

О ВЕРОЯТНОСТИ ВЗАИМНОЙ ПРОСТОТЫ ДВУХ НАУГАД ВЫБРАННЫХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

(Задача Чебышева в исторической
перспективе.)

С.М. Абрамович, Я.Ю. Никитин

6 апреля 2017

Одной из самых известных математических задач **на стыке теории чисел и теории вероятностей** является задача:

Какова вероятность того, что два наугад выбранных натуральных числа взаимно просты?

Например, в знаменитом учебнике по теории чисел Харди и Райта (1975, 4 изд.) - это теорема 332.

Эту задачу в России часто называют *Задачей П.Л. Чебышева*. Сам Чебышев, по отзывам его учеников, рассказывал ее на своих лекциях в эквивалентной форме:

Определить вероятность несократимости рациональной дроби, числитель и знаменатель которой написаны наудачу.



Figure 1 : П.Л.Чебышев (1821 - 1894).

Эту задачу долгое время независимо решали многие выдающиеся математики. Нам кажется интересным попытаться выяснить, откуда появилась Задача, **кто первый ее поставил и кто первый решил.**

Кроме того, мы кратко опишем подходы к ее постановке и решению и, наконец, затронем ее **многочисленные обобщения и близкие по духу задачи.**

Рассматриваемая Задача понималась разными математиками по-разному, различались по степени строгости и ее решения, приводившие, конечно, к известному ответу $6/\pi^2$.

Мы кратко наметим их, выделяя:

- 1) Подход со стороны аналитической теории чисел
- 2) Подход со стороны алгебраической теории чисел
- 3) Теоретико-вероятностный подход:
а) эвристический, б) строгий

С точки зрения аналитической теории чисел можно взять большое натуральное n и рассмотреть все возможные пары от 1 до n :

$$B_n = \{\{i, k\} : 1 \leq i < k \leq n\},$$

а затем выбрать из них множество **взаимно простых** пар

$$A_n = \{\{i, k\} : 1 \leq i < k \leq n, \text{НОД}(i, k) = 1\}.$$

Тогда вероятность P взаимной простоты двух чисел, взятых случайно, разумно определить как **предел (если он существует!)**

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{|B_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|A_n|}{n(n-1)}.$$

Важно подчеркнуть, что вероятность **заменяется** здесь асимптотической, или натуральной плотностью на множестве пар, которая не счетно-аддитивна. Довольно ясно, что

$$|A_n| = \sum_{k=2}^n \varphi(k), \text{ где } \varphi - \text{функция Эйлера.}$$

Асимптотику $|A_n|$ впервые нашел Дирихле в 1849 г.

Было доказано, что $|A_n| \sim \frac{3}{\pi^2} n^2$, $n \rightarrow \infty$, откуда, наконец, следует известный результат

$$P = 6/\pi^2 \approx 0.607927\dots$$

Позже это решение было усовершенствовано многими известными математиками, о чем речь впереди.



Figure 2 : П. Г. Лежен-Дирихле (1805 - 1859).

Иной **строгий** теоретико-числовой подход к Задаче основан на алгебраической теории чисел. Здесь ключевую роль играет *кольцо конечных целых аделей* $\hat{\mathbb{Z}}$, которое является компактификацией $\mathbb{Z}$.

Оказывается, что $\mathbb{Z}$ является плотным подкольцом $\hat{\mathbb{Z}}$, а на последнем существует единственная **вероятностная мера** Хаара, поэтому применимы все результаты теории вероятностей.

Тогда ответ в Задаче получается из **ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ** в расширенном вероятностном пространстве, см. работы Сугиты и его соавторов 2002 - 2003 гг. Этот подход восходит к **Е.В.Новоселову (1962)** и развивался позже многими последователями.

Теоретико-вероятностный подход основан на **эвристическом соображении**, что вероятность делимости наугад выбранного натурального числа на простое p есть $1/p$ и что вероятность того, что два наугад взятых числа делятся на p - **по независимости** - равна $1/p^2$.

