А.М.Зубков

Замечания о некоторых понятиях и вероятностных задачах, связанных с бесконечностью

Москва, МИАН, 16.02.2017

Арифметика возникла из потребностей счета и измерения при торговле продуктами труда, потом — при денежных расчетах.

Эти же потребности и наблюдения над окружающим миром сформировали жесткие правила логики, например: если из А следует Б, а из Б следует С, то из А следует С, часть меньше целого, закон исключенного третьего, закон перехода количества в качество, и т.д.

Правила логики вместе с правилами счета и позиционной системой счисления сделали возможными вычисления с большими числами.

Уже в древности возникло понимание того, что с большими числами и бесконечностью что-то не так.
Два больших стада баранов можно объединить, но несколько тысяч стад объединить нельзя: умрут с голоду.

Индийская задача о зернышках на шахматной доске:

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615 \approx 1,8 \cdot 10^{19}$$

Понимание бесконечности как возможности *неограниченного продолжения процесса* (продолжения прямой, деления отрезка, доказательство бесконечности множества простых чисел, и т.п.), видимо сложилось в Древней Греции в «Началах» Евклида.

Актуальная бесконечность означает рассмотрение неограниченных объектов как реально существующих и целостных, с которыми можно оперировать (философия, теология, математика).

Апория Зенона об Ахиллесе и черепахе
и его интерпретация для ЭВМ

Несоизмеримость стороны и диагонали квадрата

В средние века правила логических рассуждений оттачивались богословами, которые обсуждали Священное писание, рассуждали о бесконечной загробной жизни, спорили о свойствах ангелов и т.п. Одной их важных целей такой разработки было увеличение эффективности влияния на паству. «Верую, ибо абсурдно»

Бесконечность недоступна наблюдению и опыту, поэтому с ней связаны разнообразные парадоксы, возникающие при применении к ней правил логики, отработанных на конечных объектах.

Математика изучает свойства идеальных объектов, как правило, неразрывно связанных с бесконечностью.

Из математических идеальных кубиков можно построить башню любой высоты, а практически слишком высокая башня развалится в процессе строительства.

Парадокс Галилея о равномощности множества и подмножества (части и целого): каждому целому числу можно сопоставить его квадрат, но не у каждого есть целый квадратный корень.

Мощность бесконечного множества — это не число, в частности, не число его элементов.

Для конечных множеств A и B из условий $A \subset B$, $A \neq B$ следует, что $|A| < |B|$; для бесконечных множеств A и B из тех же условий следует только, что мощность A не больше мощности B.

Г.Кантор: Бесконечные множества могут иметь разную мощность

Парадокс Рассела

Множество — *обычное*, если оно не является своим элементом, и *необычное* в противном случае. Множество всех множеств — необычное.

Пусть множество U состоит из всех обычных множеств и только из них.

Если U — обычное, то оно входит в U, но тогда U — необычное.

Если U — необычное, то оно содержит само себя в качестве элемента, но по определению U состоит только из обычных множеств.

Определение множества, содержащего себя в качестве элемента, подразумевает множество-«матрешку» с бесконечным самовложением.

Та же идея (уже без явного использования бесконечности) используется в парадоксе брадобрея:
в деревне живет брадобрей, который бреет всех жителей деревни, которые не бреются сами, и только их; бреет ли он сам себя?
(Сложность исчезает с появлением второго брадобрея)

Парадокс Литтлвуда–Росса

Пусть $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Если $A_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, то $|A_k| = k$ и естественно считать, что пределом множеств A_k при $k \to \infty$ является все множество $\mathcal{N}$

Если $B_k = \{k+1, \ldots, 2k\}$, то $|B_k| = k$, но при $k \notin B_n$ при $n \geqslant k$, поэтому пределом множеств B_k при $k \to \infty$ естественно считать пустое множество $\varnothing$.

Лампа Томпсона

Пусть состояние лампы (включена-выключена) меняется на противоположное в каждый момент вида $1 - \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$

В каком состоянии находится лампа в момент $t = 1$?

Парадокс Банаха–Тарского

Шар радиуса 1 см можно разделить на конечное число частей и, перегруппировав их ортогональными движениями, образовать шар радиуса 1 км.

Между множествами точек двух шаров имеется взаимно однозначное соответствие, но эти множества имеют мощность континуума.

