

Интегрируемые полиномиальные динамические системы, задаваемые алгебраическими кривыми

В. М. Бухштабер

отдел геометрии и топологии МИАН
(buchstab@mi.ras.ru)

Общеинститутский семинар
по математике и её приложениям

16 марта 2017 г.

Самыми известными из систем, о которых будет идти речь в докладе, являются динамические системы, приводящие к иерархии Кортвега – де Фриза (см. работы С. П. Новикова и его школы). Эти системы задаются гиперэллиптическими кривыми V рода $g > 0$.

Используя отображение Абеля-Якоби для g -ой симметрической степени кривой V , можно в явном виде записать решения этих систем в гиперэллиптических аналогах функций Вейерштрасса — базисных мероморфных функциях на якобианах кривых V (см. цикл работ В. М. Бухштабера, В. З. Энольского и Д. В. Лейкина).

Задача описания зависимости решения от начальных данных сводится к задаче дифференцирования гиперэллиптических аналогов функций Вейерштрасса по параметрам кривой. Для эллиптических функций Вейерштрасса эта задача была решена Фробениусом и Штикельбергером.

В работах В. М. Бухштабера и Д. В. Лейкина был дан метод решения этой задачи в случае гиперэллиптических аналогов функций Вейерштрасса.

В наших недавних работах с А. В. Михайловым развит метод построения полиномиальных динамических систем на основе k -тых симметрических степеней кривой V (k не обязательно равно g).

Для $k = 2$ дана явная реализация этого метода и описана алгебра Ли дифференцирований решений, включая и дифференцирования по параметрам кривой.

Этот метод привёл к задачам:

- 1 Найти решения построенных динамических систем в функциях на $\mathbb{C}^g$, которые при $k < g$ не являются $2g$ -периодическими, но ограничение этих функций на образ отображения Абеля-Якоби для k -ой симметрической степени кривой рода g является $2g$ -периодическим.
- 2 Найти алгебру Ли операторов, задающих дифференцирования решения, включая дифференцирования по параметрам кривой.

В докладе в явном виде будут представлены интегрируемые полиномиальные динамические системы на $\mathbb{C}^4$, построенные на основе симметрических квадратов гиперэллиптических кривых рода $g > 0$.

При $g = 1$ будет описано решение в классических функциях Вейерштрасса.

При $g = 2$ будет описано решение в двумерном аналоге функций Вейерштрасса и приведена алгебра Ли дифференцирований этих функций по параметрам кривой, полученная в недавней работе автора.

При $g = 3$ описано решение в мероморфных функциях на сигма дивизоре гиперэллиптической кривой рода 3, полученное в недавней работе автора и Takanori Ayano.

Уравнение Кортевега – де Фриза

$$\text{КдФ:} \quad \Phi_t = 6\Phi\Phi_x - \Phi_{xxx}, \quad \text{где } \Phi = \Phi(x, t).$$

$$\begin{aligned} \text{Положим:} \quad x = t_1, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x, \\ t = t_3, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial t} = \partial_t, \quad \Phi = \Phi_2(t_1, t_3). \end{aligned}$$

Тогда имеет место закон сохранения.

$$\text{КдФ:} \quad \partial_3 \Phi_2 = \partial_1 \Phi_4, \quad \text{где } \Phi_4 = 3\Phi_2^2 - \partial_1^2 \Phi_2$$

Пусть $\Phi_2(x + x_0, t) = \Phi_2(x, t)$, тогда $\partial_3 \int_0^{x_0} \Phi_2(x, t) dx = 0$.

Пусть $\Phi_2(x, t + t_0) = \Phi_2(x, t)$, тогда $\partial_1 \int_0^{t_0} \Phi_4(x, t) dt = 0$.

Стационарное уравнение КдФ:

$$\Phi_2''' = 6\Phi_2\Phi_2'.$$

Кольцо псевдодифференциальных операторов

Положим $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$ и $f = f(x)$.

Псевдодифференциальным оператором порядка N называется ряд

$$L = \sum_{k=N}^{-\infty} f_k \partial^k, \quad \text{где} \quad f_k = f_k(x).$$

Умножение в кольце псевдодифференциальных операторов задаётся по правилу умножения рядов Лорана с учетом стандартного правила коммутации

$$[\partial, f] = f',$$

из которого следует

$$[\partial^{-1}, f] = -f' \partial^{-2} + f'' \partial^{-3} - \dots$$

Вычеты псевдодифференциальных операторов

Пусть
$$L = \sum_{k=N}^{-\infty} f_k \partial^k.$$

Функция f_{-1} называется вычетом оператора L и обозначается $\text{res } L$.

Для любых псевдодифференциальных операторов L_1 и L_2 существует дифференциальный полином $Q = Q(L_1, L_2)$ от коэффициентов рядов L_1 и L_2 , такой что $\text{res}([L_1, L_2]) = \partial Q$.

Пример.

$$[f\partial, g\partial^{-1}] = fg + (fg' + f'g)\partial^{-1} + \dots$$

то есть при $L_1 = f\partial$, $L_2 = g\partial^{-1}$ имеем $Q = fg$.

Квадратный корень из оператора Шредингера

$$L = \partial^2 + U.$$

Соотношение $L^{1/2}L^{1/2} = L$ в кольце псевдодифференциальных операторов определяет псевдодифференциальный оператор

$$\begin{aligned} L^{1/2} = (\partial^2 + U)^{1/2} = \partial + \frac{1}{2}U\partial^{-1} - \frac{1}{4}U'\partial^{-2} + \\ + \frac{1}{8}(U'' - U^2)\partial^{-3} - \frac{1}{16}(U''' - 6UU')\partial^{-4} + \dots \end{aligned}$$

Определим псевдодифференциальные операторы

$$L^{k/2} = (L^{1/2})^k, k = 1, 2, 3, \dots$$

Ясно, что

$$[L^{k/2}, L^{l/2}] = 0$$

для любых целых k и l .

