Совместное распределение терминальных значений субмартингала и его компенсатора

А. А. Гущин

МИАН/МГУ/ВШЭ

Большой семинар кафедры теории вероятностей,
15 февраля 2017 г.

Пусть $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ — произвольный субмартингал класса (D), выходящий из 0. Согласно разложению Дуба–Мейера

$$X = M + A,$$

где $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал, A — предсказуемый возрастающий процесс, являющийся интегрируемым, т.е. $\mathsf{E} A_\infty < \infty$, $M_0 = A_0 = 0$. Для краткости мы будем иногда называть A компенсатором X.

Поставим вопрос: каков класс возможных совместных распределений пары (X_∞, A_∞)?

Ответ тривиальный: для каждого распределения μ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ с $\int x\, \mu(dx, dy) = \int y\, \mu(dx, dy) < \infty$ можно найти такой субмартингал X класса (D), что $X_0 = 0$ и $\mu = \mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty)$.

Действительно, определим $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \mathscr{F}\}$, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}$ — борелевская σ-алгебра, $\mathsf{P} = \mu$, $X_1 = x - y$, $X_2 = x$.

Сходная элементарная задача

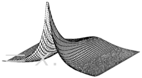
Пусть $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ — произвольный субмартингал класса (D), выходящий из 0. Согласно разложению Дуба–Мейера

$$X = M + A,$$

где $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал, A — предсказуемый возрастающий процесс, являющийся интегрируемым, т.е. $\mathsf{E} A_\infty < \infty$, $M_0 = A_0 = 0$. Для краткости мы будем иногда называть A компенсатором X.

Поставим вопрос: каков класс возможных совместных распределений пары (X_∞, A_∞)?

Ответ тривиальный: для каждого распределения μ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ с $\int x \, \mu(dx, dy) = \int y \, \mu(dx, dy) < \infty$ можно найти такой субмартингал X класса (D), что $X_0 = 0$ и $\mu = \mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty)$. Действительно, определим $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \mathscr{F}\}$, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}$ — борелевская σ-алгебра, $\mathsf{P} = \mu$, $X_1 = x - y$, $X_2 = x$.



Сходная элементарная задача

Пусть $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ — произвольный субмартингал класса (D), выходящий из 0. Согласно разложению Дуба–Мейера

$$X = M + A,$$

где $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал, A — предсказуемый возрастающий процесс, являющийся интегрируемым, т.е. $\mathsf{E} A_\infty < \infty$, $M_0 = A_0 = 0$. Для краткости мы будем иногда называть A компенсатором X.

Поставим вопрос: каков класс возможных совместных распределений пары (X_∞, A_∞)?

Ответ тривиальный: для каждого распределения μ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ с $\int x\, \mu(dx, dy) = \int y\, \mu(dx, dy) < \infty$ можно найти такой субмартингал X класса (D), что $X_0 = 0$ и $\mu = \mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty)$.

Действительно, определим $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \mathscr{F}\}$, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}$ — борелевская σ-алгебра, $\mathsf{P} = \mu$, $X_1 = x - y$, $X_2 = x$.

Постановка задачи

Рассмотренная задача перестает быть тривиальной, если дополнительно наложить условие неотрицательности на X.

Определение

Вероятностная мера μ *на* $\left(\mathbb{R}^2_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2_+)\right)$ *принадлежит классу* $\mathbb{W}_+$, *если найдутся такие фильтрованное вероятностное пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ *и неотрицательный* $(\mathscr{F}_t, \mathsf{P})$*-субмартингал* $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, $X_0 = 0$, *класса* (D), *что*

$$\mu = \mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty),$$

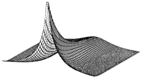
где $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$ *есть компенсатор субмартингала* X.

Рассматривается задача характеризации класса $\mathbb{W}_+$.

Очевидно, что, если X — неотрицательный субмартингал класса (D), $X_0 = 0$, A — предсказуемый возрастающий процесс из его разложения Дуба–Мейера, а T — произвольный марковский момент, то

$$\mathrm{Law}(X_T, A_T) \in \mathbb{W}_+.$$

Для последующего напомним, что субмартингал класса (D) квазинепрерывен слева тогда и только тогда, когда его компенсатор непрерывен.



Значения в произвольный момент остановки

Очевидно, что, если X — неотрицательный субмартингал класса (D), $X_0 = 0$, A — предсказуемый возрастающий процесс из его разложения Дуба–Мейера, а T — произвольный марковский момент, то

$$\mathrm{Law}(X_T, A_T) \in \mathbb{W}_+.$$

Для последующего напомним, что субмартингал класса (D) квазинепрерывен слева тогда и только тогда, когда его компенсатор непрерывен.