Тогда вероятность того, что наши числа **НЕ ДЕЛЯТСЯ ОБА** на p - это $1 - 1/p^2$, и снова предполагая **независимость**, мы приходим для плотности/вероятности **взаимной простоты чисел/несократимости дроби** к величине $P = \prod_p (1 - 1/p^2)$.

Остается воспользоваться знаменитым тождеством Эйлера (Петербург, 1737)

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6, \quad (1)$$

чтобы снова получить тот же результат.

Таким путем шли многие выдающиеся математики, решавшие или излагавшие нашу Задачу, включая самого Чебышева и его учеников.

Многие из них, впрочем, ощущали нестрогость своих рассуждений и делали в лекциях или работах соответствующие оговорки.

Этот способ решения Задачи можно сделать строгим. Для этого **независимость событий, связанных с делимостью чисел, строго доказывается** в рамках подходящих вероятностных пространств, и потому классический метод получает обоснование. Найденный выше ответ $6/\pi^2$ становится теперь вероятностью.

Строгие рассуждения такого рода появились в настоящее время в монографиях и учебниках, например, в

Chaumont L., Yor M. (2003). *Exercises in Probability*, Cambridge,
Pinsky, R. G. (2014). *Problems from the Discrete...*, Springer, NY,
которым предшествовала замечательная книга М.Каца

Кас, М. (1959). *Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory*. The Mathematical Association of America.

Вернемся к "задаче Чебышева" и ее обсуждению в России.
Крупнейший русский математик А.М. Ляпунов



Figure 3 : А.М. Ляпунов (1857 - 1918).

посещал лекции Чебышева в 1879 - 80 гг. и записывал их.

Чебышев П.Л. Теория вероятностей. Лекции, читанные в 1879 - 80 гг. По записи А.М. Ляпунова изданы академиком А.Н. Крыловым. Изд-во АН СССР. М.-Л., 1936.

Видно, что Чебышев решал Задачу на эвристическом уровне и ни на кого не ссылался. Поэтому термин "задача Чебышева" стал устойчивой частью русского математического фольклора.

Другой выдающийся ученик Чебышева А.А. Марков в курсе лекций 1913 г. повторяет решение Чебышева. Он оговаривает необходимость точного определения случайного выбора, но почти его не обсуждает.



Figure 4 : A.A. Марков (1856 - 1922).

Эвристические рассуждения Чебышева и Маркова были подвергнуты в 1928 г. серьезной критике С.Н. Бернштейном.

Он указывает: "... в этой задаче следует определять не вероятности, которые мы никогда не станем экспериментально определять, а предельные или асимптотические частоты чисел определенного класса, закономерно распределенных в указанных последовательностях. Эти предельные частоты представляют известные аналогии с математическими вероятностями, эвристически весьма ценные для теории чисел, но смешение этих двух понятий является недопустимым недоразумением."

Бернштейн С.Н. Современное состояние теории вероятностей и ее приложений, 1928.// Собр. соч. С.Н.Бернштейна, 1964, т. 4, М., Гостехиздат, 217 - 232.



Figure 5 : С.Н. Бернштейн (1880 - 1968).

В учебнике Маркова 1913 г. есть ссылка на лекции Кронекера, читавшиеся в Берлине после 1862 г. Кронекер **учился у Дирихле и слушал его лекции в 1841 - 43 гг.** В лекции 24 Кронекер подробно и строго доказывает существование предела плотности множества несократимых пар **и находит, возможно, впервые строго** известное нам значение **$6/\pi^2$.**



Figure 6 : Л. Кронекер (1823 - 1891).

Кроме того, он приводит вероятностное - быстрое, но нестрогое - решение Задачи, которое слышал от Дирихле на лекциях.

Пусть w - это вероятность взаимной простоты двух наугад выбранных i и k . Рассмотрим близкую вероятность w_t того, что НОД i и k равен $t \geq 1$. Из соображений масштаба следует, что исходное множество пар больше, чем последнее множество в t^2 раз. Поскольку любая пара натуральных чисел имеет общий множитель, то $\sum_t w_t = 1$, откуда снова

$$w = 1 / \sum_t t^{-2} = 6/\pi^2.$$

Далее, Кронекер критикует Дирихле за априорное предположение о пределе изучаемой вероятности. Он пишет "Дирихле доказывает, что если он существует, то он обязан быть равен $6/\pi^2$," и отмечает, что его доказательство свободно от этого недостатка.