Имеем $\text{res } L^q = 0$ и $\text{res } L^{q+1/2}$ — полиномы от $U, \dots, \partial_1^{2q}U$.

Иерархия Кортевега – де Фриза

Положим $t_1 = x + c$, $\partial_k = \frac{\partial}{\partial t_k}$ и

$$L = \partial_1^2 - 2\Phi_2, \text{ где } \Phi_2 = \Phi_2(t_1, \dots, t_{2g-1}), \quad g \geq 1.$$

Имеем: $\Phi_2 = \text{res } L^{1/2}$. Введём полиномы от $\Phi_2, \partial_1 \Phi_2, \dots, \partial_1^{2k} \Phi_2$ по формуле

$$\Phi_{2k+2} = \text{res } L^{k+1/2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Совокупность уравнений (законов сохранения)

$$\partial_{2k+1} \Phi_2 = \partial_1 \Phi_{2k+2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

называется иерархией КдФ.

Пример

$$g = 2,$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(t_1, t_3),$$

$$\partial_3 \Phi_2 = \partial_1 \Phi_4 - \text{уравнение КдФ}$$

$$\partial_5 \Phi_2 = 0 = \partial_1 \Phi_6,$$

$$\text{где} \quad \Phi_4 = 3U^2 + U'',$$

$$\Phi_6 = 10U^2 + 5(U')^2 + 10UU'' + U^{(4)},$$

$$\text{и} \quad U = -2\Phi_2.$$

Интегрируемая полиномиальная динамическая система в $\mathbb{C}^3$

Рассмотрим $\mathbb{C}^3$ с градуированными переменными u_2, u_3, u_4 .
Динамическая система:

$$u_2' = u_3; \quad u_3' = u_4; \quad u_4' = 3u_2u_3.$$

Положим $u_2 = 2\Phi_2$. Получаем, что Φ_2 — решение стационарного уравнения КдФ: $\Phi_2''' = 6\Phi_2\Phi_2'$.

Эта система имеет два полиномиальных интеграла:

$$\lambda_4 = 2u_4 - 3u_2^2; \quad \lambda_6 = u_3^2 + 2u_2^3 - 2u_2u_4.$$

Таким образом мы получаем полиномиальное отображение

$$\pi_1: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2: (u_2, u_3, u_4) \rightarrow (\lambda_4, \lambda_6).$$

Решение задачи Коши

Траектория динамической системы, проходящая через точку (u_2^0, u_3^0, u_4^0) представляет собой эллиптическую кривую

$$V_{\lambda^0} = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2: Y^2 = X^3 + \lambda_4^0 X + \lambda_6^0\},$$

где $\lambda^0 = (\lambda_4^0, \lambda_6^0) = \pi_1(u_2^0, u_3^0, u_4^0)$.

Эта траектория задаётся вложением

$$\varphi: V_{\lambda^0} \rightarrow \mathbb{C}^3: \varphi(X, Y) = (X, Y, \frac{1}{2}(3X^2 + \lambda_4^0)).$$

Векторное поле на кривой V_{λ^0} в координатах (X, Y) имеет вид:

$$\mathcal{L}: Y \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2}(3X^2 + \lambda_4^0) \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Заметим, что

$$\mathcal{L}F(X, Y) = 0, \quad \text{где} \quad F(X, Y) = Y^2 - (X^3 + \lambda_4^0 X + \lambda_6^0).$$

Пусть V_λ — неособая эллиптическая кривая.

Рассмотрим отображение Абеля–Якоби:

$$AJ: V_\lambda \rightarrow \text{Jac } V_\lambda = \mathbb{C}/\Gamma,$$

где Γ — решетка периодов голоморфного дифференциала $\frac{dX}{Y}$ на кривой V_λ .

Отображение AJ задаёт униформизацию кривой V_λ

$$z \rightarrow (X = \wp(z), Y = \wp'(z)),$$

где $\wp(z) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln \sigma(z)$ и $\sigma(z) = \sigma(z; \lambda_4, \lambda_6)$ — целая функция комплексного переменного z , такая что

$$\sigma(z + 2\omega_k) = \exp 2\eta_k(z + \omega_k)\sigma(z),$$

$$\text{и } 2\omega_1 = \oint_a \frac{dX}{Y}; 2\omega_2 = \oint_b \frac{dX}{Y}; 2\eta_1 = \oint_a \frac{-XdX}{Y}; 2\eta_2 = \oint_b \frac{-XdX}{Y}.$$

Следствие.

Решение стационарного уравнения КдФ задаётся двоякопериодической функцией Вейерштрасса $\wp(z)$.

Коммутирующие векторные поля

В наших работах с А. В. Михайловым используется метод построения k -коммутирующих векторных полей на k -ой симметрической степени плоской алгебраической кривой.

Реализация для $k = 2$.

Рассмотрим кривую

$$V_F = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : F(X, Y) = 0\},$$

где $F(X, Y)$ полином от X и Y .

Введём кольцо

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[X_1, Y_1, X_2, Y_2; Z] / \{(X_1 - X_2)Z - 1\}$$

и обозначим через $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ подкольцо

инвариантное относительно инволюции

$$(X_1, Y_1) \leftrightarrow (X_2, Y_2).$$

Общий случай

Положим

$$D_k = F(X_k, Y_k) Y_k \partial_{X_k} - F(X_k, Y_k) X_k \partial_{Y_k}, \quad k = 1, 2,$$

$$L^1 = Z(D_1 - D_2), \quad L^2 = Z(X_2 D_1 - X_1 D_2).$$

Лемма 1.