Основной результат

Теорема

Мера μ на $\mathbb{R}^2_+$ принадлежит $\mathbb{W}_+$ тогда и только тогда, когда

$$\int x\,\mu(dx,dy) = \int y\,\mu(dx,dy) < \infty$$

и

$$\int\limits_{\{y\leqslant\lambda\}} x\,\mu(dx,dy) \leqslant \int (y\wedge\lambda)\,\mu(dx,dy) \qquad \text{для каждого } \lambda \geqslant 0.$$

Более того, для любой $\mu \in \mathbb{W}_+$ и для любого $p \geqslant 1$ найдется такой квазинепрерывный слева интегрируемый возрастающий процесс X, что $\mu = \mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty)$ и X представим в виде $X = |M|^p$ или $X = [M,M]$, где M — мартингал.

Основной результат

Теорема

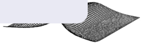
Мера μ *на* $\mathbb{R}^2_+$ *принадлежит* $\mathbb{W}_+$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int x\,\mu(dx, dy) = \int y\,\mu(dx, dy) < \infty$$

и

$$\int\limits_{\{y \leqslant \lambda\}} x\,\mu(dx, dy) \leqslant \int (y \wedge \lambda)\,\mu(dx, dy) \qquad \text{для каждого } \lambda \geqslant 0.$$

Более того, для любой $\mu \in \mathbb{W}_+$ *и для любого* $p \geqslant 1$ *найдется такой квазинепрерывный слева интегрируемый возрастающий процесс* X, *что* $\mu = \mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty)$ *и* X *представим в виде* $X = |M|^p$ *или* $X = [M, M]$, *где* M *— мартингал.*



Основной результат

Теорема

Мера μ на $\mathbb{R}^2_+$ принадлежит $\mathbb{W}_+$ тогда и только тогда, когда

$$\int x\,\mu(dx,dy) = \int y\,\mu(dx,dy) < \infty$$

и

$$\int\limits_{\{y\leqslant\lambda\}} x\,\mu(dx,dy) \leqslant \int (y\wedge\lambda)\,\mu(dx,dy) \qquad \text{для каждого } \lambda \geqslant 0.$$

Более того, для любой $\mu \in \mathbb{W}_+$ и для любого $p \geqslant 1$ найдется такой квазинепрерывный слева интегрируемый возрастающий процесс X, что $\mu = \mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty)$ и X представим в виде $X = |M|^p$ или $X = [M,M]$, где M — мартингал.

Таким образом, множество $\mathbb{W}_+$ есть множество всех совместных распределений, которые может принимать в один и тот же (марковский) момент времени случайный процесс X вместе с предсказуемым возрастающим процессом (компенсатором) A из разложения Дуба–Мейера, когда X пробегает любой из следующих классов:

- всех неотрицательных субмартингалов класса (D);
- всех интегрируемых возрастающих процессов;
- всех квазинепрерывных слева интегрируемых возрастающих процессов;
- всех процессов вида $|M|^p$, $p \geqslant 1$ фиксировано, где M — равномерно интегрируемый мартингал с $M_0 = 0$ и $\mathsf{E}|M_\infty|^p < \infty$;
- квадратических вариаций $[M, M]$ с мартингалами M из предыдущего пункта при $p = 2$ (в этом случае компенсатором как M^2, так и $[M, M]$ будет квадратическая характеристика $\langle M, M\rangle$).

Дискретное время

Ниже мы увидим, что не каждое распределение из $\mathbb{W}_+$ отвечает субмартингалам с дискретным временем. Однако из нашего основного результата легко вывести, что множество терминальных распределений неотрицательного субмартингала с дискретным временем и конечным временным горизонтом и его компенсатора всюду плотно в $\mathbb{W}_+$ относительно $(1 + |x|)$-слабой топологии.

Точные моментные неравенства

Пусть X — интегрируемый возрастающий процесс и A — его компенсатор. Хорошо известны следующие неравенства:

$$\mathsf{E}A_\infty^p \leqslant p^p \mathsf{E}X_\infty^p, \quad p > 1,$$

причем константа точна. Из приведенных результатов сразу вытекает, что

- константу нельзя улучшить для возрастающего процесса X с дискретным временем;
- если M — квадратично-интегрируемый мартингал, то константа в неравенстве

  $$\mathsf{E}\langle M, M\rangle_\infty^p \leqslant p^p \mathsf{E}[M, M]_\infty^p, \quad p > 1,$$

  неулучшаема (в том числе, в случае дискретного времени);
- если M — квадратично-интегрируемый мартингал, то

  $$\mathsf{E}\langle M, M\rangle_\infty^p \leqslant p^p \mathsf{E}M_\infty^{2p}, \quad p > 1,$$

  и константа вновь неулучшаема (в том числе, в случае дискретного времени).

