Дифференциальные игры. Некоторые постановки и результаты

Юрий Авербух

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
ayv@imm.uran.ru

7 апреля 2017

Дифференциальные игры

- предложены: R. Isaacs;
- подходы к решению: R.Isaacs, Л.С. Понтрягин, Б.Н. Пшеничный, A. Friedman;
- строгая теория: Н.Н. Красовский, А.И. Субботин, R.J. Elliott, N. Kalton, P.Varaja, J. Lin и многие другие

Игры преследования

- Преследователь P:
  - положение: $x_P(t)$;
  - управление u.
- Убегающий E:
  - положение: $x_E(t)$;
  - управление v.

Цели

- Задача качества (наведения к моменту): преследователь стремится выбрать управление $u(t, x_P, x_E)$ так, чтобы для какого-то момента t ($t \in [0, T]$) $\|x_P(t) - x_E(t)\| \leq A$.
- Задача качества (наведения в момент): преследователь стремится выбрать управление $u(t, x_P, x_E)$ так, чтобы в заданный момент T $\|x_P(T) - x_E(T)\| \leq A$.
- Задача быстродействия: преследователь стремится выбрать управление $u(t, x_P, x_E)$ так, чтобы обеспечить неравенство $\|x_P(T) - x_E(T)\| \leq A$ в самый ранний момент T.

Задача степени

Преследователь стремится к тому чтобы в заданный момент T

1. расстояние от него до убегающего было минимальным;
2. преследователь потратил бы минимальную энергию;
3. убегающий потратил бы максимальную энергию.

$$
\lambda_1 \|x_P(T) - x_E(T)\|^2 + \lambda_2 \int_0^T \|u(t)\|^2 dt - \lambda_3 \int_0^T \|v(t)\|^2 dt \to \min_{u(\cdot)} / \max_{v(\cdot)} .
$$

Безынерционные объекты

- Преследователь P: $\dot{x}_P = u$, $\|u\| \leq a$.
- Убегающий E: $\dot{x}_E = v$, $\|v\| \leq b$.
- Общая система:
$$\dot{x} = u - v.$$

Мальчик и крокодил

- Преследователь (крокодил):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,P} &= x_{3,P}, \\ \dot{x}_{2,P} &= x_{4,P}, \\ \dot{x}_{3,P} &= u_1, \\ \dot{x}_{4,P} &= u_2, \end{aligned}$$

  $|u_1|^2 + |u_2|^2 \leq a^2$;
- Убегающий (мальчик):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,E} &= v_1, \\ \dot{x}_{2,E} &= v_2, \end{aligned}$$

  $|v_1|^2 + |v_2|^2 \leq b^2$.

Мальчик и крокодил

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 - v_1,\\ \dot{x}_2 &= x_4 - v_2,\\ \dot{x}_3 &= u_1,\\ \dot{x}_4 &= u_2,\end{aligned}$$

$$|u_1|^2 + |u_2|^2 \leq a^2,\ |v_1|^2 + |v_2|^2 \leq b^2.$$

Шофер-убийца

- Преследователь (шофер):

$$
\begin{array}{rcl}
\dot{x}_{1,P} & = & w\cos(x_3), \\
\dot{x}_{2,P} & = & w\sin(x_3), \\
\dot{x}_{3,P} & = & u,
\end{array}
$$

  $|u| \leq a$;
- Убегающий:

$$
\begin{array}{rcl}
\dot{x}_{1,E} & = & v_1, \\
\dot{x}_{2,E} & = & v_2,
\end{array}
$$

  $|v_1|^2 + |v_2|^2 \leq b^2$.

Шофер-убийца

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= w\cos(x_3) - v_1,\\ \dot{x}_2 &= w\sin(x_3) - v_2,\\ \dot{x}_3 &= u,\end{aligned}$$

$|u| \leq a$, $|v_1|^2 + |v_2|^2 \leq b^2$.