Утверждение верно в любом пространстве размерности не меньше 3.

Теорема Геделя о неполноте: в непротиворечивой формальной системе существует формально неразрешимое суждение, т. е. утверждение, которое в рамках этой системы нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

В материальном мире предметы и явления либо существуют, либо не существуют (в отличие от их словесных описаний).
Видимо, логика материального мира отличается от логики, использованной в доказательстве теоремы Геделя и порожденной правилами денежных расчетов.

Некоторые сложности, связанные с бесконечностью, отгорожены «правилами с запасом». Например, коммутативностью сложения разрешается пользоваться только для абсолютно сходящихся рядов. Но в *некоторых* неабсолютно сходящихся рядах можно делать *некоторые* перестановки слагаемых, не изменяя сумму ряда!

Никто не поручится, что все парадоксы, относящиеся к понятию бесконечности, и возможные ошибки при его использовании полностью перечислены, так как возможности практической проверки отсутствуют.

Теперь — к теории вероятностей

Природе разума свойственно рассматривать вещи не как случайные, но как необходимые.
Б.Спиноза, Этика, часть 2, теорема XVIV

Согласно принципам материалистической философии все явления в окружающем мире подчиняются объективным законам природы.

Это определение неявно подразумевает *необходимость* (как правило, даже детерминированность) всех явлений в окружающем мире.

В частности, *случайность — это форма проявления необходимости, возникающая под воздействием большого числа посторонних (для необходимости) причин.*

Один из вопросов, которые не удается разрешить в рамках необходимости — вопрос о «свободе воли».
В религиях вводится понятие греха и наказания за него. В общественной жизни — понятие преступления.

Современная аксиоматика теории вероятностей (сводящая теорию вероятностей к теории меры) была создана А.Н.Колмогоровым в начале 30-х годов XX века. Неформальные идеи:

а) все события полностью определяются «начальными условиями»;
б) неопределенность порождается недостатком информации о «начальных условиях».

Формально — понятие вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Моделью неполноты информации о «начальных условиях» является предположение о том, что известна только мера $\mathbf{P}$, заданная на совокупности «начальных условий» Ω, и решение вероятностных задач фактически сводится к вычислению (или оценкам) мер таких совокупностей «начальных условий», при которых происходит интересующее нас «событие» $A \in \mathcal{F}$.

А.Н.Колмогоров, «Основные понятия теории вероятностей»

Схема применения теории вероятностей к действительному миру.

1. Предполагают данным некоторый комплекс условий $\mathfrak{S}$, допускающий неограниченное число повторений.
2. Изучают определенный круг событий, которые могут наступать в результате осуществления условий $\mathfrak{S}$, а также всевозможных комбинаций их появлений или непоявлений.
3. Если после реализации условий $\mathfrak{S}$ осуществившийся на практике вариант окажется принадлежащим множеству A, то говорят, что наступило событие A.
4. При некоторых условиях можно предполагать, что некоторым событиям A, которые могут наступить или не наступить после осуществления условий $\mathfrak{S}$, поставлены в соответствие действительные числа $\mathbf{P}\{A\}$, обладающие следующими свойствами:
а) Можно практически быть уверенным, что если условия $\mathfrak{S}$ будут выполнены большое число n раз и при этом m — число наступлений события A, то отношение $\frac{m}{n}$ будет мало отличаться от $\mathbf{P}\{A\}$.
б) Если $\mathbf{P}\{A\}$ очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий $\mathfrak{S}$ событие A не будет иметь места.

А.Н.Колмогоров, «Основные понятия теории вероятностей»

Примечание I. Из практической достоверности двух утверждений следует практическая достоверность их одновременной правильности, хотя степень достоверности при этом несколько понижается. Если, однако, число утверждений очень велико, то из практической достоверности каждого из этих утверждений вообще нельзя вывести никаких заключений относительно одновременной правильности этих утверждений. Поэтому никоим образом не следует, что при очень большом числе серий по n испытаний в каждой серии отношение $\frac{m}{n}$ будет мало отличаться от $\mathbf{P}\{A\}$.