Впрочем, Дирихле с 1849 г. владел асимптотикой суммы значений функции Эйлера $\sum_{k=2}^n \varphi(k)$ и вполне вероятно, что располагал строгим доказательством, а приведенное выше приводил для краткости, не обращая внимания на детали. Кроме того, он вообще интересовался теорией вероятностей.

С другой стороны, Чебышев читал лекции по ТВ в Петербурге с 1860 г. после Буняковского. По-видимому, Дирихле узнал и решал Задачу существенно раньше. Кроме того, в 1852 г. Чебышев был полгода на Западе и, в частности, встречался с Дирихле. Кто знает, не от него ли он узнал о Задаче?

"Задачу Чебышева" параллельно и, по-видимому, независимо решали и публиковали решения многие крупные математики. Например, решение в духе решения Дирихле опубликовал в 1881-1884 гг. тогда очень молодой Чезаро (Mathesis 1, 3, 4).

Напротив, Сильвестр опубликовал решение, основанное на изучении асимптотики суммы значений функции Эйлера, в то же время, но уже в конце своей карьеры (C. R. Acad. Sci. Paris XCVI (1883), 409-413.)



Figure 7 : Э. Чезаро (1859 - 1906).



Figure 8 : Дж. Сильвестр (1814 - 1897).

"Задачу Чебышева" решали и в 20 веке. Вот история из автобиографии Р. Беллмана, в которой участвуют также весьма известные имена Г. Шапиро, И. Каплански и П. Эрдеш. Никто из них не подозревал о трудах своих предшественников.



Figure 9 : Р. Беллман (1920 - 1984).

В виде фантастической (на первый взгляд) гипотезы можно предположить, что Дирихле узнал о Задаче и ее решении от Гаусса. **Возможно, Гаусс и поставил Задачу.** Во всяком случае, Дирихле и Гаусс несколько раз встречались (1827, 1828, 1849) и переписывались. Мы еще вернемся к этому.



Figure 10 : К.-Ф. Гаусс (1777-1855).

Хорошо известно, что Гаусс не всегда публиковал то, что знал (неевклидова геометрия, метод наименьших квадратов, кватернионы). Есть легенда о разработке Гауссом теории эллиптических функций до Якоби. Оправдание этому - на печати Гаусса, где написано по латыни "Pauca sed matura", то есть "Немногое, но зрелое".



Figure 11 : Печать Гаусса.

Немного об обобщениях Задачи и задачах со сходными формулировками.

В начале 20 в. Э. Ландау поставил вопрос: **какова вероятность выбрать наугад простое число ?** (понимая под вероятностью асимптотическую плотность.) Поскольку к тому времени Адамаром и Валле-Пуссенем было доказано, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) \ln x / x = 1,$$

то ответ на этот вопрос - нуль.

Этот ответ **мог бы получить и Чебышев** на основе его знаменитых двусторонних оценок для $\pi(x)$.

Близкая задача - вычислить плотность/вероятность случайного выбора числа **свободного от квадратов**. Ответ был получен Гегенбауэром в 1885 г., это снова $6/\pi^2$. Есть объяснения (на физическом уровне строгости), почему эти вероятности совпадают, см. Шредер (2009).

Более далекое обобщение состоит в нахождении плотности чисел, **свободных от кубов, четвертых степеней и т.д. вплоть до так называемых n - свободных чисел**. Эта задача также была решена Гегенбауэром в 1885 г. и ответ в ней равен $1/\zeta(n)$, где $\zeta(s)$ — обычная дзета-функция. Более современное изложение - в статье Эвелин и Линфут (1931).

Естественное обобщение Задачи - найти плотность/вероятность того, что $k > 2$ случайно выбранных натуральных чисел взаимно просты. Ответ $1/\zeta(k)$ известен, Лемер (1900).