Управляемая система

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0,$$
$$t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in U, \quad v \in V.$$

- $\mathbb{R}^d$ – фазовое пространство;
- x – состояние;
- $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ – пространство позиций;
- (t, x) – позиция;
- U, V – пространства управлений;
- u – управление первого игрока;
- v – управление второго игрока.

Задача наведения

Пусть $M \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d$ – целевое множество (примеры: $M = [0, T] \times B_\varepsilon(0)$, $M = \{T\} \times B_\varepsilon(0)$).

Цели:

- цель первого игрока: выбрать управление u так, чтобы $(\tau, x(\tau)) \in M$ для некоторого момента τ и всех управлений второго игрока v;
- цель второго игрока: выбрать управление v так, чтобы для всех t $(t, x(t)) \notin M$ для всех управлений первого игрока u и всех моментов t.

Задача минимизации/максимизации платы

Пусть $\gamma(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ – функционал платы:

$$\gamma(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma(x(T)) + \int_{t_0}^{T} g(t, x(t), u(t), v(t))dt.$$

Цели:

- цель первого игрока: выбрать управление u так, чтобы минимизировать $\gamma(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ для всех управлений второго игрока v;
- цель второго игрока: выбрать управление v так, чтобы минимизировать $\gamma(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ для всех управлений первого игрока u.

Задача быстродействия

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ – целевое множество (примеры: $\mathcal{D} = \{0\}$ $\mathcal{D} = B_\varepsilon(0)$).

Цели:

- цель первого игрока: выбрать управление u так, чтобы минимизировать момент попадания на $\mathcal{D}$;
- цель второго игрока: выбрать управление v так, чтобы максимизировать момент попадания на $\mathcal{D}$;

Стратегии (первого игрока)

- программные стратегии: $u(t)$.
- позиционные стратегии: $u(t, x)$:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t, x(t)), v(t)).$$

Непрерывные стратегии не оптимальны (А.И. Субботин, Н.Н. Субботина)

$$\dot{x} = u(t) + (2 - t)v(t), \quad x(0) = 0,$$
$$t \in [0, 2], \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u, v \in B_1(0)$$

Функционал платы: $-\|x(2)\|$.

Пусть $u(t, x)$ – непрерывная стратегия, v – константа. Тогда

$$x(2, v) = \int_0^T u(t, x(t))dt - 2v.$$

Непрерывные стратегии не оптимальны (А.И. Субботин, Н.Н. Субботина)

- Функция

$$v \mapsto y(v) \triangleq v - \frac{x(2,v)}{2} = -\frac{1}{2}\int_0^T u(t,x(t))dt$$

  отображает $B_1(0)$ в себя.
- По теореме Брауэра существует v_*, что $v_* = y(v_*)$. Тогда $x(2,v_*) = 0$.
- Для любой непрерывной стратегии гарантированная плата первого игрока равна 0.

Непрерывные стратегии не оптимальны (А.И. Субботин, Н.Н. Субботина)

Используя стратегию

$$u(t,x) \triangleq \begin{cases} x\|x\|^{-1}, & x \neq 0, \\ (1,0), & x = 0 \end{cases}$$

первый игрок может гарантировать плату не больше $-1/2$.

Стратегии Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. Первый игрок

- $u(t,x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to U$ – произвольная функция (стратегия);
- $\Delta = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ – разбиение отрезка $[t_0, T]$, t_j – моменты коррекции управления первого игрока;
- $v(\cdot)$ – реализация управления второго игрока.

Стратегии Н.Н. Красовского и А.И. Субботина

Движение $x[\cdot] = x[\cdot, t_0, x_0, u, \Delta, v(\cdot)]$ строится по правилу:

- $x[t_0] = x_0$;
- на отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ $x[\cdot]$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}x[t] = f(t, x[t], u(t_{j-1}, x[t_{j-1}]), v(t))$$

Стратегии Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. Второй игрок

- $v(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to U$ – произвольная функция (стратегия);
- $\Delta = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ – разбиение отрезка $[t_0, T]$, t_j – моменты коррекции управления второго игрока;
- $u(\cdot)$ – реализация управления первого игрока.