- ❶ Операторы L^1 и L^2 являются дифференцированиями кольца $\mathcal{A}$ при которых подкольцо $\mathcal{B}$ переходит в себя.
- ❷ $L^q F(X_k, Y_k) = 0$, $q = 1, 2$ и $k = 1, 2$.
- ❸ Действия операторов L^1 и L^2 на кольце $\mathcal{A}$ коммутируют.

Симметрический квадрат плоскости $\mathbb{C}^2$

Рассмотрим $\mathbb{C}^5$

с градуированными координатами $u_2, u_4, v_N, v_{N+2}, v_{2N}$.

Отображение

$$P_1: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^5$$

$$(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \rightarrow (X_1 + X_2, (X_1 - X_2)^2, \\ Y_1 + Y_2, (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2), (Y_1 - Y_2)^2)$$

задаёт вложение $\text{Sym}^2 \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^5$, образом которого является гиперповерхность $\{v_{N+2}^2 - u_4 v_{2N} = 0\}$.

Пусть

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_V^4 &= \{(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \in \mathbb{C}^4 : X_1 - X_2 \neq 0\}, \\ \mathbb{C}_\Lambda^4 &= \{(u_2, u_4, v_{N-2}, v_N) \in \mathbb{C}^4 : u_4 \neq 0\}.\end{aligned}$$

Отображение

$i: \mathbb{C}_\Lambda^4 \rightarrow \mathbb{C}^5: (u_2, u_4, v_{N-2}, v_N) \rightarrow (u_2, u_4, v_N, u_4 v_{N-2}, u_4 v_{N-2}^2)$
является вложением, образ которого лежит в образе при P_1
пространства $\text{Sym}^2 \mathbb{C}^2$.

Далее мы будем отождествлять пространство $\mathbb{C}_\Lambda^4$
с всюду плотным подпространством в $\text{Sym}^2 \mathbb{C}^2$.

Рассмотрим отображение

$$p: \mathbb{C}_V^4 \rightarrow \mathbb{C}_\Lambda^4, \\ (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \rightarrow (u_2, u_4, v_{N-2}, v_N),$$

где $u_2 = X_1 + X_2$, $u_4 = (X_1 - X_2)^2$, $v_{N-2} = \frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2}$, $v_N = Y_1 + Y_2$.
Лемма 2.

- ❶ Отображение p является регулярным двулистным накрытием.
- ❷ $p^{-1}(u_2, u_4, v_{N-2}, v_N) = \{(X_{1,k}, Y_{1,k}, X_{2,k}, Y_{2,k}, k = 1, 2)\}$, где

$$X_{1,k}^2 - u_2 X_{1,k} + \frac{1}{4}(u_2^2 - u_4) = 0, \\ Y_{1,k} = v_{N-2} X_{1,k} + \frac{1}{2}(v_N - u_2 v_{N-2}).$$

- ❸ Отображение p индуцирует мономорфизм колец

$$\mathbb{C}[u_2, u_4, v_{N-2}, v_N, w]/\{u_4 w - 1\} \rightarrow \mathcal{A}$$

образ которого есть кольцо $\mathcal{B}$.

Конструкция полиномиальных динамических систем на $\mathbb{C}^4$, задаваемых гиперэллиптическими кривыми

$$V_\lambda = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : F(X, Y) = Y^2 - P(X) = 0\},$$

$$\text{где } P(X) = X^N + \lambda_2 X^{N-1} + \dots + \lambda_{2N}, \quad N \geq 3.$$

Градуировка:

$$\deg X = 2, \quad \deg Y = N, \quad \deg \lambda_{2k} = 2k.$$

Будем считать коэффициенты $\lambda = (\lambda_{2k})$ полинома $P(X)$ свободными параметрами и все построения будем проводить над кольцом $A_N = \mathbb{C}[y_2, \dots, y_{2N}]$.

В случае $F(X, Y) = Y^2 - P(X)$ имеем

$$D_k = 2Y_k \partial_{X_k} + P'(X_k) \partial_{Y_k}.$$

Коммутирующие операторы L^1 и L^2 имеют градуировку $N - 4$ и $N - 2$, поэтому далее они обозначаются L^{N-4} и L^{N-2} .

Лемма 3.

$$\begin{aligned} L^{N-4}u_2 &= 2v_{N-2}; & L^{N-4}u_4 &= 4v_N; \\ L^{N-2}u_2 &= u_2v_{N-2} - v_N; & L^{N-2}u_4 &= 2(u_2v_N - u_4v_{N-2}). \end{aligned}$$

Для описания действия операторов L^{N-4} и L^{N-2} на v_N введём A_N – линейные операторы, где $A_N = \mathbb{C}[y_2, \dots, y_{2N}]$:

$$K_1^{-2q}: A_N[X] \rightarrow A_N[u_2, u_4] \subset A_N[X_1, X_2], \quad q = 1, 2,$$

такие что

$$K_1^{-4}P(X) = \frac{P'(X_1) - P'(X_2)}{X_1 - X_2}, \quad K_1^{-2}P(X) = \frac{X_1P'(X_2) - X_2P'(X_1)}{X_1 - X_2}.$$

Лемма 4.

$$L^{N-4}v_N = K_1^{-4}P(X), \quad L^{N-2}v_N = -K_1^{-2}P(X).$$

Введём A_N — линейные операторы

$$K_s^{-2q}: A_N[X] \rightarrow A_N[u_2, u_4] \subset A_N[X_1, X_2], \quad q = 0, 1, \quad s = 2, 3,$$

такие что

$$\begin{aligned} K_2^0 P(X) &= X_1 P'(X_2) + X_2 P'(X_1), & K_2^{-2} P(X) &= \frac{1}{2} (P'(X_1) + P'(X_2)), \\ K_3^0 P(X) &= \frac{1}{2} (P(X_1) + P(X_2)), & K_3^{-2} P(X) &= \frac{P(X_1) - P(X_2)}{X_1 - X_2}. \end{aligned}$$

Лемма 5.