Мартингальная характеризация

Теорема

Пусть X — неотрицательный согласованный непрерывный справа и имеющий пределы слева случайный процесс, $X_0 = 0$, A — предсказуемый интегрируемый возрастающий процесс. Следующие утверждения эквивалентны:
(i) *X — субмартингал класса (D), A — предсказуемый возрастающий процесс из его разложения Дуба–Мейера;*
(ii) *для любой ограниченной непрерывной справа неубывающей функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ процесс*

$$F(A_t) - f(A_t)X_t,$$

где $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$, является супермартингалом класса (D).

Вероятностная мера μ на $\left(\mathbb{R}^2_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2_+)\right)$ принадлежит классу $\mathbb{W}_-$, если найдутся такие фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ и равномерно интегрируемый мартингал $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$, $N_0 = 0$, на нем, что

$$\mu = \mathrm{Law}(\overline{N}_\infty - N_\infty, \overline{N}_\infty),$$

где $\overline{N}_t = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} N_s$.

Теорема (Rogers (1993))

Мера μ на $\mathbb{R}^2_+$ принадлежит $\mathbb{W}_-$ тогда и только тогда, когда

$$\int |x-y|\,\mu(dx,dy) < \infty, \qquad \int (x-y)\,\mu(dx,dy) = 0,$$

и

$$\int\limits_{\{y\leqslant\lambda\}} x\,\mu(dx,dy) \geqslant \int (y\wedge\lambda)\,\mu(dx,dy) \qquad \text{для каждого } \lambda\geqslant 0.$$

Класс $\mathbb{W}_-$ и его характеризация

Вероятностная мера μ на $\left(\mathbb{R}^2_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2_+)\right)$ принадлежит классу $\mathbb{W}_-$, если найдутся такие фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ и равномерно интегрируемый мартингал $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$, $N_0 = 0$, на нем, что

$$\mu = \mathrm{Law}(\overline{N}_\infty - N_\infty, \overline{N}_\infty),$$

где $\overline{N}_t = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} N_s$.

Теорема (Rogers (1993))

Мера μ на $\mathbb{R}^2_+$ принадлежит $\mathbb{W}_-$ тогда и только тогда, когда

$$\int |x-y|\,\mu(dx,dy) < \infty, \qquad \int (x-y)\,\mu(dx,dy) = 0,$$

и

$$\int\limits_{\{y\leqslant\lambda\}} x\,\mu(dx,dy) \geqslant \int (y\wedge\lambda)\,\mu(dx,dy) \qquad \text{для каждого } \lambda\geqslant 0.$$

Достижение равенства в обеих теоремах

Если для мартингала N в теореме Роджерса выполнено равенство для всех $\lambda \geqslant 0$, то $\overline{N}$ непрерывен, т.е. для локального субмартингала $X = \overline{N} - N$ его компенсатор A удовлетворяет $A = \overline{N}$.

Теперь предположим, что X — субмартингал класса (D), $X_0 = 0$, для которого в нашем основном результате имеет место равенство для всех $\lambda \geqslant 0$, т.е. $\mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty) \in \mathbb{W} := \mathbb{W}_+ \cap \mathbb{W}_-$. Положим $N := A - X$. Тогда можно доказать, что $A = \overline{N}$ и, значит, для мартингала N выполнено равенство для всех $\lambda \geqslant 0$ в теореме Роджерса.

Достижение равенства в обеих теоремах

Если для мартингала N в теореме Роджерса выполнено равенство для всех $\lambda \geqslant 0$, то $\overline{N}$ непрерывен, т.е. для локального субмартингала $X = \overline{N} - N$ его компенсатор A удовлетворяет $A = \overline{N}$.

Теперь предположим, что X — субмартингал класса (D), $X_0 = 0$, для которого в нашем основном результате имеет место равенство для всех $\lambda \geqslant 0$, т.е. $\mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty) \in \mathbb{W} := \mathbb{W}_+ \cap \mathbb{W}_-$. Положим $N := A - X$. Тогда можно доказать, что $A = \overline{N}$ и, значит, для мартингала N выполнено равенство для всех $\lambda \geqslant 0$ в теореме Роджерса.

