Грубая энтропия в задаче о распределении космических пылевых частиц (The coarse-grained entropy in the problem of the distribution of dust cosmic particles)*

Т. В. Сальникова (T. V. Salnikova),
С. Я. Степанов (S. Ya. Stepanov),
А. И. Шувалова (A. I. Shuvalova)

МГУ им. М.В. Ломоносова, РУДН, Москва, Россия
ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

`tatiana.salnikova@gmail.com`, `stepsj@ya.ru`,
`a.shuvalova@yahoo.com`

Рассматривается задача о движении Частицы в гравитационном поле Солнца, Земли и Луны. В рамках подвижной системы координат, связанной с Землей и Луной исследуется плоская бициркулярная ограниченная задача четырех тел Солнце–Земля–Луна–Частица. В окрестности треугольных точек либрации системы Земля–Луна существуют устойчивые периодические движения [1]. Наличие периодических траекторий объясняет непостоянство наблюдения облаков Кордылевского — гипотетических скоплений космической пыли в окрестности треугольных точек либрации системы Земля–Луна [2, 3]. Предлагаемое исследование базируется на анализе эволюции функции распределения частиц в фазовом пространстве в окрестности периодического движения [4].

Постановка задачи. Мы исследуем плоскую бициркулярную задачу четырех тел на примере движения Частицы в гравитационном поле Земли (E), Луны (M) и Солнца (S). Земля и Луна движутся вокруг их общего центра масс O с постоянной угловой скоростью ω_1. В качестве единиц массы, длины и времени выберем суммарную массу Земли и Луны, $|EM| = 1$, $\omega_1^{-1} = 1$. Барицентр O движется по круговой орбите с центром S и радиусом $R = 389.18$, с постоянной угловой скоростью $\omega = 1/13.36$. Движение Частицы рассматриваем во вращающейся си-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-03747 и 16-01-00625).

стеме координат с центром в точке O, ось Ox направлена от Земли к Луне. Период обращения рассматриваемой системы равняется одному синодическому месяцу (29дней 12часов 44минут).

За начальное время $t = 0$ мы возьмем момент полнолуния, то есть момент, когда Солнце, Земля и Луна находятся на одной прямой. Тогда уравнения движения Частицы в форме Лагранжа имеют вид:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v,$$

$$\dot{u} = 2v + (1-\omega^2)x + 3\omega^2 \cos p(x\cos p - y\sin p) - (1-\mu)(x+\mu)r^{-3} + \\ + \mu(1-\mu-x)l^{-3},$$

$$\dot{v} = -2u + (1-\omega^2)y - 3\omega^2 \sin p(x\cos p - y\sin p) - (1-\mu)yr^{-3} - \mu y l^{-3},$$

где $\mu = 0.0122$ — масса Луны, $p = (1-\omega)t$ — угол между $\overrightarrow{SO}$ и $\overrightarrow{EM}$, $r = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$ и $l = \sqrt{(1-x-\mu)^2 + y^2}$ — расстояния от частицы до Земли и Луны соответственно. Представленный вид уравнения движения имеют, когда отбрасываются слагаемые лагранжиана порядка $1/R$. Описанная задача имеет периодические решения [3]. Будем рассматривать устойчивое в линейном периодическое решение с периодом $T = 2\pi/(1-\omega)$, охватывающее точку либрации L_4 системы Земля–Луна, с началом в точке A (0.7274, 0.815, 0.0742, -0.2113).

Численное моделирование функции распределения. Рассмотрим ансамбль частиц одинаковой массы. Если между частицами отсутствует взаимодействие, то ансамбль статистически эквивалентен тестовой частице P(x,y,u,v) с функцией распределения $\rho(x, y, u, v, t)$, описываемой уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \dot{u}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \dot{v}\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0.$$

Это однородное линейное уравнение в частных производных первого порядка. Его решение постоянно вдоль характеристик, уравнения которых совпадают с уравнениями движения частицы.

Рассмотрим прямоугольную область фазового пространства:

$$[x_0 - 0.5w_x; x_0 + 0.5w_x] \times \ldots \times [v_0 - 0.5w_v; v_0 + 0.5w_v],$$

где w_x, w_y, w_u, w_v — длины сторон прямоугольного четырехмерного параллелепипеда, ограничивающего область фазового пространства с центром в точке (x_0, y_0, u_0, v_0). Разобьем область равномерной по каждой координате сеткой.

Численное моделирование функции распределения $\rho(x, y, u, v, t)$ частиц в фазовом пространстве основано на интегрировании уравнений движения Частицы для всех узлов сетки назад по времени до определенного момента, где задано начальное распределение $\rho_0(x, y, u, v)$. При этом функция распределения будет постоянна вдоль траектории в фазовом пространстве, следовательно на начальном и конечном отрезке одной траектории в фазовом пространстве будет сохраняться значение функции распределения. Таким образом получим значения функции распределения для всех узлов сетки в рассматриваемой области фазового пространства.

В качестве точки $(x_0,\ y_0\ , u_0,\ v_0)$ последовательно берутся точки A, B, P принадлежащие периодической траектории, соответствующие моментам времени $t = 0$, $t = T/2$, $t = 0.3024T$ (P — точка периодической траектории, находящаяся на линии визирования с Земли точки либрации L_4).

Начальное распределение задается в виде

$$\rho_0(x, y, u, v) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\pi^2} exp(-\sigma_1((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)-\sigma_2((u-u_1)^2+(v-v_1)^2)),$$

где σ_1, σ_2 — параметры модели, $(x_1, y_1, u_1, v_1) = A$.

Грубая энтропия. Полученная в узлах сетки функция распределения позволяет вычислить грубую энтропию, которая является функционалом, обобщающим обычную энтропию Гиббса [5, 6]. Функция распределения в узлах рассматривается как грубая плотность. Грубая энтропия вычисляется по формуле

$$\overline{s}(t) = -\sum_{a,b,c,d} d\mu \rho(x_a, y_b, u_c, v_d, t) \ln \rho(x_a, y_b, u_c, v_d, t),$$

где $d\mu$ — мера элемента фазового пространства,

$$d\mu = \frac{w_x w_y w_u w_v}{(N_k - 1)(N_l - 1)(N_n - 1)(N_m - 1)},$$

N_k, N_l, N_m, N_n — количество узлов сетки по x, y, u, v соответственно.

Полученная грубая энтропия имеет тенденцию к возрастанию со временем до некоторого предельного значения для каждого рассмотренного участка фазового пространства, но не является монотонной.

Список литературы

1. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
2. *Kordylewski K.* Photographische Untersuchungen des Librationspunktes L5 im System Erde-Mond // Acta Astron. 1961. V. 11, N 3. P. 165–169.
3. *Сальникова Т.В., Степанов С.Я.* Математическая модель образования космических пылевых облаков Кордылевского // ДАН. 2015. Т. 463, № 2. С. 164-167.
4. *Сальникова Т.В., Степанов С.Я., Шувалова А.И.* Вероятностная модель облаков Кордылевского // ДАН. 2016. Т. 468, № 3. С. 276–279.
5. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Тонкая и грубая энтропия в задачах статистической механики // ТМФ. 2007. Т. 151, № 1. С. 120–137.
6. *Козлов В.В.* Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. М.; Ижевск: НИЦ "РХД", 2008.