'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}),\ s=1,\ldots,n-3, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\eta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}). \tag{5}$$

Видно, что в системе (3)–(5) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (3), $n-3$ независимых систем второго порядка (4) (после замены независимой переменной), а также уравнение (5) на η_{n-2} отделяется. Для полной интегрируемости системы (3)–(5) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3), по одному — для систем (4) (всего $n-3$ штук) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5) (*т.е. всего* n).

Один из первых интегралов системы (3) следующий:

$$\Theta_1(w_{n-1},w_{n-2};\xi) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 + b_* w_{n-1}\sin\xi + \sin^2\xi}{w_{n-2}\sin\xi} = C_1 = \text{const}, \tag{6}$$

а дополнительный первый интеграл системы (3) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1},w_{n-2};\xi) = G_2\left(\sin\xi, \frac{w_{n-1}}{\sin\xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin\xi}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{7}$$

Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (4) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5).

Действительно, искомые интегралы будут иметь следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s;\eta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\eta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const},\ \ s = 1,\ldots,n-3, \tag{8}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \eta_{n-4}, \eta_{n-3}, \eta_{n-2}) =$$

$$= \eta_{n-2} \pm \operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C''_n = \mathrm{const}, \tag{9}$$

при этом в левую часть равенства (9) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить первые интегралы (8) при $s = n-4, n-3$.

Список литературы

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
2. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16, №4. С. 3–229.
3. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". Т. 125. М.: ВИНИТИ, 2013. С. 4–254.