Квантильные функции

Введем необходимые дополнительные определения и обозначения. Для случайной величины X с функцией распределения $F_X := \mathsf{P}(X \leqslant x)$ ее нижняя квантильная функция Q_X определяется как

$$Q_X(u) := \inf\{x\colon F_X(x) \geqslant u\}, \quad u \in (0,1).$$

Буква U всегда обозначает случайную величину с равномерным распределением на $(0,1)$. Как правило, мы берем в качестве U тождественное отображение из $(0,1)$ в себя, понимаемое как случайная величина на вероятностном пространстве, состоящем из интервала $(0,1)$ с борелевской σ-алгеброй и мерой Лебега. Напомним, что

$$Q_X(U) \stackrel{\text{law}}{=} X.$$

Комонотонность и стохастический порядок

Случайные величины X и Y (заданные на одном пространстве) называются комонотонными, если

$$(X, Y) \stackrel{\text{law}}{=} (Q_X(U), Q_Y(U)).$$

Напомним отношения стохастического и выпуклого порядка для одномерных функций распределения. Функцию распределения F_1 называют стохастически меньшей функции распределения F_2 ($F_1 \leqslant_{st} F_2$), если для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $F_1(x) \geqslant F_2(x)$ или, эквивалентно, для соответствующих нижних квантильных функций для любого $u \in (0, 1)$ выполняется неравенство $Q_1(u) \leqslant Q_2(u)$.

Выпуклый порядок

Определение выпуклого порядка дадим только для интегрируемых распределений: $F_1 \leqslant_{cx} F_2$, если $\int f(x)\,F_1(dx) \leqslant \int f(x)\,F_2(dx)$ для любой выпуклой $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. На языке квантильных функций это означает, что для любого $t \leqslant 1$

$$\int_0^t Q_2(u)\,du \leqslant \int_0^t Q_1(u)\,du,$$

а при $t = 1$ имеет место равенство интегралов. Для того, чтобы $F_1 \leqslant_{cx} F_2$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись (на одном пространстве) такие случайные величины X_i с функциями распределения F_i, $i = 1, 2$, что $\mathsf{E}(X_2|X_1) = X_1$.

Дополнительные обозначения

Обозначим через $\mathbb{W}_m$ подкласс $\mathbb{W}_+ \cap \mathbb{W}_-$, состоящий из мер, у которых координатные отображения комонотонны.

Обозначим через $\mathbb{M}$ класс вероятностных мер на $\mathbb{R}_+$ с конечным первым моментом.

Обозначим через $\mathbb{V}$ множество всех пар $(\rho, \nu) \in \mathbb{M} \times \mathbb{M}$, для которых найдется мера $\mu \in \mathbb{W}_+$ с маргинальными распределениями ρ и ν.

Наша текущая цель — описание множества $\mathbb{V}$.

Основное неравенство

Напомним еще раз основное неравенство: если X и Y — неотрицательные случайные величины с $\mathsf{E}X = \mathsf{E}Y < \infty$, то $\mathrm{Law}(X, Y) \in \mathbb{W}_+$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\{Y \leqslant \lambda\}} X \, d\mathsf{P} \leqslant \mathsf{E}(Y \wedge \lambda).$$

Характеризация пар маргинальных распределений

Теорема

Пусть X *и* Y *— неотрицательные случайные величины с* $\mathsf{E}X = \mathsf{E}Y < \infty$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

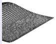
(i) $(\mathrm{Law}(X), \mathrm{Law}(Y)) \in \mathbb{V}$;

(ii) $\mathrm{Law}(Q_X(U), Q_Y(U)) \in \mathbb{W}_+$;

(iii) *для любого* $t \in (0,1)$

$$\int_0^t Q_X(u)\,du \leqslant \int_0^1 Q_Y(u \wedge t)\,du. \tag{1}$$

Если $\mathrm{Law}(X, Y) \in \mathbb{W}_m$, *то в* (1) *имеет место равенство для всех* $t \in (0,1)$. *Обратно, если в* (1) *имеет место равенство для всех* $t \in (0,1)$, *то найдется единственное распределение в* $\mathbb{W}_+$ *с маргинальными распределениями как у* X *и* Y, *а именно* $\mathrm{Law}(Q_X(U), Q_Y(U))$, *причем оно лежит в* $\mathbb{W}_m$.



Замечания к (1)

Следует отметить, что правая часть (1) не обязательно выпукла по t и, следовательно, не всегда можно найти такую X, что при всех t будет равенство левой и правой частей. В то же время, какое бы распределение X мы не взяли, всегда найдется такое распределение Y, что обе части (1) совпадают при всех $t \in (0, 1)$.