Строится движение $x[\cdot, t_0, x_0, v, \Delta, u(\cdot)]$.

Постановка дифференциальной игры. Задача наведения (задача первого игрока)

Найти стратегию u, такую, что для любых $\varepsilon > 0$, разбиения Δ (такого, что $d(\Delta)$ достаточно мало) и реализации управления второго игрока $v(\cdot)$ существует τ такое, что

$$\operatorname{dist}((\tau, x[\tau, t_0, x_0, u, \Delta, v(\cdot)]), M) \leq \varepsilon.$$

Постановка дифференциальной игры. Задача уклонения (задача второго игрока)

Найти стратегию v, такую, что для любых $\varepsilon > 0$, разбиения Δ (такого, что $d(\Delta)$ достаточно мало) и реализации управления первого игрока $u(\cdot)$ и любого момента τ выполнено неравенство

$$\operatorname{dist}((\tau, x[\tau, t_0, x_0, V, \Delta, u(\cdot)]), M) > \varepsilon.$$

Альтернатива?

Верно ли, что либо разрешима задача о сближении, либо задача об уклонении?

Условия

- M – замкнуто;
- U, V – компакты;
- f – непрерывно;
- f – локально липшицева по x;
- f – удовлетворяет условию подлинейного роста по x;
- (условие Айзекса) для всех $t \in [0, T]$, $x, \xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle \xi, f(t, x, u, v) \rangle = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle \xi, f(t, x, u, v) \rangle$$

u-стабильность

Множество $W \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d$ называется u-стабильным, если для всех $(t_*, x_*) \in W$, $v \in V$ и $\tau \in (t_*, T]$ существует такое решение дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, x(t), u, v) : u \in U\}, \quad x(t_*) = x_*,$$

что $(t, x(t)) \in W$ для всех $t \in [t_0, \min\{t^*, \tau\}]$. Здесь t^* – первый момент со свойством $x(t^*) \in M(t^*)$.

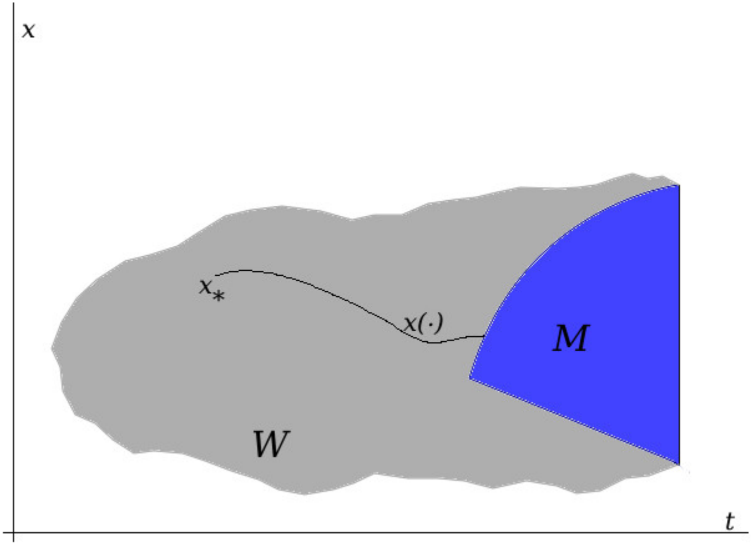
$M(t) \triangleq \{w : (t, w) \in M\}$.

u-стабильный мост

$W \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d$ – u-стабильный мост, если

- W – u-стабильно;
- $W(T) \subset M(T)$.

u-стабильный мост



Экстремальный сдвиг

Пусть W – u-стабильный мост.