Похожая задача о попарной взаимной простоте k случайно выбранных натуральных чисел пока решена только при $k = 3$ с ответом

$$Q_3 = \frac{36}{\pi^4} \prod_p \left(1 - \frac{1}{(p+1)^2} \right) = 0.286747...$$

(Финч (2003)).

Можно задаться вопросом, что изменится, если выбирать **только среди нечетных чисел**. Тогда плотность/вероятность взаимной простоты пары таких чисел повышается до $8/\pi^2$, Pieprzyk, Hardjono and Seberry (2013).

В работе Хафнера, Сарнака и Мак Керли (1993) вычисляется "вероятность" взаимной простоты **определителей двух случайно выбранных матриц размера n с целыми элементами**. Ответ, $\Delta(n)$, выглядит так:

$$\Delta(n) = \prod_p \left[1 - \left(1 - \prod_{k=1}^n (1 - p^{-k}) \right)^2 \right].$$

Значение $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(n)$ было приближенно вычисленно Варди (1991) и равно 0.353236... .

Есть обобщения Задачи на другие алгебраические структуры. Кольцо гауссовых целых чисел состоит из элементов $a + bi$, где a и b целые. Предположим, что **два гауссовых числа выбираются наугад и нас интересует их взаимная простота**. Точная постановка - Коллинс и Джонсон (1989). Ответ в этой задаче $6/(\pi^2 G) = 0.663700\dots$, где G - это **константа Каталана**.

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 0.915965\dots$$

Для общих числовых полей можно рассматривать **взаимную простоту идеалов** в кольце целых элементов поля, ответ выражается через **дзета-функцию Дедекинда поля**.

Пусть $f(n)$ - функция "не сохраняющая арифметические свойства n ." Гипотеза Эрдеша и Лоренца (1958): для таких функций

$$d(\{n \in \mathbb{N} : (n, \lfloor f(n) \rfloor) = 1\}) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Ватсон(1953): $f(n) = n\alpha$, α иррационально;
Эрдеш и Лоренц (1958): f дифференцируема и сублинейна;
Дельмер и Дезуйе (2002): f - нецелая степень n или нецелая степень $\log n$;
Бергельсон и Рихтер (2016): f из поля Харди + ограничения на рост, например,

$$\log \log(n), \exp(n), \Gamma(n), \log(n!), Li(n), \dots$$

Интересно мнение о Задаче и ее истоках В. И. Арнольда, одного из крупнейших математиков современности. В 2003 г. он прямо заявил, что **Задача и ее решение - теорема ... Гаусса!**



Figure 12 : В.И. Арнольд (1937 - 2010).

В других публикациях (2005, 2015) Арнольд пишет, что вероятность была вычислена Гауссом, а опубликована Дирихле. Он не исключает, что **результат был известен Эйлеру**, а позже был доказан Гауссом. Он даже полагает, что результат был найден Эйлером экспериментально, за счет подсчета точек с несократимыми компонентами в больших кругах, причем по ходу дела Эйлер разработал **теорию дзета-функций, теорию рядов Фурье (частично) и начала теории градуированных алгебр и их рядов Пуанкаре**.

Все это невероятно, потрясающе интересно!! К сожалению, знаменитый автор не дал ссылок в поддержку этих необыкновенных утверждений. Но это согласуется с названием недавней книги об Эйлере, автор W. Dunham

Euler: The master of us all.



Figure 13 : Л. Эйлер (1707 - 1783).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По-видимому, Чебышев не был первым, кто поставил "задачу Чебышева" и дал ее эвристическое решение, но вполне возможно, что он пришел к этому независимо, как и Чезаро, Сильвестр, Беллман и многие другие.

По нашему мнению, приоритет следует отдать Дирихле, а может быть, даже Гауссу.

Было бы исключительно интересно, следуя утверждениям Арнольда, найти следы Задачи в обширном математическом наследии Гаусса и Эйлера.