Примечание II. Невозможному событию (пустому множеству $\varnothing$) соответствует вероятность $\mathbf{P}\{\varnothing\} = 0$, но из того, что $\mathbf{P}\{A\} = 0$, еще не следует невозможность события A: можно только сказать, что при однократной реализации условий $\mathcal{S}$ событие A практически невозможно. Это, однако, не означает, что при достаточно длинном ряде испытаний событие A также не наступит. Можно лишь утверждать, что при $\mathbf{P}\{A\} = 0$ и большом n отношение $\frac{m}{n}$ будет мало́.

Пример: броуновское движение — случайный процесс $w(t)$, $t \geqslant 0$, с непрерывными недифференцируемыми траекториями, имеющими бесконечную вариацию на любом конечном отрезке.

Для любого фиксированного $t \in (0, \infty)$

$$\mathbf{P}\left\{\limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{w(t+\delta) - w(t)}{\delta} = \infty\right\} = \mathbf{P}\left\{\limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{w(t) - w(t-\delta)}{\delta} = \infty\right\} = 1,$$

$$\mathbf{P}\left\{\liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{w(t+\delta) - w(t)}{\delta} = -\infty\right\} = \mathbf{P}\left\{\liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{w(t) - w(t-\delta)}{\delta} = -\infty\right\} =$$

но существуют (случайные!) точки локальных максимумов τ, в которых

$$\mathbf{P}\left\{\limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{w(\tau+\delta) - w(\tau)}{\delta} \leqslant 0\right\} = \mathbf{P}\left\{\limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{w(\tau) - w(\tau-\delta)}{\delta} \leqslant 0\right\} = 1.$$

Вероятностные распределения (неотрицательные меры)

$\mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}$ — семейство вероятностных распределений на $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$,

$\mathcal{P}_{\mathbf{N}} \subset \mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}$ — семейство вероятностных распределений на $\mathbf{N} = \{0, 1, ...\}$,

δ_x — распределение, сосредоточенное в точке $x \in \mathbf{R}_+$,

$\mathcal{D} = \{\delta_x : x \in \mathbf{R}_+\}$ — семейство вырожденных распределений

Относительно операции свертки $*$ (суммирования соответствующих независимых случайных величин) семейства мер $\mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}$, $\mathcal{P}_{\mathbf{N}}$ и $\mathcal{D}$ — коммутативные полугруппы, и структура D согласована со структурой $\mathbf{R}_+$.

Любое распределение $F \in \mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}$ — смесь распределений из $\mathcal{D}$:

$$F(A) = \int_0^\infty \delta_x(A)\, F(dx).$$

Теорема. *Полугруппа* $\mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}$ *изоморфна некоторой подполугруппе* $\Pi(\mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}) \subset \mathcal{P}_{\mathbf{N}}$.

Таким образом, полугруппы $\mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}$ и $\mathcal{P}_{\mathbf{N}}$ не только равномощны, но каждую можно изоморфно вложить в другую.

Аналогичное утверждение верно для распределений на $\mathbf{R}_+^k$ и $\mathbf{N}^k$.

Теория вероятностей и ее применения, 1999, т.44, вып.4

Пусть $\mathrm{Pois} = \{\mathrm{Pois}_\lambda \colon \lambda \in \mathbf{R}_+\}$ — семейство пуассоновских распределений на $\{0, 1, \ldots\}$:

$$\mathrm{Pois}_\lambda(k) = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \ldots,$$

$$\varphi_{\mathrm{Pois}_\lambda}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} s^k = e^{\lambda(s-1)}.$$

Это семейство — полугруппа относительно свертки: если $\xi_1 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1), \xi_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_2)$ независимы, то $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Пусть $\Pi\colon \mathcal{P}_{\mathbf{R}_+} \to \mathcal{P}_{\mathbf{N}}$ — отображение, переводящее распределение $F \in \mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}$ на $\mathbf{R}_+$ в распределение

$$\Pi(F)(A) = \int_0^\infty \mathrm{Pois}_x(A)\, F(dx) \quad \text{на } \mathbf{N};$$

производящая функция $\varphi_{\Pi(F)}(s) = \sum_{k=0}^\infty \Pi(F)(k) s^k$ этого распределения имеет вид

$$\varphi_{\Pi(F)}(s) = \int_0^\infty e^{x(s-1)} F(dx),$$

т. е. является преобразованием Лапласа распределения F, вычисленным в точке $s-1$.