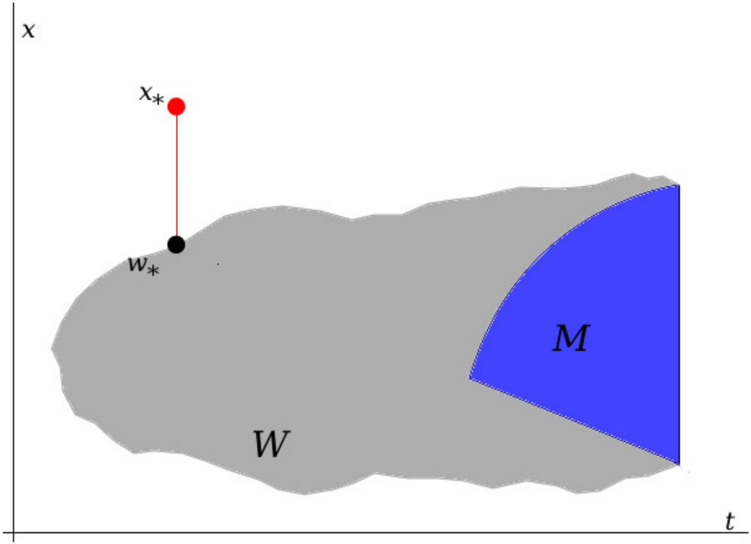
- Пусть $(t_*, x_*) \notin W$, w_* ближайшая к x_* точка в множестве $W(t_*)$. Выберем u_* и v_* по правилу:

$$\max_{v\in V}\langle x_* - w_*, f(t_*, x, u_*, v)\rangle$$
$$= \min_{u\in U}\max_{v\in V}\langle x_* - w_*, f(t_*, x, u, v)\rangle$$
$$= \min_{u\in U}\langle x_* - w_*, f(t_*, x, u, v_*)\rangle.$$

  Положим
$$u^e(t_*, x_*) \triangleq u_*.$$

- Внутри W определим стратегию u^e произвольным образом.

Экстремальный сдвиг



Оценка Красовского-Субботина

Пусть

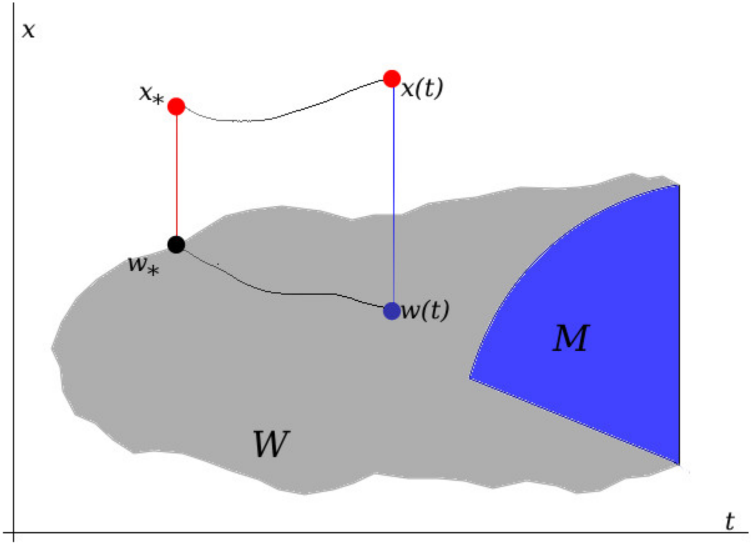
- $v(\cdot)$ – произвольное управление второго игрока;
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*, v(t))$, $x(t_*) = x_*$;
- $\dot{w}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, x, u, v_*) : u \in U\}$, $\quad w(t_*) = w_*$;
- $K \subset \mathbb{R}^d$ – множество, такое, что $x(t), w(t) \in K$, $t \in [t_*, T]$.

Тогда

$$\|x(t) - w(t)\|^2 \leq \|x_* - w_*\|(1 + 2L(t - t_*)) \\ + \varphi(t - t_*) \cdot (t - t_*),$$

где L – константа Липшица (по x) функции f на $[0, T] \times K \times U \times V$, $\varphi(\delta) \to \delta$ при $\delta \to 0$.