Существуют A_N -линейные операторы

$$K^{-2q}: A_N[X] \rightarrow A_N[u_2, u_4] \subset A_N[X_1, X_2], \quad q = 2, 3,$$

такие что

$$K_2^{-2} - K_3^{-2} = u_4 K^{-6}, \quad K_2^0 - u_2 K_3^{-2} = u_4 K^{-4}.$$

Положим

$$\mathcal{F}_{2N-2} = \mathcal{F}_{2N-2}(u_2, u_4, v_{N-2}, v_N) = \frac{F(X_1, Y_1) - F(X_2, Y_2)}{X_1 - X_2},$$

$$\mathcal{F}_{2N} = \mathcal{F}_{2N}(u_2, u_4, v_{N-2}, v_N) = \frac{1}{2} (F(X_1, Y_1) + F(X_2, Y_2)).$$

Лемма 6.

$$\mathcal{F}_{2N-2} = v_{N-2}v_N - K_3^{-2}P(X), \quad \mathcal{F}_{2N} = \frac{1}{4} (v_N^2 + u_4v_{N-2}^2) - K_3^0P(X).$$

Лемма 7.

В кольце $A_N[u_2, u_4, v_{N-2}, v_N]$ имеют место соотношения:

$$u_4[L^{N-4}v_{N-2} - 2K^{-6}P(X)] + 2\mathcal{F}_{2N-2} = 0,$$

$$u_4[L^{N-2}v_{N-2} - K^{-4}P(X) - v_{N-2}^2] - u_2\mathcal{F}_{2N-2} = 0.$$

Основная теорема

Для любого $N \geq 3$ и любого полинома

$$P(X) = X^N + \lambda_2 X^{N-1} + \dots + \lambda_{2N},$$

где $\lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$ — свободные параметры, гиперэллиптическая кривая

$$V_\lambda = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : Y^2 - P(X) = 0\}$$

задаёт две динамические системы L^{N-4} и L^{N-2} на $\mathbb{C}^4$, потоки которых коммутируют.

$$\begin{aligned}
L^{N-4}u_2 &= 2v_{N-2}; & L^{N-4}u_4 &= 4v_N; \\
L^{N-4}v_{N-2} &= 2K^{-6}P(X); & L^{N-4}v_N &= K_1^{-4}P(X).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{N-2}u_2 &= u_2v_{N-2} - v_N; & L^{N-2}u_4 &= 2(u_2v_N - u_4v_{N-2}); \\
L^{N-2}v_{N-2} &= v_{N-2}^2 + K^{-4}P(X); & L^{N-2}v_N &= -K_1^{-2}P(X).
\end{aligned}$$

Полиномы $v_{N-2}v_N - K_3^{-2}P(X)$ и $v_N^2 + u_4v_{N-2}^2 - 4K_3^0P(X)$ являются интегралами потоков L^{N-4} и L^{N-2} .

$$N = 3$$

$$Y^2 = X^3 + \lambda_4 X + \lambda_6.$$

Положим $L_{-1}f = f'$ и $L_1f = \dot{f}$.

Имеем две динамические системы

$$\begin{aligned} u_2' &= 2v_1; & u_4' &= 4v_3; & v_1' &= 1; & v_3' &= 3u_2; \\ \dot{u}_2 &= u_2v_1 - v_3; & \dot{u}_4 &= -2(u_4v_1 - u_2v_3); & \dot{u}_1 &= -u_2 + v_1^2; \\ \dot{u}_3 &= \frac{1}{2}(3u_2^2 - u_4 - 2v_1v_3). \end{aligned}$$

Потоки коммутируют и имеют полиномиальные интегралы:

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= v_1v_3 - \frac{1}{4}(3u_2^2 + u_4); \\ \lambda_6 &= \frac{1}{4}(v_3^2 - 2u_2v_1v_3 + u_2^3 - u_2u_4 + u_4v_1^2). \end{aligned}$$

Регулярное двулистное накрытие

$$p: \mathbb{C}_V^4 \rightarrow \mathbb{C}_\Lambda^4: (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \rightarrow (u_2, u_4, v_1, v_3)$$

приводит к динамическим системам:

$$\begin{aligned} X_1' &= 2 \frac{Y_1}{X_1 - X_2}; & Y_1' &= \frac{3X_1^2 + \lambda_4}{X_1 - X_2}; \\ X_2' &= 2 \frac{Y_2}{X_2 - X_1}; & Y_2' &= \frac{3X_2^2 + \lambda_4}{X_2 - X_1}; \\ \dot{X}_1 &= 2 \frac{X_2 Y_1}{X_1 - X_2}; & \dot{Y}_1 &= \frac{X_2(3X_1^2 + \lambda_4)}{X_1 - X_2}; \\ \dot{X}_2 &= 2 \frac{X_1 Y_2}{X_2 - X_1}; & \dot{Y}_2 &= \frac{X_1(3X_2^2 + \lambda_4)}{X_2 - X_1}. \end{aligned}$$

Системы интегрируются в функциях Вейерштрасса

$$X_1 = \wp(z_1 + z_1^0); \quad Y_1 = \wp'(z_1 + z_1^0); \quad X_2 = \wp(z_2 + z_2^0); \quad Y_2 = \wp'(z_2 + z_2^0),$$

где параметры z_1^0 и z_2^0 определяются начальными данными.