Структура сечений множества $\mathbb{V}$

Следствие

(i) *Пусть* $\nu \in \mathbb{M}$. *Тогда в множестве* $\{\rho \in \mathbb{M} \colon (\rho, \nu) \in \mathbb{V}\}$ *найдется наименьший в смысле выпуклого порядка элемент* ν_*; *более того,*

$$\{\rho \in \mathbb{M} \colon (\rho, \nu) \in \mathbb{V}\} = \{\rho \in \mathbb{M} \colon \nu_* \leqslant_{cx} \rho\}.$$

(ii) *Пусть* $\rho \in \mathbb{M}$. *Тогда в множестве* $\{\nu \in \mathbb{M} \colon (\rho, \nu) \in \mathbb{V}\}$ *найдется наибольший в смысле выпуклого порядка элемент* ρ^*. *А именно, нижняя квантильная функция* $Q^*(u)$ *распределения* ρ^* *определяется через нижнюю квантильную функция* $Q(u)$ *распределения* ρ *соотношением*

$$Q^*(u) = \int_0^u \frac{Q(t)}{1-t}\, dt, \quad u \in (0,1). \tag{2}$$

Следствие (окончание)

(iii) *Для любого* $\rho \in \mathbb{M}$ *существует единственное распределение* $\mu \in \mathbb{W}_+$ *с маргинальными распределениями* ρ *и* ρ^*, *причем* $\mu \in \mathbb{W}_m$.

(iv) *Если* $\mathrm{Law}(V, W) \in \mathbb{W}_m$, *то найдется такая монотонно неубывающая функция* $\chi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *что* $\chi(x) > 0$ *для* $x > 0$ *и* $V = \chi(W)$ *п.н. Для любой такой функции* χ

$$\mathrm{P}(W > x) = \mathrm{P}(V > 0) \exp\left(- \int\limits_0^x \frac{dz}{\chi(z)} \right) \quad \text{для любого } x \geqslant 0.$$

(v) $\nu \leqslant_{cx} (\nu_*)^*$ *для любого* $\nu \in \mathbb{M}$.

(vi) $\rho = (\rho^*)_*$ *для любого* $\rho \in \mathbb{M}$.

Пример

Возьмем $\rho = \varepsilon_{\{1\}}$, тогда ρ^* есть экспоненциальное распределение со средним 1. Пусть теперь ν получается из ρ^* усреднением по множествам $[0, a]$ и (a, ∞). Тогда $\nu \leqslant_{\mathsf{cx}} \rho^*$, но с помощью (1) тривиально проверяется, что $(\rho, \nu) \notin \mathbb{V}$. Таким образом, вложение

$$\{\nu \in \mathbb{M}\colon (\rho, \nu) \in \mathbb{V}\} \subseteq \{\nu \in \mathbb{M}\colon \nu \leqslant_{\mathsf{cx}} \rho^*\},$$

вообще говоря, строгое. Также, очевидно, $\nu \neq (\nu_*)^*$, ср. с (v).

Пусть X — неотрицательный локальный субмартингал с разложением Дуба–Мейера $X = M + A$, $X_0 = M_0 = A_0 = 0$, на некотором стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$; M — локальный мартингал, A — предсказуемый возрастающий процесс.

Предложение

Пусть X — неотрицательный локальный субмартингал, $X_0 = 0$. Тогда при каждом $\lambda > 0$ процесс $(X - A + \lambda)\mathbb{1}_{\{A<\lambda\}}$ является неотрицательным супермартингалом. В частности, P-п.н.

$$\{A_\infty < \infty\} \subseteq \{X \to\} \tag{3}$$

и для любого $\lambda \geqslant 0$

$$\mathsf{E}X_\infty \mathbb{1}_{\{A_\infty \leqslant \lambda\}} \leqslant \mathsf{E}(A_\infty \wedge \lambda). \tag{4}$$

Доказательство.

Зафиксируем произвольное $\lambda > 0$ и положим $H := \mathbb{1}_{\{A<\lambda\}} = \mathbb{1}_{[\![0,S[\![}$, где $S := \inf\{t \geqslant 0\colon A_t \geqslant \lambda\}$ — предсказуемый марковский момент. Ясно, что H — предсказуемый непрерывный справа процесс. Тогда для любого семимартингала Y

$$Y_0 + H \cdot Y = Y\mathbb{1}_{[\![0,S[\![} + Y_{S-}\mathbb{1}_{[\![S,\infty[\![}.$$

Применяя это равенство к $Y = X - A + \lambda$, получаем

$$(X - A + \lambda)\mathbb{1}_{\{A<\lambda\}} = \lambda + H \cdot M - X_{S-}\mathbb{1}_{[\![S,\infty[\![} - (\lambda - A_{S-})\mathbb{1}_{[\![S,\infty[\![}.$$

В силу неотрицательности остальных процессов, входящих в эту формулу, локальный мартингал $H \cdot M$ ограничен снизу константой $-\lambda$ и, значит, является супермартингалом. □

Окончание доказательства

Доказательство (окончание).