Оценка Красовского-Субботина

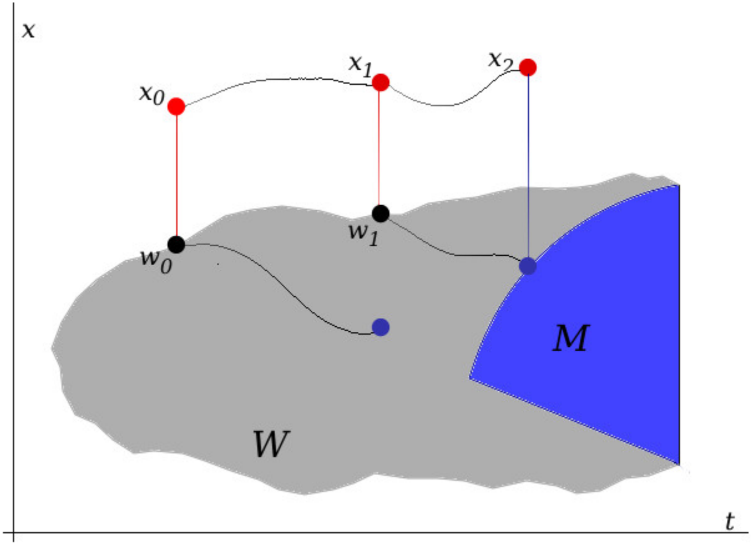


Расстояние до множества

Пусть

- $\Delta = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ – множество моментов коррекции управления;
- $v(\cdot)$ – реализация управления второго игрока;
- $x(\cdot) = x[\cdot, t_0, x_0, u^e, \Delta, v(\cdot)]$;
- $w_i(\cdot)$ удовлетворяю условиям
  - $\dot{w}_i(t) \in \mathrm{co}\{f(t, w(t), u, v_i) : u \in U\}$,
  - $w_i(t_i)$ – ближайшая к $x(t_i)$ точка в $\{w : (t_i, w) \in W\}$,
  - v_i – управление, полученное из условия Айзекса,
  - $(t, w(t)) \in W$, $t \in [t_i, \theta_i]$, где $\theta_i = \min\{t_i^*, t_{i+1}\}$, $w(t_i^*) \in M(t_i^*)$.

Движения



Расстояние до множества

- для всех i и $t \in [t_i, t_{i+1}]$
$$\|x(t) - w_i(t)\| \le \mathrm{dist}(x_0; W(t_0))e^{2LT} + \varphi(d(\Delta))Te^{2LT}.$$
- существует такое i и θ_i, что $w_i(\theta_i) \in M(\theta_i)$, следовательно
$$\inf_{t\in[0,T]} \mathrm{dist}(x[t, t_0, x_0, u^e, \Delta, v(\cdot)], M(t)) \\ \le \mathrm{dist}(x_0; W(t_0))e^{2LT} + \varphi(d(\Delta))Te^{2LT}.$$

v-стабильность

Множество $W \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d$ называется v-стабильным, если для всех $(t_*, x_*) \in W$, $u \in U$ и $\tau \in (t_*, T]$ существует такое решение дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, x(t), u, v) : v \in V\}, \quad x(t_*) = x_*,$$

что $x(t) \in W(t)$ для всех $t \in [t_*, \tau]$.

v-стабильный мост

$W \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d$ – v-стабильный мост, если

- W – v-стабильно,
- $W(T) \subset \mathbb{R}^d \setminus M(T)$.

Для v-стабильного моста можно определить стратегию второго игрока v^e, гарантирующую уклонение от M.

Альтернатива Красовского-Субботина

Пространство $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ можно представить в виде $[0, T] \times \mathbb{R}^d = W^u \cup W^v$, где

- W^u – максимальный u-стабильный мост;
- W^v – максимальный v-стабильный мост;
- $W^u \cap W^v = \varnothing$.