Универсальное расслоение якобианов

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^N$ параметров $(\lambda_2, \dots, \lambda_{2N})$ гиперэллиптических кривых

$$V_\lambda = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2: Y^2 = X^N + \lambda_2 X^{N-1} + \dots + \lambda_{2N}, \quad N \geq 3\}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}_N \subset \mathbb{C}^N$ дискриминантное многообразие, точки которого задают особые кривые. Положим

$$B_N = \mathbb{C}^N \setminus \mathcal{D}_N.$$

Род кривой V_λ , $\lambda \in B_N$, равен $g = [\frac{N}{2}]$.

Проекция $B_N \times \mathbb{C}^g \rightarrow B_N$ разлагается в композицию

$$B_N \times \mathbb{C}^g \rightarrow \mathcal{E}^{N+g} \rightarrow B_N,$$

где $\pi: \mathcal{E}^{N+g} \rightarrow B_N$ — универсальное расслоение, слоем которого над точкой $\lambda \in B_N$ является якобиан $\text{Jac } V_\lambda$ кривой V_λ .

По определению $\text{Jac } V_\lambda = \mathbb{C}^g / \Gamma_\lambda^{2g}$, где Γ_λ^{2g} — решётка $2g$ периодов голоморфных дифференциалов кривой V_λ .

Возьмём базисные голоморфные дифференциалы

$$d_1 = \frac{dX}{Y}, \dots, d_{2g-1} = \frac{X^{g-1}dX}{Y}.$$

Для любого $k \geq 1$ определено отображение Абеля – Якоби

$$\begin{aligned} AJ: \operatorname{Sym}^k V_\lambda &\rightarrow \operatorname{Jac} V_\lambda: AJ([X_1, Y_1, \dots, X_k, Y_k]) = \\ &= \left(\sum_{l=1}^k \int_{\infty}^{(X_l, Y_l)} d_q, \quad q = 1, \dots, g \right). \end{aligned}$$

Следовательно определено комплексное k -мерное многообразие $W_\lambda^k \subset \mathbb{C}^g$ инвариантное относительно сдвигов на $\mathbb{C}^g$ по решётке периодов Γ_λ^{2g} такое, что

$$W_\lambda^k / \Gamma_\lambda^{2g} = \operatorname{Sym}^k V_\lambda \subset \mathbb{C}^g / \Gamma_\lambda^{2g}.$$

В случае $k = 2$ мы описали вложение

$$\mathrm{Sym}^2 \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^5, \quad \mathbb{C}_\Lambda^4 \subset \mathbb{C}^5$$

и регулярное двулистное накрытие

$$p: \mathbb{C}_V^4 \rightarrow \mathbb{C}_\Lambda^4,$$

такие что

$$\mathrm{Imp}(\mathbb{C}_V^4) = \mathbb{C}_\Lambda^4 \cap \mathrm{Sym}^2 \mathbb{C}^2.$$

Используя описание двузначного отображения

$$p^{-1}: (u_2, u_4, v_{N-2}, v_N) \rightarrow \{(X_{1,k}, Y_{1,k}; X_{2,k}, Y_{2,k}), \quad k = 1, 2\}$$

мы получаем, что отображение Абеля–Якоби

$$AJ_2: \mathrm{Sym}^2 V_\lambda \rightarrow \mathrm{Jac} V_\lambda$$

задаёт отображение

$$AJ_\lambda: \mathbb{C}_\Lambda^4 \rightarrow \mathcal{E}^{N+g}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}(W_\lambda^2)$ кольцо мероморфных функций на $\mathbb{C}^g$, ограничения которых на $W_\lambda^2 \subset \mathbb{C}^g$ являются $2g$ -периодическими относительно решётки Γ_λ^{2g} для любого $\lambda \in B_N$.

Задача 1.

Используя отображение AJ_Λ найти решения построенных динамических систем на $\mathbb{C}^4$ в терминах функций из кольца $\mathcal{F}(W_\lambda^2)$.

Пусть $w_1, \dots, w_{2g-1}$ — координаты на $\mathbb{C}^g$, задаваемые голоморфными дифференциалами $d_1, \dots, d_{2g-1}$ на кривой V_λ .

Задача 2.

Найти дифференцирования функций $f(w_1, \dots, w_{2g-1})$ по координатам $w_1, \dots, w_{2g-1}$ и параметрам $\lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$ при которых кольцо функций $\mathcal{F}(W_\lambda^2)$ переходит в себя.

Базисные функции на универсальных расслоениях якобианов

Рассмотрим случай

$$V_\lambda = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2: Y^2 = X^{2g+1} + \lambda_4 X^{2g-1} + \dots + \lambda_{4g+2}\}.$$

На пространстве $\mathbb{C}^g \times B \subset \mathbb{C}^{3g}$ с координатами $(w, \lambda) = (w_1, \dots, w_{2g-1}, \lambda_4, \dots, \lambda_{4g+2})$ имеется целая функция $\sigma = \sigma(w, \lambda)$.

$$\text{Положим} \quad \zeta_k = \partial_k \ln \sigma; \quad \wp_{i;k_1, \dots, k_n} = -\partial_1^i \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_n} \ln \sigma,$$

где $k \in \{1, 3, \dots, 2g-1\}$, $i \geq 0$, $n \geq 0$, $i+n \geq 2$.

Для каждой точки $\lambda \in B$ функции $\wp_{i;k_1, \dots, k_n}$ являются $2g$ -периодическими функциями на $\mathbb{C}^g$ относительно решётки Γ_λ^{2g} . Они задают семейство базисных функций на универсальном расслоении $\mathcal{E} \rightarrow B$.

Обозначим кольцо этих функций через $\mathcal{F}_g$.

Обозначим через $\text{Der } \mathcal{F}_g$ алгебру Ли дифференцирований кольца $\mathcal{F}_g$. Алгебра Ли $\text{Der } \mathcal{F}_g$ является $3g$ -мерным модулем над кольцом $\mathcal{F}_g$.