Поэтому процесс $Z := (X - A + \lambda)\mathbb{1}_{\{A<\lambda\}}$ в левой части равенства, будучи неотрицательным и разностью супермартингала и возрастающего процесса, также есть супермартингал. Поскольку неотрицательный супермартингал п.н. сходится, получаем, что X сходится п.н. на множестве $\{A_\infty < \lambda\}$, откуда следует (3). Наконец, из супермартингального свойства Z получаем, что $\mathsf{E}Z_\infty \leqslant \mathsf{E}Z_0 = \lambda$, т.е. $\mathsf{E}X_\infty \mathbb{1}_{\{A_\infty<\lambda\}} \leqslant \mathsf{E}(A_\infty \wedge \lambda)$. Теперь неравенство (4) следует из непрерывности по λ его правой части. $\square$

Достижение равенства в (4)

Из доказательства следует, что при заданном $\lambda > 0$ равенство в (4) имеет место тогда и только тогда, когда одновременно

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_{[\![0,S[\![} \cdot M_\infty = 0, \tag{5}$$

$$X_{S-}\mathbb{1}_{\{S<\infty\}} = 0 \quad \text{п.н.} \tag{6}$$

$$(\lambda - A_{S-})\mathbb{1}_{\{S<\infty\}} = 0 \quad \text{п.н.} \tag{7}$$

Замена времени

Пусть $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$ — согласованный возрастающий процесс. Для $s \geqslant 0$ положим

$$C_s = \inf\{t \geqslant 0 \colon A_t > s\}.$$

Тогда C_s — момент остановки при каждом s и траектории $s \rightsquigarrow C_s$ не убывают и непрерывны справа. Процесс $C = (C_s)$ называется заменой времени, порожденной A.
Напомним, что, если $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ — прогрессивно измеримый случайный процесс, то процесс $\widehat{Y} = \left(Y_{C_t}\right)_{t \geqslant 0}$ называется преобразованием Y с помощью замены времени (C_t). Это определение неявно предполагает, что на множестве $\bigcup_t \{C_t = \infty\} = \{A_\infty < \infty\}$ задана случайная величина Y_∞, и тогда $\widehat{Y}_t = Y_\infty$ для $t \geqslant A_\infty$. В силу доказанного выше утверждения о множестве сходимости $\{X \to\}$, это применимо к процессам X, M и A.

Равенство в (4) в терминах замены времени

Предложение

Пусть X — неотрицательный локальный субмартингал, $X_0 = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) *для любого $\lambda \geqslant 0$*

$$\mathsf{E}X_\infty \mathbb{1}_{\{A_\infty \leqslant \lambda\}} = \mathsf{E}(A_\infty \wedge \lambda);$$

(ii)

$$A_{C_t} = A_\infty \wedge t, \quad X_{C_t} = X_\infty \mathbb{1}_{\{t \geqslant A_\infty\}}, \tag{8}$$

$\left(M_{C_t}\right)_{t\geqslant 0}$ *есть мартингал относительно фильтрации* $\left(\mathscr{F}_{C_t}\right)_{t\geqslant 0}$.

Доказательство опирается на анализ соотношений (5)–(7).

Равенство в (4) для возрастающего X

В случае, когда X — возрастающий процесс, условие для справедливости равенства (2) приобретает простую форму.

Предложение

Для того, чтобы возрастающий процесс X удовлетворял утверждениям (i)–(ii) *из предыдущего предложения, необходимо и достаточно, чтобы X был локально интегрируем и имел вид* (*с точностью до неразличимости*)

$$X = \xi \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![},$$

где T — вполне недостижимый момент остановки, а ξ — неотрицательная $\mathscr{F}_T$-измеримая случайная величина.

Класс (Σ) (Nikeghbali (2006))

Неотрицательный локальный субмартингал X с $X_0 = 0$ принадлежит классу (Σ), если предсказуемый возрастающий процесс A из его разложения Дуба–Мейера п.н. непрерывен и $\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_t>0\}}\,dA_t = 0$ п.н.
Известно и легко проверить, что для локального субмартингала X из класса Σ

$$A = \overline{N}, \quad \text{где} \quad N = -M = A - X.$$

Лемма

Неотрицательный локальный субмартингал X с $X_0 = 0$ лежит в классе (Σ) тогда и только тогда, когда выполнено (8).