Задача минимизации/максимизации платы

Пусть $\gamma(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ – функционал платы:

$$\gamma(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma(x(T)) + \int_{t_0}^{T} g(t, x(t), u(t), v(t))dt.$$

Цели:

- цель первого игрока: выбрать управление u так, чтобы минимизировать $\gamma(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ для всех управлений второго игрока v;
- цель второго игрока: выбрать управление v так, чтобы минимизировать $\gamma(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ для всех управлений первого игрока u.

Функция цены

- Верхняя функция цены

$$\Gamma_1(t_0,x_0) \triangleq \inf_{u(\cdot,\cdot)} \limsup_{\Delta:d(\Delta)\downarrow 0} \sup_{v(\cdot)} \gamma(x[\cdot,t_0,x_0,u,\Delta,v(\cdot)],u_\Delta(\cdot),v(\cdot)).$$

- Нижняя функция цены

$$\Gamma_2(t_0,x_0) \triangleq \sup_{v(\cdot,\cdot)} \liminf_{\Delta:d(\Delta)\downarrow 0} \inf_{u(\cdot)} \gamma(x[\cdot,t_0,x_0,v,\Delta,u(\cdot)],u(\cdot),v_\Delta(\cdot)).$$

Здесь u_Δ (соответственно, v_Δ) – реализация пошагового управления первого (соответственно, второго) игрока.

Условия

- U, V – компакты;
- f, g – непрерывны;
- f, g – локально липшицевы по x;
- f, g – удовлетворяют условию подлинейного роста по x;
- (условие Айзекса) для всех $t \in [0, T]$, $x, \xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} [\langle \xi, f(t,x,u,v) \rangle + g(t,x,u,v)] = \max_{v \in V} \min_{u \in U} [\langle \xi, f(t,x,u,v) \rangle + g(t,x,u,v)].$$

u-стабильная функция

Функция $\phi : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется *u-стабильной*, если, для всех $t_* \in [0, T]$, $x_* \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in (t_*, T]$, $v \in V$ существует траектория

$$(\dot{w}(t), \dot{\zeta}(t)) \in \mathrm{co}\{(f(t, w(t), u, v), g(t, w(t), u, v)) : u \in U\},$$

$w(t_*) = x_*$, $\zeta(t_*) = 0$ такая, что

$$\phi(\tau, w(\tau)) + \zeta(\tau) \leq \phi(t_*, x_*).$$

Нацеливание на u-стабильную функцию

- Пусть ϕ – u-стабильна, и $\phi(T, x) = \sigma(x)$.
- $\varepsilon > 0$
- $(t_*, x_*) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, w_* – точка, где достигается минимум функции $w \mapsto \phi(t_*, w)$ в окрестности $\|w - x_*\| \leq \varepsilon$.
- выберем u_* так, чтобы
$$\max_{v \in V}[\langle \xi, f(t, x, u_*, v)\rangle + g(t, x, u_*, v)]$$
$$= \min_{u \in U} \max_{v \in V}[\langle \xi, f(t, x, u, v)\rangle + g(t, x, u, v)].$$
- положим $u^{\varepsilon}(t_*, x_*) \triangleq u_*$.

u^{ε} – ε-оптимальная стратегия первого игрока!

Функция цены

- Существует функция цены $\Gamma(t_0, x_0) = \Gamma_1(t_0, x_0) = \Gamma_2(t_0, x_0)$;
- функция Γ одновременно u- и v-стабильна.

Метод программных итераций. Итерации множеств

- $E \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d$
- $A(E)$ – множество тех $(t_*, x_*) \in E$, что для каждого $v(\cdot)$ существует решение дифференциального включения

$$\dot{w}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, w(t), u, v(t)) : u \in U\}, \quad w(t_*) = x_*$$

  такое, что
  - $w(t^*) \in M(t^*)$ для некоторого t^*
  - $w(t) \in E(t)$ для всех $t \in [t_*, t^*]$.

.