В работе В. М. Бухштабера и Д. В. Лейкина
“Решение задачи дифференцирования абелевых функций
по параметрам для семейств (n, s) -кривых”,
Функц. анализ и его прил., 42:4 (2008),
дан метод построения образующих алгебры Ли $\text{Der } \mathcal{F}_g$
как $3g$ -мерного модуля над кольцом $\mathcal{F}_g$.

Для $g = 1$ в качестве следствия теоремы
Фробениуса–Штикельбергера получаем:

Образующие алгебры Ли $\text{Der } \mathcal{F}_1$ как 3-х мерного $\mathcal{F}_1$ -модуля:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= 4\lambda_4\partial_{\lambda_4} + 6\lambda_6\partial_{\lambda_6} - w_1\partial_{w_1}, & [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1] &= \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}_1 &= \partial_{w_1}, & [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_2] &= 2\mathcal{L}_2, \\ \mathcal{L}_2 &= 6\lambda_6\partial_{\lambda_4} - \frac{4}{3}\lambda_4^2\partial_{\lambda_6} - \zeta_1\partial_{w_1}, & [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] &= \wp_2\mathcal{L}_1.\end{aligned}$$

Для $g = 2$ см. работу В. М. Бухштабер, “Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега–де Фриза”, Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, 294, МАИК, М., 2016, 191–215.

Образующие алгебры Ли $\text{Der } \mathcal{F}_2$ как 6–мерного $\mathcal{F}_2$ модуля

$$\mathcal{L}_0 = L_0 - w_1 \partial_{w_1} - 3w_3 \partial_{w_3},$$

$$\mathcal{L}_1 = \partial_{w_1}, \quad \mathcal{L}_2 = L_2 + \left(-\zeta_1 + \frac{4}{5} \lambda_4 w_3 \right) \partial_{w_1} - w_1 \partial_{w_3},$$

$$\mathcal{L}_3 = \partial_{w_3}, \quad \mathcal{L}_4 = L_4 + \left(-\zeta_3 + \frac{6}{5} \lambda_6 w_3 \right) \partial_{w_1} - (\zeta_1 + \lambda_4 w_3) \partial_{w_3},$$

$$\mathcal{L}_6 = L_6 + \frac{3}{5} \lambda_8 w_3 \partial_{w_1} - \zeta_3 \partial_{w_3},$$

где операторы L_{2k} , $k = 0, 1, 2, 3$, задаются матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 4\lambda_4 & 6\lambda_6 & 8\lambda_8 & 10\lambda_{10} \\ 6\lambda_6 & 8\lambda_8 - \frac{12}{5}\lambda_4^2 & 10\lambda_{10} - \frac{8}{5}\lambda_4\lambda_6 & -\frac{4}{5}\lambda_4\lambda_8 \\ 8\lambda_8 & 10\lambda_{10} - \frac{8}{5}\lambda_4\lambda_6 & 4\lambda_4\lambda_8 - \frac{12}{5}\lambda_6^2 & 6\lambda_4\lambda_{10} - \frac{6}{5}\lambda_6\lambda_8 \\ 10\lambda_{10} & -\frac{4}{5}\lambda_4\lambda_8 & 6\lambda_4\lambda_{10} - \frac{6}{5}\lambda_6\lambda_8 & 4\lambda_6\lambda_{10} - \frac{8}{5}\lambda_8^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} L_0 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_6 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \partial_{\lambda_4} \\ \partial_{\lambda_6} \\ \partial_{\lambda_8} \\ \partial_{\lambda_{10}} \end{pmatrix}.$$

Коммутирующие соотношения для образующих

$$[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_k] = k\mathcal{L}_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, 6,$$

$$[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = \wp_2 \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3, \quad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_3] = 0,$$

$$[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_4] = \wp_{1;3} \mathcal{L}_1 + \wp_2 \mathcal{L}_3, \quad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_6] = \wp_{1;3} \mathcal{L}_3$$

$$[\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2] = \left(\wp_{1;3} + \frac{4}{5} \lambda_4 \right) \mathcal{L}_1, \quad [\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_6] = \frac{3}{5} \lambda_8 \mathcal{L}_1 + \wp_{0;3,3} \mathcal{L}_3,$$

$$[\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4] = \left(\wp_{0;3,3} + \frac{6}{5} \lambda_6 \right) \mathcal{L}_1 + (\wp_{1;3} - \lambda_4) \mathcal{L}_3,$$

$$[\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4] = \frac{8}{5} \lambda_6 \mathcal{L}_0 - \frac{8}{5} \lambda_4 \mathcal{L}_2 + 2\mathcal{L}_6 - \frac{1}{2} \wp_{2;3} \mathcal{L}_1 + \frac{1}{2} \wp_3 \mathcal{L}_3,$$

$$[\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_6] = \frac{4}{5} \lambda_8 \mathcal{L}_0 - \frac{4}{5} \lambda_4 \mathcal{L}_4 - \frac{1}{2} \wp_{1;3,3} \mathcal{L}_1 + \frac{1}{2} \wp_{2;3} \mathcal{L}_3,$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_6] = & -2\lambda_{10} \mathcal{L}_0 + \frac{6}{5} \lambda_8 \mathcal{L}_2 - \frac{6}{5} \lambda_6 \mathcal{L}_4 + 2\lambda_4 \mathcal{L}_6 - \\ & - \frac{1}{2} \wp_{0;3,3,3} \mathcal{L}_1 + \frac{1}{2} \wp_{1;3,3} \mathcal{L}_3. \end{aligned}$$

Описание алгебры Ли $\text{Der } \mathcal{F}_3$ как g -мерного $\mathcal{F}_3$ -модуля $\text{Der } \mathcal{F}_3$ получено в работе Е. Ю. Буньковой “Differentiation of Genus 3 Hyperelliptic Functions”, arXiv:1703.03947

Во всех этих случаях $g = 1, 2, 3$ на основе теории многомерных сигма-функций

V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin,

“Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications”,

Reviews in Mathematics and Math. Physics, 10:2,

Gordon and Breach, London, 1997, 3–120,

получается явное описание g полиномиальных динамических систем на $\mathbb{C}^{3g}$ потоки которых коммутируют.