Подробности и точные литературные ссылки можно найти в статье авторов в АрХиве:

<http://arxiv.org/pdf/1608.05435.pdf>

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers (4th ed.). Oxford, 1975. 421 p.
- [2] Tenenbaum G. Introduction to analytic and probabilistic number theory. New York, Cambridge University Press, 1995. 448 p.
- [3] Dirichlet P. Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie.// Abhandl. Kgl. Preuss. Acad. Wiss., Berlin, 1849, P. 69 – 83.
- [4] Dirichlet P. Werke, 2, 1897, Berlin, P. 60 – 64.
- [5] Mertens F. Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie.// J. reine und angew. Mathem. 77(1874), P. 289 – 338.
- [6] Sylvester J. J. Sur le nombre de fractions ordinaires inégales qu'on peut exprimer en se servant de chiffres qui n'excèdent pas un nombre donné. // C. R. Acad. Sci. Paris 96, 1883, P. 409 – 413.
- [7] Kronecker L. Vorlesungen ueber Mathematik, Teil 2, Abschnitt 1 (Vorlesungen ueber Zahlentheorie), Bd. 1(1901). Berlin - Heidelberg, Springer. 346 p.
- [8] Apostol T. M. Introduction to Analytic Number Theory. New York, Springer, 1976. 338 p.

- [9] Knuth D. E. The Art of Computer Programming: Seminumerical Algorithms, v. 2. Reading, MA: Addison-Wesley, 1981. 761 p.
- [10] Kubota H., Sugita H. Probabilistic proof of limit theorems in number theory by means of adeles. // Kyushu J. of Math., 56, 2002, P. 391 – 404.
- [11] Sugita H., Takanobu S. The probability of two integers to be co-prime, revisited - on the behavior of CLT-scaling limit. // Osaka J. Math. 40, 2003, P. 945 – 976.
- [12] Новоселов Е.В. Новый метод в вероятностной теории чисел. // Изв. АН СССР. Сер. матем., 28, 1964, С. 307 – 364.
- [13] Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Задачи по комбинаторике и теории вероятностей. М., ГИТТЛ, 1954. 545 с.
- [14] Schroeder M. Number Theory in Science and Communication: With Applications in Cryptography, Physics, Digital Information, Computing, and Self-Similarity. New York: Springer, 2009. 430 p.
- [15] Pinsky R. G. Problems from the Discrete to the Continuous: Probability, Number Theory, Graph Theory, and Combinatorics. New York: Springer, 2014.
- [16] Кас М. Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory. The Carus Mathematical Monographs, N 12. Rahway, NJ: The Mathematical Association of America, 1959. 152 p.

- [17] Чебышев П.Л. Теория вероятностей. Лекции, читанные в 1879 - 80 гг. По записи А.М. Ляпунова изданы академиком А.Н. Крыловым. Изд-во АН СССР. М.-Л., 1936. 261 с.
- [18] Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике, Изд-во Ленингр. ун-та, 1967. 332 с.
- [19] Свешников А. А. и др. (ред.). Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: Учебное пособие. Ц Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. 632 с.
- [20] Жуков А.В. Вездесущее число "пи". М., Едиториал УРСС, 2004. 216 с.
- [21] Марков А.А., Исчисление вероятностей. 3-е изд., СПб, 1913. 388с.
- [22] Бернштейн С.Н. Современное состояния теории вероятностей и ее приложений, 1928.// Собрание сочинений С.Н.Бернштейна, 1964, т. 4, М., Гостехимиздат, 217 - 232. 578 с.
- [23] Прудников В.Е. Пафнутий Львович Чебышчв, 1821-1894. Москва: Наука, 1976. 283 с.
- [24] Seneta E. Pafnutii Lvovich Chebyshev (or Tchebichef). Statisticians of the Centuries, Heyde C.C., Seneta E., Crepel P., Fienberg S.E., Gani J. (Eds.), P. 176 – 180. New York: Springer, 2001.