Преобразование Лапласа для распределений на неотрицательной полуоси обратимо;
значит, между множествами распределений $\mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}$ на $\mathbf{R}_+$ и $\Pi(\mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}) \subset \mathcal{P}_{\mathbf{N}}$ на $\mathbf{N}$ установлено взаимно однозначное соответствие: $\mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}$ вкладывается в $\mathcal{P}_{\mathbf{N}}$.

Соответствие, устанавливаемое отображением Π, является изоморфизмом, так как для любых распределений $F, G \in \mathcal{P}_{\mathbf{R}_+}$:

$\varphi_{\Pi(F)}(s)$ — преобразование Лапласа распределения F,

$\varphi_{\Pi(G)}(s)$ — преобразование Лапласа распределения G,

преобразование Лапласа свертки распределений $F * G$ равно произведению их преобразований Лапласа,

т. е. $\varphi_{\Pi(F*G)}(s) = \varphi_{\Pi(F)}(s) \cdot \varphi_{\Pi(G)}(s)$ и $\Pi(F * G) = \Pi(F) * \Pi(G)$.

Аналогичную конструкцию для полугрупп распределений на $\mathbf{R}$ и на $\mathbf{Z}$ построить не удается.

Проверка статистических гипотез

Стандартная задача математической статистики: наблюдается случайная величина ξ с конечным множеством значений S и предполагается, что ее распределение имеет один из двух видов: либо выполняется простая гипотеза H_1:

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = p(k), \quad k \in S,$$

либо выполняется простая гипотеза H_2:

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = q(k), \quad k \in S,$$

где $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ — известные функции. Требуется построить правило принятия решения о том, какому из двух распределений лучше соответствует наблюдение ξ, так, чтобы минимизировать вероятности принятия неправильных решений.

Правило принятия решения в указанных условиях имеет следующий вид: нужно разбить S на два подмножества S_1 и S_2 и при $\xi \in S_1$ принимать гипотезу H_1, а при $\xi \in S_2$ принимать гипотезу H_2.

Согласно классической лемме Неймана – Пирсона разбиения вида

$$S_1^* = \{k \in S\colon \frac{p(k)}{q(k)} > C\}, \quad S_2^* = \{k \in S\colon \frac{p(k)}{q(k)} \leqslant C\}$$

являются оптимальными в следующем смысле: для всех разбиений $S = S_1 \cup S_2$ с фиксированной вероятностью ошибки первого рода

$$\mathbf{P}\{\xi \in S_2 \,|\, H_1\} = \sum_{k \in S_2} p(k) = \mathbf{P}\{\xi \in S_2^* \,|\, H_1\} = \sum_{k \in S_2^*} p(k) = \alpha,$$

вероятность ошибки второго рода минимальна, т. е.

$$\mathbf{P}\{\xi \in S_1 \,|\, H_2\} = \sum_{k \in S_1} q(k) \geqslant \mathbf{P}\{\xi \in S_1^* \,|\, H_2\} = \sum_{k \in S_1^*} q(k) = \beta.$$

Количественную оценку множества возможных значений α и β дает расстояние по вариации между распределениями $\{p(k)\}$ и $\{q(k)\}$:

$$\rho(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in S} |p(k) - q(k)| \in [0, 1],$$

а именно: $\alpha + \beta \geqslant 1 - \rho(p, q)$.

Разреженные псевдослучайные распределения

Рассмотрим распределения на множестве $\{0,1\}^n$ двоичных строк длины n. Если элементы строк независимы и принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями, то всем строкам соответствует одна и та же вероятность 2^{-n}. Обозначим это распределение $\{u_n(x),\, x \in \{0,1\}^n\}$.

Семейство распределений $\{p_n(x),\, x \in \{0,1\}^n\}_{n=1}^{\infty}$, на множествах двоичных строк длины $n = 1, 2, \ldots$ называется *разреженным*, если доля таких $x \in \{0,1\}^n$, что $\{p_n(x) > 0$, стремится к 0 при $n \to \infty$.

Такие семейства распределений рассмотрели O.Goldreich и H.Krawczyk в статье «Sparse pseudorandom distributions» (Random Structures and Algorithms, 1992, v.3, № 2).