Эти потоки имеют $2g$ общих полиномиальных интеграла.

Они эквивалентны иерархии $Kd\Phi$

для функции $\Phi_2(w_1, \dots, w_{2g-1})$.

Интегрирование этих динамических систем в терминах g -мерных аналогов $\wp$ -функций обеспечивается явными униформизирующими отображениями $\mathcal{E}^{3g} \rightarrow \mathbb{C}^{3g}$.

В случае $g = 2$ мы имеем в $\mathbb{C}^6$
с координатами $x_2, x_3, x_4, z_4, z_5, z_6$ динамические системы
задаваемые коммутирующими полями $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_3$.
Положим $\mathcal{L}_1 f = f'$ и $\mathcal{L}_3 f = \dot{f}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad x_2' &= x_3; & x_3' &= x_4; & x_4' &= 4(3x_2x_3 + z_5); \\ z_4' &= z_5; & z_5' &= z_6; & z_6' &= 4(2x_2z_5 + x_3z_4). \end{aligned}$$

Первая система I и условие коммутации полей $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_3$
полностью задают вторую систему II при помощи уравнений:

$$\dot{x}_2 = z_5 = z_4'; \quad \dot{z}_4 = x_3z_4 - x_2z_5.$$

Таким образом

$$x_2''' = x_4' = 4(3x_2x_3 + z_5) = 4(3x_2x_2' + \dot{x}_2).$$

Следовательно, функция $\Phi_2 = 2x_2$ является решением
уравнения Кортевега – де Фриза

$$4\dot{\Phi}_2 = \Phi_2''' - 6\Phi_2\Phi_2'.$$

Униформизирующее отображение

$$\mathcal{E}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6: (w_1, w_3, \lambda_4, \dots, \lambda_{10}) \rightarrow (\wp_2, \wp_3, \wp_4, \wp_{1;3}, \wp_{2;3}, \wp_{3;3})$$

интегрирует системы I и II в терминах
двумерных аналогов функций Вейерштрасса.

Теорема.

Существует кольцевой изоморфизм

$$\varphi: \mathbb{C}[u_2, u_4, v_3, v_5; y_4, y_6] \rightarrow \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4; z_4, z_5, z_6],$$

который переводит

полиномиальную динамическую систему на пространстве $\mathbb{C}_{\Lambda}^4$
в полиномиальную динамическую систему,
построенную на основе теории двумерной сигма функции.

$$u_2 \rightarrow x_2,$$

$$v_3 \rightarrow \frac{1}{2}x_3,$$

$$u_4 \rightarrow x_2^2 + 4z_4,$$

$$v_5 \rightarrow \frac{1}{2}(x_2x_3 + 2z_5),$$

$$y_4 \rightarrow \frac{1}{2}(-6x_2^2 + x_4 - 4z_4),$$

$$y_6 \rightarrow -\frac{1}{4}(-8x_2z_4 + 8x_2^3 - 2x_4x_2 + x_3^2 + 2z_6),$$

$$x_2 \rightarrow u_2,$$

$$x_3 \rightarrow 2v_3,$$

$$x_4 \rightarrow 5u_2^2 + u_4 + 2y_4,$$

$$z_4 \rightarrow \frac{1}{4}(u_4 - u_2^2),$$

$$z_5 \rightarrow v_5 - u_2v_3,$$

$$z_6 \rightarrow 2(u_2y_4 + u_2u_4 - v_3^2 - y_6).$$

Полиномиальные динамические системы, задаваемые кривой

$$V_\lambda = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2: Y^2 = X^7 + \lambda_4 X^5 + \dots + \lambda_{14}\},$$

имеют вид $(y_{2k} = (-1)^k \lambda_{2k})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3^* u_2 &= v_5, & \mathcal{L}_3^* u_4 &= v_7, \\ \mathcal{L}_3^* v_5 &= 3u_4^2 + 35u_2^4 + 42u_2^2 u_4 + 2y_4(u_4 + 5u_2^2) - 4y_6 u_2 + y_8, \\ \mathcal{L}_3^* v_7 &= 14(3u_2^5 + 3u_2 u_4^2 + 10u_2^3 u_4) + 20y_4(u_2 u_4 + u_2^3) - \\ &\quad - 4y_6(u_4 + 3u_2^2) + 6y_8 u_2 - 2y_{10}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_5^* u_2 &= u_2 v_5 - \frac{1}{2} v_7, & \mathcal{L}_5^* u_4 &= u_2 v_7 - 2u_4 v_5, \\
\mathcal{L}_5^* v_5 &= v_5^2 + 14u_2^5 - 18u_2 u_4^2 - 28u_2^3 u_4 - 8y_4 u_2 u_4 + 2y_6(u_2^2 + u_4) - \\
&\quad - 2y_8 u_2 + y_{10}, \\
\mathcal{L}_5^* v_7 &= 35u_2^6 - 63u_2^2 u_4^2 + 35u_2^4 u_4 - 7u_4^3 + 5y_4(3u_2^4 - 2u_2^2 u_4 - u_4^2) - \\
&\quad - 8y_6(u_2^3 - u_2 u_4) + 3y_8(u_2^2 - u_4) - y_{12}.
\end{aligned}$$