Метод программных итераций. Итерации множеств

$$W^0 \triangleq [0,T] \times \mathbb{R}^d, \quad W^k = A(W^{k-1}).$$

$$W^u = \lim_{k\to\infty} W^k = \bigcap_{k=1}^{\infty} W^k.$$

W^u – максимальный u-стабильный мост.

Метод программных итераций. Итерации функций

Пусть $\phi : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция.

$$(B\phi)(t_*, x_*) = \sup_{v(\cdot)} \sup_{\tau \in [t_*, T]} \inf_{u(\cdot)} \Big[\int_{t_*}^{\tau} g(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)), u(t), v(t)) dt + \phi(\tau, x(\tau, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \Big].$$

Здесь $x(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ – решение уравнения:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad x(t_*) = x_*.$$

Программный максимин.

$$c^0(t_*, x_*) = \sup_{v(\cdot)} \inf_{u(\cdot)} \Big[\sigma(x(\tau, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) + \int_{t_*}^{\tau} g(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)), u(t), v(t))dt\Big].$$

Метод программных итераций. Итерации функций

$$c^k = Bc^{k-1}.$$

$$\Gamma(t_*, x_*) = \lim_{k\to\infty} c^k(t_*, x_*).$$

Γ – функция цены!

Квазилинейная система

Пусть

- $f(t, x, u, v) = A(t)x + f(t, x, u, v)$;
- $g = 0$, $\sigma(x) = \min_{m \in \mathcal{M}} \|\{x\}_k - m\|$ (где $\{x\}_k$ – вектор составленный из первых k координат x);
- $\Phi(t, t_0)$ – матрица Коши;
- $\mathcal{M}$ – выпуклый компакт.

Условие полного выметания

Существует

- непрерывные функции $h : [0, T] \to \mathbb{R}$, $z : [0, T] \to \mathbb{R}^k$
- $G : [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^k$, $G(t)$ – выпукло и замкнуто,

такие, что для всех $\tau \in [0, T]$ и $l \in S^k$

$$\int_\tau^T \min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle l, \Phi(T, t)\hat{f}(t, u, v)\rangle dt - \rho_{\mathcal{M}}(l) \\ = \langle l, z(t)\rangle - \rho_{G(t)}(l) + h(t),$$

$$\sup_{l \in S^k} \left[\langle l, x\rangle - \rho_{G(t)}\right] \geq 0.$$

- $S^k \triangleq \{l \in \mathbb{R}^k : \|l\| = 1\}$;
- $\rho_C(l) \triangleq \sup_{y \in C} \langle l, y\rangle$.

Итерации в условиях полного выметания

- $c^0(t,x) = \sup\{0, \hat{c}(t,x),$

$$\hat{c}(t,x) = \max_{l \in S^k} \left[\langle l, y^0(t,x) \rangle - \rho_{G(t)}(l) \right] + h(t),$$

  $y^0(t,x) = \{\Phi(T,t)x\}_k + z(t);$
- $c^1(t,x) = \sup\{c^0(t,x), \max_{\tau \in [t,T]} h(t)\};$
- $c^2 = c^1.$

Мальчик и крокодил на прямой

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + v,\\ \dot{x}_2 &= u.\end{aligned}$$

$T = 1,\ U = [-a, a],\ V = [-1, 1],\ \sigma(x_1, x_2) = |x_1|.$
Выберем

- $G(t) = \{0\};$
- $z(t) = 0;$
- $h(t) = (1 - a(1 - t)/2)(1 - t).$

Уравнение Айзекса-Беллмана

Пусть

$$H(t,x,p) \triangleq \min_{u\in U}\max_{v\in V}[\langle p, f(t,x,u,v)+g(t,x,u,v)\rangle].$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + H(t,x,\nabla\phi) = 0, \quad \phi(T,x) = \sigma(x).$$

Гладкие решения уравнения Айзекса-Беллмана

Если ϕ – гладкое (C^1) решение уравнения Айзекса-Беллмана, то ϕ – функция цены дифференциальной игры.