- [25] Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers (6th ed.). Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman. With a foreword by A. Wiles. Beijing, Posts and Telecommunications Press, 2008. 621 p.
- [26] Dickson L. E. History of the Theory of Numbers, Vol.1: Divisibility and Primality. New York, Chelsea. 486 p.
- [27] Fischer H. Dirichlet's contributions to mathematical probability theory.// Historia Mathematica 21, 1994, P. 39 – 63.
- [28] Cesàro E. Question proposée 75.// Mathesis 1, 1881, P. 184.
- [29] Cesàro E. Question 75 (Solution).// Mathesis 3, 1883, P. 224-225.
- [30] Cesàro E. Probabilité de certains faits arithmétiques.// Mathesis 4, 1884, P. 150-151.
- [31] Abrams A. D., Paris M. T. The probability that $(a, b) = 1$. // The College Mathematics Journal, 23, 1992, P. 47.
- [32] Yaglom A. M., Yaglom I. M. Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions. Vol. I & II, New York, Dover, 1987. 442 P.

- [33] Bundschuh P. Einfuehrung in die Zahlentheorie, 6 Auflage, Berlin, Springer-Verlag, 2008. 336 p.
- [34] Bellman R. Eye of the Hurricane. An Autobiography. Singapore, World Scientific, 1984. 344 p.
- [35] Elstrodt J. The life and work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). // Analytic Number Theory, Clay Mathematics Proceedings 7, P.1-37. Providence, American Mathematical Society, 2007.
- [36] Choi Y. Re: Jacobi and Gauss. [Blog comment, 2011, Jan. 25)]. Retrieved from <https://ifwisdomwereteachable.wordpress.com/2011/01/25/lesprit-descalier/>
- [37] Kranakis E., Pocchiola M. Camera placement in integer lattices.// Discrete and Computational Geometry, 12, 1994, P. 91 – 104.
- [38] Pieprzyk J., Hardjono T., Seberry J. Fundamentals of Computer Security. Berlin: Springer, 2013. 664 p.
- [39] Lehmer D. N. Asymptotic evaluation of certain totient sums.// Amer. J. of Math. 22, 1900, P. 293 – 335.

- [40] Nymann J. E. On the probability that k positive integers are relatively prime. // J. of Number Theor. 4, 1972, P. 469 – 473.
- [41] Finch S. R. Mathematical Constants. Cambridge University Press, New York, 2003. 602 p.
- [42] Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig and Berlin: BG Teubner, 1909. 596 p.
- [43] Gegenbauer L. Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. // Denkschriften Akad. Wiss. Wien, 49, 1885, P. 37 – 80.
- [44] Evelyn C. J. A., Linfoot E. H. On a problem in the additive theory of numbers. // Ann. Math., 32, 1931, P. 261 – 270.
- [45] Hafner J. L., Sarnak P., McCurley K. Relatively prime values of polynomials. // In: Tribute to Emil Grosswald: Number Theory and Related Analysis (M. Knopp and M. A. Seingorn, eds.), P. 437 – 444. Providence: American Mathematical Society, 1993.
- [46] Vardi I. Computational Recreations in Mathematica. Boston, Addison-Wesley, 1991. 285 p.
- [47] Flajolet P., Vardi I. Zeta Function Expansions of Classical Constants, 1996. Available at <http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/FIVa96.pdf>

- [48] Collins G. E., Johnson J. R. The probability of relative primality of Gaussian integers. In: Symbolic and Algebraic Computation, Proceedings of International Symposium ISSAC 1988, (P. Gianni, ed.) Lect. Notes in Comp. Sci. 358(1988), P. 252 – 258. New York: Springer, 1989.
- [49] Арнольд В.И. Новый обскурантизм и Российское просвещение. М., Фазис, 2003. 60 С. Доступно на сайте <http://www.mccme.ru/edu/viarn/obscur.htm>.
- [50] Арнольд В.И. Группы Эйлера и арифметика арифметических прогрессий. М., МЦНМО, 2003. 44 с.
- [51] Арнольд В.И. Экспериментальная математика. Москва, Фазис, 2005. 64 с.
- [52] Dunham W. Euler: The master of us all. Washington D.C.: Mathematical Association of America, 1999. 185 P.