Интегралы

$$\begin{aligned} y_{12} = & v_5 v_7 - (7u_2^6 + 35u_2^4 u_4 + u_4^3 + 21u_2^2 u_4^2) - \\ & - y_4(5u_2^4 + u_4^2 + 10u_2^2 u_4) + 4y_6(u_2^3 + u_2 u_4) - \\ & - y_8(3u_2^2 + u_4) + 2y_{10} u_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{14} = & -\frac{1}{4}v_7^2 - u_4 v_5^2 + u_2^7 + 21u_2^5 u_4 + 35u_2^3 u_4^2 + 7u_2 u_4^3 + \\ & + y_4(u_2^5 + 10u_2^3 u_4 + 5u_2 u_4^2) - y_6(u_2^4 + u_4^2 + 6u_2^2 u_4) + \\ & + y_8(u_2^3 + 3u_2 u_4) - y_{10}(u_2^2 + u_4) + y_{12} u_2. \end{aligned}$$

Полиномиальные динамические системы интегрируемые в мероморфных функциях на сигма дивизоре гиперэллиптической кривой рода 3 (работа с Takanori Ayano)

В случае $g = 3$ мы имеем целую функцию $\sigma(w, \lambda)$ на $\mathbb{C}^3 \times B \subset \mathbb{C}^9$, где $w = (w_1, w_3, w_5)$, $\lambda = (\lambda_4, \dots, \lambda_{14})$.
Рассмотрим многообразие

$$(\tilde{\sigma}_\lambda) = \{w \in \mathbb{C}^3 : \sigma(w) = 0\}.$$

Известно, что многообразие $(\tilde{\sigma}_\lambda)$ можно отождествить с многообразием $W_\lambda^2 \subset \mathbb{C}^3$.

Рассмотрим мероморфные функции на $\mathbb{C}^3$.

$$F_2 = -\frac{\sigma_3}{2\sigma_1}, \quad F_4 = \frac{\sigma_3^2}{4\sigma_1^2} - \frac{\sigma_5}{\sigma_1}, \quad F_5 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{33}}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} \frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2} - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \frac{\sigma_{13}}{\sigma_1},$$

$$F_7 = \frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2} \frac{\sigma_{13}}{\sigma_1} - \frac{\sigma_{13}}{\sigma_1} \frac{\sigma_5}{\sigma_1} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} \frac{\sigma_3^3}{\sigma_1^3} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \frac{\sigma_5}{\sigma_1} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \frac{\sigma_{33}}{\sigma_1} + \frac{\sigma_{35}}{\sigma_1} - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \frac{\sigma_{15}}{\sigma_1}.$$

Введём дифференцирования поля мероморфных функций на $\mathbb{C}^3$:

$$L_3^* = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \partial_1 - \partial_3, \quad L_5^* = -\frac{\sigma_5}{\sigma_1} \partial_1 + \partial_5.$$

Лемма.

$$[L_3^*, L_5^*] = 0.$$

Введём на $\mathbb{C}^4$ с координатами F_2, F_4, F_5, F_7
полиномиальные динамические системы

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3^* F_2 &= F_5, & \mathcal{L}_3^* F_4 &= F_7, \\ \mathcal{L}_3^* F_5 &= 3F_4^2 + 35F_2^4 + 42F_2^2 F_4 + 2y_4(F_4 + 5F_2^2) - 4y_6 F_2 + y_8, \\ \mathcal{L}_3^* F_7 &= 14(3F_2^5 + 3F_2 F_4^2 + 10F_2^3 F_4) + \\ &\quad + 20y_4(F_2 F_4 + F_2^3) - 4y_6(F_4 + 3F_2^2) + 6y_8 F_2 - 2y_{10},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_5^* F_2 &= F_2 F_5 - \frac{1}{2} F_7, & \mathcal{L}_5^* F_4 &= F_2 F_7 - 2F_4 F_5, \\ \mathcal{L}_5^* F_5 &= F_5^2 + 14F_2^5 - 18F_2 F_4^2 - 28F_2^3 F_4 - \\ &\quad - 8y_4 F_2 F_4 + 2y_6(F_2^2 + F_4) - 2y_8 F_2 + y_{10}, \\ \mathcal{L}_5^* F_7 &= 35F_2^6 - 63F_2^2 F_4^2 + 35F_2^4 F_4 - 7F_4^3 + 5y_4(3F_2^4 - 2F_2^2 F_4 - F_4^2) - \\ &\quad - 8y_6(F_2^3 - F_2 F_4) + 3y_8(F_2^2 - F_4) - y_{12}.\end{aligned}$$

Интегралы

$$\begin{aligned} y_{12} = & F_5 F_7 - (7F_2^6 + 35F_2^4 F_4 + F_4^3 + 21F_2^2 F_4^2) - \\ & - y_4(5F_2^4 + F_4^2 + 10F_2^2 F_4) + 4y_6(F_2^3 + F_2 F_4) - \\ & - y_8(3F_2^2 + F_4) + 2y_{10} F_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{14} = & -\frac{1}{4}F_7^2 - F_4 F_5^2 + F_2^7 + 21F_2^5 F_4 + 35F_2^3 F_4^2 + 7F_2 F_4^3 + \\ & + y_4(F_2^5 + 10F_2^3 F_4 + 5F_2 F_4^2) - y_6(F_2^4 + F_4^2 + 6F_2^2 F_4) + \\ & + y_8(F_2^3 + 3F_2 F_4) - y_{10}(F_2^2 + F_4) + y_{12} F_2. \end{aligned}$$

Теорема.

Кольцевой изоморфизм

$$\psi: \mathbb{C}[u_2, u_4, v_3, v_5] \rightarrow \mathbb{C}[F_2, F_4, F_5, F_7]: u_k \rightarrow F_k,$$

переводит

полиномиальную динамическую систему на пространстве $\mathbb{C}_\Lambda^4$
в полиномиальную динамическую систему,
построенную на основе теории трёхмерной сигма функции.