О динамике дискретных систем со случайными параметрами (About dynamics of discrete systems with random parametres)*

Л. И. Родина (L. I. Rodina)

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

LRodina67@mail.ru

При математическом моделировании дискретных динамических систем возникают разностные (или рекуррентные) уравнения. Например, развитие многих биологических популяций с неперекрывающимися поколениями (к которым можно отнести популяции некоторых видов насекомых, рыб, однолетних растений) определяется уравнением

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где x_{n+1} — размер популяции в момент времени $n+1$ выражается через размер популяции x_n в предыдущий момент времени. Свойства решений таких уравнений хорошо изучены и описаны, в частности, в работах [1, 2]. К наиболее известным результатам можно отнести теорему А.Н. Шарковского [2, гл. 3] о сосуществовании циклов различной длины и утверждение американских математиков Т. Ли и Дж. Йорка [3] о связи между наличием цикла периода три и существованием несчетного множества хаотических решений.

Рассмотрим обобщение модели (1) в предположении, что в каждый момент времени n функция f зависит также от случайного параметра ω_n, принимающего значения в множестве Ω. Получим вероятностную модель, заданную разностным уравнением

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times I, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где Ω — заданное множество с сигма-алгеброй подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$, $I = [a, b]$. Предполагаем, что для каждого $\omega \in \Omega$ функция $x \mapsto f(\omega, x)$ непрерывно дифференцируема.

Приведем результаты работы [4], в которой для данной вероятностной модели получены условия существования притягивающего и отталкивающего циклов длины $k \geqslant 1$, а также условия, при которых решения

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00346а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части (проект 2003).

хаотические с вероятностью единица. Покажем, что хаотические решения существуют в том случае, когда уравнение со случайными параметрами (2) либо не имеет ни одного цикла, либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица.

Введем в рассмотрение вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, где Σ означает множество последовательностей $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega^\infty$, система множеств $\mathfrak{A}$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$D_n \doteq \{\sigma \in \Sigma \colon \omega_0 \in \Omega_0, \ldots, \omega_n \in \Omega_n\}, \quad \text{где} \;\; \Omega_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \; j = 0, \ldots, n,$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(D_n) = \widetilde{\mu}(\Omega_0) \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_n)$. Тогда на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Приведем определения и достаточные условия существования *притягивающего и отталкивающего циклов* для уравнения (2), выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $\sigma^n \doteq (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$,

$$f^n(\sigma, x) = f^n(\sigma^n, x) \doteq f\big(\omega_{n-1}, \ldots, f(\omega_1, f(\omega_0, x))\big).$$

Определение 1. Точки $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ образуют *цикл B периода $k \geqslant 1$* для уравнения (2), если для всех $\sigma^k \in \Omega^k$ выполнены равенства

$$f^k(\sigma, \beta_0) = \beta_0, \quad f^m(\sigma, \beta_0) = \beta_m, \quad m = 1, \ldots, k-1$$

и цикл B не содержит цикла меньшего периода.

Положением равновесия (неподвижной точкой) уравнения (2) назовем точку $x_* \in I$ такую, что $f(\omega, x_*) = x_*$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определение 2. Цикл $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ назовем *притягивающим циклом* для уравнения (2), если существует окрестность U этого цикла такая, что $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} f^n(\sigma, U) = B$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Цикл B назовем *притягивающим с вероятностью единица,* если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ найдется окрестность $U = U(\sigma)$ цикла B такая, что $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} f^n(\sigma, U) = B$.

Определение 3. Цикл B назовем *отталкивающим циклом* уравнения (2), если существует окрестность U цикла B, которую каждая точка $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ покидает за конечное время, то есть для каждого $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$. Цикл B назовем *отталкивающим с вероятностью* *единица,* если существуют множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и окрестность U данного цикла, такие, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждой точки $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$.

Теорема 1. *Пусть уравнение* (2) *имеет цикл* $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$. *Если*

$$\prod_{i=0}^{k-1} \varlimsup_{x \to \beta_i} \sup_{\omega \in \Omega} \bigl| f'_x(\omega, x) \bigr| < 1,$$

то B является притягивающим циклом данного уравнения.

Если $\prod\limits_{i=0}^{k-1} \varliminf\limits_{x \to \beta_i} \inf\limits_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, x)| > 1$, *то цикл B является отталкивающим циклом уравнения* (2).

Теорема 2. *Пусть уравнение* (2) *имеет цикл* $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$. *Если существует окрестность U этого цикла такая, что*

$$M\Bigl(\ln \sup_{x \in U} \bigl| \bigl(f^k(\sigma, x)\bigr)'_x \bigr| \Bigr) < 0,$$

то цикл B притягивающий с вероятностью единица. Если существует окрестность U цикла B такая, что $M\Bigl(\ln \inf\limits_{x \in U} \bigl| \bigl(f^k(\sigma, x)\bigr)'_x \bigr| \Bigr) > 0$, *то цикл является отталкивающим с вероятностью единица.*

Определение 4. Решение $x_n(\sigma, x_0)$ уравнения (2) (при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$) назовем хаотическим, если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ не существует. Точку $x_0 \in I$ назовем *апериодической с вероятностью единица* точкой уравнения (2), если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ решения $x_n(\sigma, x_0)$ хаотические.

Точку y назовем *со временем периодической* или предпериодической точкой уравнения (2), если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $\sigma^m \in \Omega^m$ точка $x = f^m(\sigma^m, y)$ является точкой некоторого периода $k \geqslant 1$.

Условие 1. Пусть $\Omega = \{v_1, \ldots, v_r\}$, где $r \geqslant 2$, $\mu(v_i) = \mu_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$, $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i = 1$ и каждая из функций $f^k(\sigma^k, x)$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^k \in \Omega^k$ имеет конечное число неподвижных точек на отрезке $I = [a, b]$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнено условие* 1 *и уравнение* (2) *либо не имеет ни одного цикла (периода $k \geqslant 1$), либо все циклы* *отталкивающие с вероятностью единица. Пусть Y — множество периодических и со временем периодических точек данного уравнения. Тогда любая точка $x_0 \in I \setminus Y$ апериодическая с вероятностью единица.*

Список литературы

1. *Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
2. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989.
3. *Li T.-Y., Yorke J.A.* Period three implies chaos // Amer. Math. Mon. 1975. V. 82, N 10. P. 985–992.
4. *Родина Л.И.* Об отталкивающих циклах и хаотических решениях разностных уравнений со случайными параметрами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 22, №2. С. 227–235.