Для стандартной математической статистики задача различения равновероятного распределения $\{u_n(x)\}$ и конкретного разреженного распределения $\{p_n(x)\}$ представляется почти тривиальной: расстояние по вариации между этими распределениями стремится к 1 при $n \to \infty$ и вероятность того, что при равновероятном распределении наблюдения ξ оно попадет на носитель распределения $\{p_n(x)\}$, равна отношению числа элементов этого носителя к числу 2^n строк длины n.

Правило принятия решения O.Goldreich и H.Krawczyk понимают как «полиномиальный» алгоритм T, который обрабатывает двоичную строку длины n за время, полиномиально зависящее от n, и в качестве результата выдает 0 (принимается гипотеза о равновероятности) или 1 (принимается гипотеза о разреженности).

Результаты статьи O.Goldreich и H.Krawczyk показывают, что если вместо простой гипотезы о разреженном распределении $\{p_n(x)\}$ рассматривается сложная гипотеза, состоящая в том, что распределение $\{p_n(x)\}$ принадлежит множеству всех распределений с равновероятным распределением на носителе, состоящем из $2^{o(n)}$ элементов, то любой полиномиальный алгоритм не сможет отличить почти любое такое распределение от равновероятного с малыми вероятностями ошибок обеих типов при $n \to \infty$.

Показано также, что сложность задачи построения «типичного» разреженного распределения, обладающего указанным свойством, растет с ростом n быстрее любого полинома.

Пример: пусть $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$. В множестве $\{0,1\}^{n+m}$ припишем каждой строке

$$x \| f(x) = (x_1, \ldots, x_n, f(x)_1, \ldots, f(x)_m), \quad x \in \{0,1\}^n,$$

вероятность 2^{-n}. Носитель $S(f)$ такого распределения P_f составляет 2^{-m}-ю долю от всех 2^{n+m} строк.

Допустим, что имеется последовательность случайных независимых строк

$$y^1 = (y^1_1, \ldots, y^1_{n+m}), \ldots, y^T = (y^T_1, \ldots, y^T_{n+m}) \in \{0,1\}^{n+m}$$

и требуется различить две гипотезы: либо эти строки имеют равновероятное распределение на $\{0,1\}^{n+m}$, либо их распределение сосредоточено на множестве $S(f) \subset \{0,1\}^{n+m}$.

Если функция f известна, то проверка того, какая из двух гипотез верна, по порядку не сложнее вычисления нескольких значений функции f: достаточно для нескольких значений k проверить выполнение равенств $f(y_1^k, \dots, y_n^k) = (y_{n+1}^k, \dots, y_{n+m}^k)$.

Если y^k имеет равновероятное распределение на $\{0, 1\}^{n+m}$, то вероятность выполнения каждого такого равенства равна 2^{-m}, т. е. при гипотезе о равновероятности выполнение равенства крайне маловероятно, а при распределении на $S(f)$ оно выполняется с вероятностью 1.

Однако по теореме Шеннона – Лупанова для почти всех булевых функций от n переменных реализующие их схемы из функциональных элементов имеют сложность порядка $O(2^n/n)$, так что вычисление даже одного значения может иметь сложность $O(2^n)$.

Но если о функции f известно только, что она выбирается случайно из множества всех $(2^m)^{2^n}$ отображений $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$, то отвергнуть гипотезу о наличии функциональной связи между первыми n и последними m компонентами строк y^k можно будет только после появления строк y^k и y^j с совпадающими первыми n компонентами и с несовпадающими последними m компонентами.

Если строки $y^1, y^2, \dots$ независимы и имеют равновероятное распределение на $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$, то среднее время до появления строк с одинаковыми первыми n компонентами имеет порядок $O(2^{n/2})$, т. е. чтобы отклонить гипотезу о распределении на $S(f)$ при наблюдении строк с равновероятным распределением на $\{0,1\}^{n+m}$ потребуется выборка очень большого объема.

Проблема существования однонаправленных отображений $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$

Алгоритм мультипликативных замен

G — конечная группа, $\mathcal{N}_k(G)$ — множество всех *порождающих* k-*элементных наборов* $(g) = (g_1, \ldots, g_k)$.

Строится цепь Маркова $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \ldots, \zeta_k(t))$, $t = 0, 1, \ldots$, на $\mathcal{N}_k(G)$.

