Гиперболическая динамика физических систем (Hyperbolic dynamics of physical systems)*

С. П. Кузнецов (S. P. Kuznetsov)

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия

spkuz@yandex.ru

С 60-х годов XX века, благодаря Д.В. Аносову и другим исследователям получила развитие гиперболическая теория – раздел теории динамических систем, доставляющий строгое обоснование возможности хаотического поведения в системах как с дискретным временем (диффеоморфизмы), так и с непрерывным временем (потоки), на инвариантных множествах в фазовом пространстве, составленных исключительно из седловых траекторий [1]. Для консервативных систем гиперболический хаос представлен динамикой Аносова, когда инвариантное множество занимает компактное фазовое пространство полностью (для диффеоморфизма) или отвечает поверхности постоянной энергии (для потока). Для диссипативных систем гиперболическая теория вводит в рассмотрение специальный тип притягивающих инвариантных множеств, таких как аттрактор Плыкина или соленоид Смейла – Вильямса. Доклад имеет содержанием обзор исследований, направленных на построение примеров систем с гиперболической динамикой на базе инструментария физики и электроники [2].

В качестве первого примера [3] рассмотрим движение частицы единичной массы на плоскости $(x,\, y)$ в стационарном потенциальном поле $U(x,y) = -\frac{1}{2}\mu(x^2+y^2) + \frac{1}{4}\mu(x^2+y^2)^2$, с минимумом на единичной окружности. Примем, что периодически, с периодом T, на короткое время включаются импульсы силового поля с потенциалом $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{3}x^3 + xy^2$, так уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \mu x(1-x^2-y^2) + (-x+x^2-y^2)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) - \dot{x},\\ \ddot{y} &= \mu y(1-x^2-y^2) + (-y-2xy)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) - \dot{y}.\end{aligned} \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 15-12-20035).

Здесь добавлена сила трения, пропорциональной мгновенной скорости, и коэффициент трения принят равным единице.

Представим себе кольцо из множества невзаимодействующих частиц, в начальный момент покоящихся на единичной окружности в точках $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$, где $0 \leq \varphi < 2\pi$. После толчка поля V частица, имевшая начальный угол φ, получит импульс $P_x = -x + x^2 - y^2$, $P_y = -y - 2xy$. Если не учитывать поле U, то остановка из-за трения произойдет в точке $x' = x + P_x = x^2 - y^2$, $y' = y + P_y = -2xy$, т.е. $x' = \cos\varphi'$ и $y' = -\sin\varphi'$, где $\varphi' = -2\varphi$, т.е. частицы расположатся по единичной окружности, но с двукратным обходом кольца в обратном направлении. Для угловой координаты получаем растягивающее отображение окружности, или отображение Бернулли.

Соотношения (1) приводят к четырехмерному отображению Пуанкаре, которое, аттрактором которого служит соленоид Смейла – Вильямса, что обусловлено топологическим свойством ансамбля частиц после преобразования. Сжатие в фазовом пространстве в поперечном направлении осуществляется за счет трения на той стадии процесса, когда под действием потенциального поля частица дрейфует в направлении потенциального минимума.

Второй пример – система двух попеременно возбуждаемых автогенераторов [4]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - [A\cos(2\pi t/T) - x^2]\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \cos\omega_0 t, \\ \ddot{y} - [-A\cos(2\pi t/T) - y^2]\dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Переменные x и y относятся к подсистемам, активным по очереди благодаря принудительному изменению параметра с периодом T и амплитудой A. Предполагается выполненным соотношение $T = 2\pi N/\omega_0$, где N – целое число, так что это система уравнений с периодическими коэффициентами.

Пусть первый осциллятор на стадии активности имеет фазу φ, так что $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Его воздействие на партнера определяется второй гармоникой $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$, и при переходе в активную стадию возникающие колебания получают фазу 2φ. В свою очередь, при действии второго осциллятора на первый, обеспечивается его возбуждение с фазой 2φ благодаря присутствию опорного сигнала частоты ω_0.

Таким образом, обе подсистемы по очереди передают возбуждение одна другой, и при этом на последовательных стадиях активности фаза колебаний дается отображением Бернулли $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \mathrm{const} \pmod{2\pi}$. В четырехмерном пространстве состояний за период модуляции имеет место растяжение в направлении, связанном с фазой, и сжатие по трем остальным направлениям. Это соответствует конструкции Смейла – Вильямса в четырехмерном пространстве.

Третий пример – система с аттрактором типа Плыкина. Пусть мгновенные состояния задаются тремя переменными подчиненными условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Пусть A, B, C, D четыре особые точки на одном меридиональном сечении сферы на равном удалении друг от друга, N и S - северный и южный полюсы. Рассмотрим последовательность непрерывных преобразований, каждое продолжительностью в единицу времени

I. Сток по параллели – смещение точек от меридианов NABS и NCDS по параллелям к равноудаленной меридиональной окружности:

$$\dot{x} = -\varepsilon x y^2, \;\; \dot{y} = \varepsilon x^2 y, \;\;\; \dot{z} = 0. \tag{3}$$

II. Дифференциальное вращение вокруг оси z с угловой скоростью, линейно зависящей от z, так что точки на параллели BC неподвижны, а на параллели AD совершают поворот на 180^o:

$$\dot{x} = \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y, \;\;\; \dot{y} = -\pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x, \;\;\; \dot{z} = 0. \tag{4}$$

III. Сток к экватору – смещение точек по окружностям с центрами на оси x от большого круга ABCD к экватору:

$$\dot{x} = 0, \;\; \dot{y} = \varepsilon y z^2, \;\; \dot{z} = -\varepsilon y^2 z. \tag{5}$$

IV. Дифференциальное вращение вокруг оси x с угловой скоростью, линейно зависящей от x, так что ортогональное оси x сечение, содержащее точку C, остается неподвижным, а сечение, содержащее точку B, претерпевает поворот на 180^o:

$$\dot{x} = 0, \;\; \dot{y} = -\pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z, \;\; \dot{z} = \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y. \tag{6}$$

Дифференциальные уравнения для каждой стадии решаются аналитически. В результате можно получить отображение за период, как композицию отображений, отвечающих всем четырем стадиям [2], которое, как оказывается, имеет аттрактор типа Плыкина. В работе [5] представлена схема электронного устройства, где динамика такого типа может быть обеспечена.

Возможность физической реализации гиперболического хаоса открывает перспективы приложений для хорошо развитой математической теории и создает основу для проведения сравнительных исследований гиперболического и негиперболического хаоса, в том числе в рамках компьютерного исследования и в эксперименте. Можно думать, что модели, целенаправленно сконструированные с тем, чтобы реализовать гиперболический хаос, окажутся полезными для понимания фундаментальных вопросов, все еще бросающих вызов исследователям, например, в отношении проблемы турбулентности.

Список литературы

1. *Аносов Д.В. и др.* Динамические системы с гиперболическим поведением. М.: ВИНИТИ, 1991.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. 2011. Т. 181, №2. С. 121–149.
3. *Kuznetsov S.P., Kruglov V.P.* Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics // Regul. Chaotic Dyn. 2016. V. 21, N 2. P. 160–174.
4. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. Art. 144101.
5. *Kuznetsov S.P.* Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // Chaos. 2011. V. 21. Art. 043105.