Одно из двух ключевых предложений

Предложение

Пусть V и W — случайные величины со значениями в $\mathbb{R}_+$ и $\overline{\mathbb{R}}_+$ соответственно на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, причем $\{W = \infty\} \subseteq \{V = 0\}$ п.н. и

$$\mathsf{E} V \mathbb{1}_{\{W \leqslant \lambda\}} = \mathsf{E}(W \wedge \lambda) \qquad \text{для каждого } \lambda \geqslant 0. \tag{9}$$

Определим $\mathscr{F}_t$ как σ-алгебру подмножеств из $\mathscr{F}$, пересечение которых с множеством $\{W > t\}$ либо пусто, либо совпадает с $\{W > t\}$. Положим

$$X_t := V 1_{\{t \geqslant W\}}, \qquad A_t := W \wedge t.$$

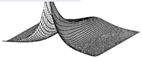
Тогда $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ — $(\mathscr{F}_t)$-согласованный локально интегрируемый возрастающий процесс, $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$ — его $(\mathscr{F}_t)$-компенсатор, и $(X_\infty, A_\infty) = (V, W)$ п.н.

Доказательство.

Элементарно проверяется, что процессы X и A согласованы и, значит, являются возрастающими, причем A предсказуем в силу непрерывности. В наших терминах равенство (9) запишется как $\mathrm{E}X_t = \mathrm{E}A_t$ для каждого $t \geqslant 0$, в частности, X_t интегрируема. Пусть $s < t$. Тогда на множестве $\{W \leqslant s\}$ имеем $X_s = X_t$ и $A_s = A_t$, в силу чего

$$\int_{\{W>s\}} \big((X_t - A_t) - (X_s - A_s)\big)\, d\mathrm{P} = \int_{\Omega} \big((X_t - A_t) - (X_s - A_s)\big)\, d\mathrm{P} = 0.$$

Из определения σ-алгебры $\mathscr{F}_s$ следует, что $\mathrm{E}\big((X_t - A_t) - (X_s - A_s) \big| \mathscr{F}_s\big) = 0$, т.е. $X - A$ — мартингал. $\square$



Когда M есть равномерно интегрируемый мартингал

Замечание

Если в условиях предыдущего предложения $\mathsf{E}|V - W| < \infty$, *то для того, чтобы* $X - A$ *был равномерно интегрируемым мартингалом, необходимо и достаточно выполнение любого из двух эквивалентных условий:*
(1) $\mathsf{E}(V - W) = 0$;
(2) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \mathsf{P}(W > \lambda) = 0$. *Действительно, необходимость первого условия очевидна, а из него аналогично предыдущему выводится, что* $\mathsf{E}\big((X_\infty - A_\infty) - (X_t - A_t)\big|\mathscr{F}_t\big) = 0$ *для каждого* $t \geqslant 0$. *Эквивалентность первого и второго условий легко следует из* (9) *с учетом того, что в данных предположениях* $W < \infty$ *п.н.*

Предложение

Пусть вероятностная мера μ *на* $(\mathbb{R}^2_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2_+))$ *удовлетворяет*

$$\int (x-y)^+ \, \mu(dx,dy) \geqslant \int (y-x)^+ \, \mu(dx,dy), \tag{10}$$

$$\int\limits_{\{y\leqslant\lambda\}} x \, \mu(dx,dy) \leqslant \int (y\wedge\lambda) \, \mu(dx,dy) \qquad \text{для каждого } \lambda \geqslant 0. \tag{11}$$

Тогда найдутся вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *и заданные на нем случайные величины* X, Y, Z, *для которых* $\mathrm{Law}(X,Y) = \mu$, $0 \leqslant Z \leqslant X \wedge Y$, *и*

$$\int\limits_{\{Y-Z\leqslant\lambda\}} (X - Y + \lambda) \, d\mathsf{P} = \lambda \qquad \text{для каждого } \lambda \geqslant 0.$$

Два замечания

Замечание

Если $\int (y+x)\mu(dx,dy) < \infty$, *то условие* (10) *запишется как* $\int x\,\mu(dx,dy) \geqslant \int y\,\mu(dx,dy)$, *в то время как из* (11) *следует противоположное неравенство. Так что* (10) *в этом случае сводится к* $\int x\mu(dx,dy) = \int y\mu(dx,dy) < \infty$.