Ее переходы определяются вспомогательными независимыми случайными четверками $(\alpha_t, \beta_t, \delta_t, \varepsilon_t), t = 1, 2, \ldots$, имеющими равновероятное распределение на множестве $\{(i, j)\colon 1 \leqslant i \neq j \leqslant k\} \times \{0,\, 1\} \times \{-1,\, 1\}$:

$$\zeta(t) = (\zeta_1(t), \ldots, \zeta_k(t)),$$

$$\zeta_j(t) = \begin{cases} \zeta_j(t-1), & j \neq \alpha_t, \\ \zeta_{\alpha_t}(t-1)\zeta_{\beta_t}^{\varepsilon_t}(t-1), & j = \alpha_t, \delta_t = 0, \\ \zeta_{\beta_t}^{\varepsilon_t}(t-1)\zeta_{\alpha_t}(t-1), & j = \alpha_t, \delta_t = 1. \end{cases}$$

Celler F., Leedham-Green C. R., Murray S., Niemeyer A., O'Brien E.A. Generating random elements of a finite group. — Comm. Alg. 23 (1995), 4931–4948.
Pak I. What do we know about the product replacement algorithm? 2000

Утверждение 1. *Матрица переходных вероятностей цепи Маркова, определенной формулами* (29)*, является симметричной и дважды стохастической.*

Из утверждения 1 следует, что равновероятное распределение на $\mathcal{N}_k(G)$ является инвариантным для цепи ζ_n. Оно является единственным инвариантным и предельным для ζ_n при $n \to \infty$, если все ее состояния сообщаются и цепь апериодична.

Известно:

Если G — конечная абелева группа, $G \backsimeq \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \ldots \mathbb{Z}_{m_r}$ и $m_1 \,|\, m_2 \,|\, \ldots \,|\, m_r$, то множество $\mathcal{N}_k(G)$ состояний цепи ζ_n образует один класс сообщающихся состояний. В частности, условиям этой теоремы удовлетворяют группы $\mathbb{Z}_m^r$.

Если G — произвольная группа, $d(G)$ — минимальное число в наборе, порождающем группу G, а $\overline{d}(G)$ — максимальное число элементов в несокращаемом порождающем наборе, то множество $\mathcal{N}_k(G)$ состояний цепи ζ_n образует один класс сообщающихся состояний, если $k \geqslant d(G) + \overline{d}(G)$.

Пусть в урне находятся шары белого и черного цветов. За 1 шаг с вероятностями, равными $\frac{1}{2}$, либо число белых шаров увеличивается на число черных шаров, либо число черных шаров увеличивается на число белых шаров.

Пусть $\{\xi_t = (\xi_{t,1}, \xi_{t,2}),\ t = 0, 1, \ldots\}$ — однородная по времени цепь Маркова с множеством состояний $\mathbb{N}^2 = \{1, 2, \ldots\}^2$ и переходными вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi_{t+1} = (b_1, b_2) \,|\, \xi_t = (a_1, a_2)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } (b_1, b_2) = (a_1, a_1 + a_2), \\ \frac{1}{2}, & \text{если } (b_1, b_2) = (a_1 + a_2, a_2), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассматривается отношение $\gamma_t = \frac{\xi_{t,1}}{\xi_{t,1} + \xi_{t,2}}$.
Последовательность $\{\gamma_t\}$ образует цепь Маркова с множеством состояний $[0,\ 1]$.
Доказано, что функция распределения γ_t при $t \to \infty$ сходится к теоретико-числовой функции Минковского $?(x)$, введенной в 1904 г.

А.М.Зубков, К.А.Колесникова, Дискретная математика, 2015, 27, № 3

Монотонно возрастающая *функция Минковского* $?(x)$, $x \in [0,\, 1]$, определяется сначала на множестве $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ условиями
а) $?(0) = ?(0/1) = 0, \quad ?(1) = ?(1/1) = 1,$
б) если уже определены значения $?(a/b)$ и $?(c/d)$, то

$$?\left(\frac{a+c}{b+d}\right) = \frac{?(a/b) + ?(c/d)}{2},$$

после чего $?(\cdot)$ доопределяется по непрерывности для всех $x \in [0,\, 1]$.