Негладкость решения

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2} = 0, \quad \phi(2, x) = x^2/2.$$

$$\phi(t, x) = \sup_{p \in \mathbb{R}} \left[px - (2 - t)\sqrt{1 + p^2} + p^2/2 \right].$$

Минимаксные решения

ϕ – минимаксное решение уравнение Айзекса-Беллмана, если

$$\inf\{d^-\phi(t,x,1,b) - \langle p,b\rangle + H(t,x,p) :\in \mathbb{R}^d\} \leq 0,$$

$$\sup\{d^+\phi(t,x,1,b) - \langle p,b\rangle + H(t,x,p) :\in \mathbb{R}^d\} \geq 0.$$

Здесь,

$$d^-\phi(t,x,a,b) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf\Big\{\frac{\phi(t+\delta a', x+\delta b') - \phi(t,x)}{\delta} : \delta\in(0,\varepsilon), |a-a'|, \|b'-b\| \leq \varepsilon\Big\}.$$

$$d^+\phi(t,x,a,b) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup\Big\{\frac{\phi(t+\delta a', x+\delta b') - \phi(t,x)}{\delta} : \delta\in(0,\varepsilon), |a-a'|, \|b'-b\| \leq \varepsilon\Big\}.$$

Вязкостные решения

M. Crandall, P.-L. Lions

ϕ – вязкостное решение уравнение Айзекса-Беллмана, если

$$q + H(t,x,p) \le 0, \quad \text{для все } (q,p) \in D^-\phi(t,x)$$

$$q + H(t,x,p) \ge 0, \quad \text{для все } (q,p) \in D^+\phi(t,x)$$

Здесь

$$D^-\phi(t,x) = \{(q,p) : qa + \langle p, b\rangle \\ \le d^-\phi(t,x,a,b) : (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\},$$

$$D^+\phi(t,x) = \{(q,p) : qa + \langle p, b\rangle \\ \ge d^+\phi(t,x,a,b) : (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\},$$

Минимаксные/вязкостные решения уравнения Айзекса-Беллмана

Если ϕ – минимаксное/вязкостное решение уравнения Айзекса-Беллмана, то ϕ – функция цены дифференциальной игры.

Квазистратегии

Пусть

- $\mathcal{U}_{t_0}$ – множество функций $u : [t_0, T] \to U$;
- $\mathcal{V}_{t_0}$ – множество функций $u : [t_0, T] \to V$.

Отображение $\alpha : \mathcal{V}_{t_0} \to \mathcal{U}_{t_0}$ такое, что для всех τ из того, что $v_1(t) = v_2(t)$, $t \in [t_0, \tau]$, следует, что

$$\alpha(v_1)(t) = \alpha(v_2)(t), \quad t \in [t_0, \tau],$$

называется квазистратегией (nonanticipative strategy) первого игрока.

Квазистратегии

Отображение $\beta : \mathcal{U}_{t_0} \to \mathcal{V}_{t_0}$ такое, что для всех τ из того, что $u_1(t) = u_2(t)$, $t \in [t_0, \tau]$, следует, что

$$\beta(u_1)(t) = \beta(u_2)(t), \quad t \in [t_0, \tau],$$

называется квазистратегией (nonanticipative strategy) второго игрока.

Функция цены для случая квазистратегий

$$\begin{aligned}
&\inf_{\alpha} \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} \gamma(x(\cdot, t_0, x_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot)), \alpha(v(\cdot)), v(\cdot)) \\
&\qquad = \sup_{\beta} \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \gamma(x(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot), \beta(u(\cdot))), u(\cdot), \beta(u(\cdot))) \\
&\qquad\qquad = \Gamma(t_0, x_0).
\end{aligned}$$

Заключение

- Стратегии управления с поводырем
- Стохастический поводырь
- Марковские аппроксимации
- Прицеливание на квази-/проксимальный градиент функции цены
- Особенности функции цены
- Численные методы