Замечание

Утверждение гарантирует, что для случайных величин $V := X - Z$ *и* $W := Y - Z$ *выполнены условия предыдущего предложения.*

Моментные неравенства

Пользуясь приведенными результатами, покажем, что из $\mathrm{Law}(V, W) \in \mathbb{W}_+$ вытекают неравенства

$$\mathrm{E}W^p \leqslant p^p \mathrm{E}V^p \quad (p \geqslant 1), \tag{12}$$

$$\mathrm{E}W^p \geqslant p^p \mathrm{E}V^p \quad (0 < p \leqslant 1), \tag{13}$$

причем константы неулучшаемы. Случай $p = 1$ тривиален.

Моментные неравенства: $p > 1$

Пусть $p > 1$. Можно считать, что случайная величина V ограничена (общий случай получается урезанием V). По следствию достаточно рассмотреть случай, когда $\mathrm{Law}(V, W) \in \mathbb{W}_m$, тогда имеем равенство

$$\mathsf{E} V \mathbb{1}_{\{W > \lambda\}} = \mathsf{E}(W - \lambda)\mathbb{1}_{\{W > \lambda\}}$$

при каждом $\lambda \geqslant 0$. Интегрируя обе части этого равенства по $d(p\lambda^{p-1})$ и применяя теорему Фубини, получим

$$\mathsf{E} W^p = p\mathsf{E}(VW^{p-1}).$$

Отсюда, пользуясь ограниченностью V, получаем, в частности, что $\mathsf{E} W^p < \infty$. Доказательство неравенства (12) завершается применением неравенства Гельдера

$$\mathsf{E}(VW^{p-1}) \leqslant \left(\mathsf{E} V^p\right)^{1/p} \left(\mathsf{E} W^p\right)^{1-1/p},$$

Моментные неравенства: $0 < p < 1$

Теперь перейдем к случаю $p \in (0,1)$. Вновь можно считать, что $\mathrm{Law}(V, W) \in \mathbb{W}_m$. Теперь проинтегрируем обе части равенства

$$\mathsf{E} V \mathbb{1}_{\{W \leqslant \lambda\}} = \mathsf{E}(W \wedge \lambda)$$

по $d(-p\lambda^{p-1})$ и применим теорему Фубини, причем воспользуемся тем, что $\{V = 0\} = \{W = 0\}$ п.н. В результате приходим к равенству

$$\mathsf{E} W^p = p\mathsf{E}(VW^{p-1}).$$

Доказательство неравенства (13) завершается применением неравенства Гельдера в следующем виде:

$$\mathsf{E} V^p \leqslant \big(\mathsf{E}(VW^{p-1})\big)^p \big(\mathsf{E}(W^p)\big)^{1-p}.$$

Достижимость

Определим теперь V как случайную величину с квантильной функцией $Q_n(u) = (1-u)^{-1/p} \wedge n$. Зададим квантильную функции $Q_n^*(u)$ случайной величины W, исходя из формулы (2):

$$Q_n^*(u) = \int\limits_0^u \frac{Q_n(t)}{1-t}\,dt = \begin{cases} p[(1-u)^{-1/p} - 1], & \text{если } u \leqslant u_n; \\ p(n-1) + n \ln \frac{1}{n^p(1-u)}, & \text{если } u > u_n. \end{cases}$$

где $u_n := 1 - n^{-p}$. Не составляет труда проверить, что

$$\mathsf{E} V^p = \int_0^1 [Q_n(u)]^p\,du = -\ln(1-u_n) + n^p(1-u_n) = p \ln\, n + 1,$$

$$\begin{aligned} \mathsf{E} W^p &= \int_0^1 [Q_n^*(u)]^p\,du \\ &= p^p \int_0^{u_n} [(1-u)^{-1/p} - 1]^p\,du + \int_0^1 [p(1-n^{-1}) - \ln s]^p\,ds \\ &= p^{p+1} \ln\, n(1+o(1)). \end{aligned}$$

Моментные неравенства — резюме

Итак, неравенства (12)–(13) справедливы для $(V, W) = (X_\infty, A_\infty)$, где X — произвольный неотрицательный субмартингал класса (D) с $X_0 = 0$, A — его компенсатор. Константы не могут быть улучшены, в частности, если ограничиться процессами $X = M^2$ или $X = [M, M]$ с дискретным временем, где M — квадратично интегрируемый мартингал (в обоих случаях $A = \langle M, M \rangle$). В полном объеме это утверждение было доказано в работе Wang (1991). Отметим также, что в случае $p > 1$ схожий пример использовали Dubins & Gilat (1978) для доказательства точности константы в максимальном L^p-неравенстве Дуба.

Спасибо за внимание!